

Б. А. Тверской

# ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КОСМОФИЗИКИ





A. L. R.



Б. А. Тверской

# ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КОСМОФИЗИКИ

Избранные труды



**Тверской Борис Аркадьевич**

**Основы теоретической космофизики. Избранные труды / Сост. М. Ф. Бахарева, А. В. Гетлинг, Э. Н. Сосновец, Л. В. Тверская. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 376 с., илл.**

ISBN 5–354–00647–3

Книга является сборником избранных трудов выдающегося космофизика, профессора МГУ Бориса Аркадьевича Тверского (1936–1997). Первая часть книги представляет собой переиздание монографии «Динамика радиационных поясов Земли», которая вышла в 1968 г. и давно уже является библиографической редкостью. В ней излагается разработанная Б. А. Тверским и ставшая общепринятой теория радиационных поясов Земли. Во второй части представлены наиболее важные статьи Б. А. Тверского по четырем основным направлениям его исследований: 1) теории радиационных поясов Земли; 2) теории магнитосферно-ионосферного взаимодействия и связанных с ним процессов в магнитосфере Земли, в частности, магнитных бурь и полярных сияний; 3) теории статистического ускорения заряженных частиц в космической плазме и 4) теории генерации магнитных полей космических объектов (со включением некоторых других работ, имеющих отношение к физике Солнца).

Книга рассчитана на специалистов в области космических исследований, геофизики, астрофизики, физики плазмы и других наук, а также на преподавателей, аспирантов и студентов-старшекурсников соответствующих специальностей.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 30.03.2004 г.


Формат 70×100/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 23,5. Зак. № 91

Отпечатано в ГП «Облиздат». 248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5

ISBN 5–354–00647–3

© Л. В. Тверская,  
наследник автора, 2004  
© Едиториал УРСС, 2004

**ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС**  
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

 E-mail: [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)  
Каталог изданий  
в Internet: <http://URSS.ru>  
Тел./факс: 7 (095) 135–42–16  
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

2317 ID 19845



9 785354 006472 >



## **Содержание**

От составителей .....	6
Памяти Бориса Аркадьевича Тверского .....	8

### **Часть I**

## **Динамика радиационных поясов Земли (монография)**

Аннотация .....	12
Предисловие .....	13
<b>Глава I</b>	
<b>Физические условия в магнитосфере Земли .....</b>	<b>15</b>
§ 1. Введение .....	15
§ 2. Геомагнитное поле .....	21
§ 3. Холодная плазма и электромагнитные и плазменные волны в магнитосфере .....	38
<b>Глава II</b>	
<b>Радиационные пояса Земли .....</b>	<b>45</b>
§ 4. Дрейф частиц в поле внутриземных токов .....	45
§ 5. Граница области захваченной радиации .....	53
§ 6. Высокоэнергичные протоны в магнитосфере Земли .....	60
§ 7. Энергичные электроны .....	64
<b>Глава III</b>	
<b>Перенос захваченных частиц поперек дрейфовых оболочек при внезапных импульсах .....</b>	<b>78</b>
§ 8. Электромагнитные возмущения при внезапных импульсах .....	78
§ 9. Движение частиц во время внезапного импульса и параметры переноса .....	81
§ 10. Оценка параметра $D_0$ по данным о внезапных импульсах .....	89
§ 11. Основные решения уравнения переноса .....	91
§ 12. Перенос частиц с границы магнитосферы с учетом ионизационных потерь .....	103

**Глава IV**

<b>Роль переноса в формировании радиационных поясов Земли</b> . . . . .	<b>107</b>
§ 13. Протонный пояс . . . . .	107
§ 14. Внешний электронный пояс . . . . .	113

**Глава V**

<b>Устойчивость радиационных поясов</b> . . . . .	<b>121</b>
§ 15. Современное состояние проблемы устойчивости радиационных поясов . . . . .	121
§ 16. Основные уравнения . . . . .	123
§ 17. Устойчивость внешней протонной зоны и возможный механизм генерации геомагнитных микропульсаций типа Pc1 . . . . .	132
§ 18. Устойчивость внутренней электронной зоны . . . . .	135
§ 19. Устойчивость внешней электронной зоны. Зазор между поясами . . . .	141
<b>Приложение. Декремент затухания волн с <math>\omega \gtrsim \Omega_H</math> в магнитосфере</b> . . . . .	<b>143</b>
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>148</b>

**Часть II****Статьи** **153****Глава I**

<b>Радиационные пояса Земли</b> . . . . .	<b>154</b>
Основные механизмы формирования радиационных поясов Земли . . . . .	154
Вариации энергичных частиц радиационных поясов во время сильной магнитной бури 24–26 марта 1991 года . . . . .	166

**Глава II**

<b>Магнитосферно-ионосферное взаимодействие и другие процессы в магнитосфере Земли</b> . . . . .	<b>173</b>
Об электрических полях в магнитосфере Земли . . . . .	173
Электрические поля в магнитосфере и происхождение захваченной радиации .	178
Теория динамических процессов в околоземной плазме . . . . .	197
Электрическое поле в хвосте магнитосферы . . . . .	206
Магнитное поле потока плазмы, обтекающего затупленное тело . . . . .	211
О роли полярной ионосферы как источника ионов в магнитосфере . . . . .	216
О продольных токах в магнитосфере . . . . .	219
О природе однородных дуг полярных сияний . . . . .	225
О лучистых формах полярных сияний . . . . .	235
Механизм формирования структуры кольцевого тока магнитных бурь . . . . .	244

**Глава III****Статистические механизмы ускорения заряженных частиц в космической плазме.**

<b>Солнечные и галактические космические лучи</b> . . . . .	<b>251</b>
К теории статистического ускорения Ферми . . . . .	251
К теории турбулентного ускорения заряженных частиц в плазме . . . . .	267
К теории ускорения заряженных частиц в нестационарных магнитных полях . . . . .	282
Ускорение частиц в межпланетном пространстве . . . . .	291
Распространение энергичных заряженных частиц в гелиосфере . . . . .	300
О релятивистском турбулентном ускорении . . . . .	308

**Глава IV**

<b>Генерация магнитных полей космических объектов. Солнечная активность</b> . . . . .	<b>313</b>
К вопросу о конвекции во вращающемся шаре. I . . . . .	313
К вопросу о конвекции во вращающемся шаре. II . . . . .	323
Магнитогидродинамические свойства двумерной турбулентности во вращающемся шаре . . . . .	333
К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей . . . . .	340
О влиянии магнитного поля на увеличение амплитуды акустических волн в среде с падающей плотностью . . . . .	349
Критерии тепловой (перегревной) неустойчивости прозрачного излучающего газа . . . . .	353
<b>Приложение. Борис Тверской, физик и лирик (Л. В. Тверская)</b> . . . . .	<b>358</b>
<b>Summary</b> . . . . .	<b>366</b>

## От составителей

В книге представлены избранные труды выдающегося отечественного физика, одного из ведущих космофизиков мира, профессора Московского государственного университета Бориса Аркадьевича Тверского. Один из основоположников космофизики — новой ветви науки, возникшей с наступлением космической эры, — он отличался удивительной энциклопедической разносторонностью мышления физика-теоретика и виртуозно владел аппаратом исследования. Поэтому работы Б. А. Тверского (многие из которых стали классическими) охватывают разнообразные научные направления в физике космоса — от ускорения и распространения галактических и солнечных космических лучей и генерации солнечных магнитных полей до процессов в магнитосфере и ионосфере Земли.

Книга состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой переиздание монографии Б. А. Тверского «Динамика радиационных поясов Земли», которая вышла в 1968 г. и давно уже является библиографической редкостью. В ней автор изложил разработанную им и ставшую общепринятой теорию радиационных поясов Земли. Большинство обнаруженных в последние десятилетия эффектов в радиационных поясах были либо предсказаны, либо объяснены в рамках этой теории. Книга по сей день является классическим настольным пособием во всех научных центрах, занимающихся данной проблемой. В частности, Национальное аэрокосмическое агентство США (НАСА) в 1971 г. издало перевод этой книги в качестве рабочего материала (NASA Technical Translation F-635, June, 1971).

В четырех главах второй части собраны ключевые научные статьи Б. А. Тверского по четырем основным направлениям его исследований.

В первой главе представлены заказной доклад по теории радиационных поясов на международном симпозиуме (Вашингтон, 1968 г.), посвященном итогам 10-летнего исследования магнитосферы (публикуется в обратном переводе с английского) и статья, в которой Б. А. Тверской впервые объяснил замечательное явление, зарегистрированное американскими исследователями на ИСЗ CRRES в 1991 году — образование нового радиационного пояса электронов и протонов с энергиями в десятки МэВ в течение  $\sim 1$  мин во время мощного внезапного импульса в магнитном поле Земли.

Вторая глава содержит работы по теории открытого Б. А. Тверским в 1969 г. явления магнитосферно-ионосферного взаимодействия при нестационарной конвекции горячей плазмы в магнитосфере, теории магнитных бурь и суббурь, полярных сияний и других магнитосферных процессов. В частности, представлены первые в мировой литературе теоретические работы о токовом слое геомагнитного хвоста и о роли полярной ионосферы как источника ионов в магнитосфере. Здесь же публикуется последняя работа Тверского (1997 г.) о структуре кольцевого тока магнитных бурь.

В третьей главе изложены фундаментальные исследования статистического ускорения заряженных частиц в холодной бесстолкновительной плазме при взаимодействии частиц с гидромагнитной турбулентностью. В 1967 г. Б. А. Тверским



впервые были разработаны теория статистического ускорения Ферми и теория турбулентного ускорения, а несколькими годами позже — кинетическая квазилинейная теория альвеновского ускорения. В этой же главе публикуется работа об особенностях распространения галактических космических лучей в гелиосфере (заказной доклад на сессии КОСПАР, Будапешт, 1980 г.) и неоконченная рукопись (факсимиле) статьи о релятивистском турбулентном ускорении. В последней работе Б. А. Тверской развивал свою, отличную от общепризнанной, точку зрения на происхождение галактических космических лучей: ускорение в межзвездной среде, где турбулентность может возникнуть при взрывах новых звезд.

В четвертую главу включены некоторые работы по генерации магнитных полей космических объектов и солнечной активности. Особый интерес представляет предложенный Б. А. Тверским в 1966 г. механизм усиления и генерации магнитных полей тороидальными вихрями в проводящей жидкости. Современные исследования указывают на возможную принципиальную роль этого механизма в комплексе активных процессов на Солнце.

Основное содержание книги предваряется перепечатанным из журнала «Успехи физических наук» некрологом о Б. А. Тверском, в котором содержатся факты его биографии и творческого пути.

В Приложении публикуются воспоминания Л. В. Тверской «Борис Тверской, физик и лирик». В книгу включены фотографии из семейного архива.

Считаем своим приятным долгом поблагодарить ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовниченко за предоставление финансовой поддержки изданию трудов Б. А. Тверского, а также директора НИИЯФ МГУ профессора Михаила Игоревича Панасюка и заведующего отделом НИИЯФ МГУ профессора Евгения Александровича Романовского за постоянное внимание к процессу подготовки книги к печати.

Издание подготовлено к печати сотрудниками отдела теоретической и прикладной космофизики НИИЯФ МГУ — отдела, которым с момента его создания (1970 г.) Б. А. Тверской руководил до конца своих дней. Значительную помощь нам оказали сотрудники отдела Л. М. Алексеева, А. С. Ковтюх, Н. Н. Павлов. Трудоемкая работа по компьютерному набору и техническому редактированию текста выполнена сотрудниками отдела Т. А. Ивановой, Т. Н. Лукиной и Л. А. Кузнецовой. Компьютерную обработку части фотографий выполнила Т. В. Лойко, племянница Б. А. Тверского. Мы благодарны всем им.

*М. Ф. Бахарева, А. В. Гетлинг,  
Э. Н. Сосновец, Л. В. Тверская*

## **Памяти Бориса Аркадьевича Тверского\***

Отечественная и мировая наука понесла тяжелую утрату. 6 августа 1997 года после тяжелой и продолжительной болезни ушел из жизни выдающийся российский физик, один из ведущих космофизиков мира, профессор Московского государственного университета Борис Аркадьевич Тверской. При нем и при его непосредственном участии зародилась космофизика как наука и превратилась затем в большую самостоятельную область физики, в которой Борису Аркадьевичу принадлежат многие фундаментальные результаты.

Б. А. Тверской родился 5 февраля 1936 г. в г. Новосибирске. Увлечение космосом, стремление постичь тайны космических явлений проявились у него еще в школьные годы. В 1950 г. ученик 7-го класса Борис Тверской выступил на научной конференции Географического общества «Сибирь» с докладами на темы: «Новое в космогонии солнечной системы» и «Геологические явления в свете теории О. Ю. Шмидта». Сохранилась переписка 14-летнего школьника с академиком О. Ю. Шмидтом. Знаменитый полярный исследователь с большим вниманием отнесся к юному новосибирскому естествоиспытателю, посылал ему отписки своих работ. В школьные годы судьба свела Б. А. Тверского с известным физиком-теоретиком Ю. Б. Румером, находившимся в ссылке в Новосибирске. Эта встреча окончательно определила выбор жизненного пути. В 1952 г. Б. А. Тверской поступает на физический факультет Московского университета. Его научная деятельность началась в студенческие годы в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова в коллективе, возглавляемом академиком М. А. Леонтовичем.

В первые годы работы Б. А. Тверской занимался проблемой поиска реальных для физики космоса течений, приводящих к генерации магнитных полей. Уже первые научные результаты Б. А. Тверского принесли ему широкую известность. В аспирантуре Б. А. Тверской выполнил диссертационную работу «К вопросу о свободной тепловой конвекции во вращающемся гравитирующем шаре», в которой был получен полный спектр собственных колебаний несжимаемой жидкости во вращающемся шаре. Данное направление получило развитие в цикле дальнейших работ Б. А. Тверского, в результате которых было показано, что основной структурный элемент тепловой конвекции — конвективная ячейка, может генерировать магнитное поле. Б. А. Тверскому удалось показать, что характерным свойством усиления магнитного поля в конвективных ячейках Бенара является формирование биполярного распределения магнитного поля типа поля солнечного пятна. На базе проведенных исследований была выдвинута и обоснована гипотеза, связывающая 22-летний цикл солнечной активности с разработанным механизмом образования солнечных пятен и неоднородным вращением Солнца. В настоящее время признанные классическими результаты работ Б. А. Тверского по тороидальным вихрям широко используются в теории солнечного динамо.

Жизнь и научная деятельность Б. А. Тверского после окончания аспирантуры в 1961 г. была неразрывно связана с НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына

---

\* Успехи физических наук, 168(1), 111–112, 1998.

Московского государственного университета, где в 1962 г. он защитил кандидатскую, а в 1966 г. и докторскую диссертации. Став в 30 лет доктором физико-математических наук, Б. А. Тверской основал ряд научных направлений, которые продолжают интенсивно развиваться и в настоящее время.

В 1961–1965 гг. Б. А. Тверским была разработана ныне общепринятая теория радиационных поясов Земли. Радиационные пояса Земли формируются в результате радиальной диффузии частиц в область сильного магнитного поля с границ геомагнитной ловушки. В результате сохранения адиабатических инвариантов происходит ускорение частиц. Основным источником переноса являются крупномасштабные индукционные электрические поля, возникающие при сжатиях геомагнитной ловушки — внезапные импульсы. Б. А. Тверскому удалось получить полностью согласующиеся с экспериментом коэффициенты переноса приэкваториальных частиц, разработать теорию стационарных и нестационарных процессов взаимодействия радиальной диффузии с различными явлениями, приводящими к гибели частиц. Была теоретически определена граница устойчивости радиационных поясов по отношению к возбуждению колебаний магнитосферной плазмы. Исследования на спутнике «Электрон» и ряде американских ИСЗ полностью подтвердили теоретические предсказания Б. А. Тверского. Были обнаружены предсказанные Б. А. Тверским пояс альфа-частиц и нестационарные диффузионные волны релятивистских электронов. Результаты работ по теории радиационных поясов были обобщены в монографии «Динамика радиационных поясов Земли» (1968 г.), ставшей классическим настольным пособием во всех научных центрах, занимающихся данной проблемой. Теория сохраняет свое значение до настоящего времени. На ее основе, например, получил количественное объяснение процесс быстрой инжекции высокоэнергичных частиц во внутренний пояс во время мощного короткого внезапного импульса, зарегистрированный в 1991 г. на американском ИСЗ CRRES.

Крупнейший вклад в физику околоземного космического пространства связан с работами Б. А. Тверского по изучению магнитосферных бурь и суббурь и природы полярных сияний. На основе полученного в 1969 г. решения самосогласованной задачи о магнитосферно-ионосферных взаимодействиях Б. А. Тверскому удалось предсказать конфигурацию текущих вдоль магнитных силовых линий продольных токов, соединяющих горячую магнитосферную плазму с холодной ионосферной. Величины этих токов оказались настолько велики, что потребовалось предположить существование значительной неэквипотенциальности магнитных силовых линий. Впоследствии предсказанные продольные электрические поля были измерены экспериментально. В результате магнитосферно-ионосферных взаимодействий происходит вытеснение низкочастотных электрических полей из низкоширотных областей магнитосферы и концентрация их в авроральной области. Полоса вытекающего из ионосферы продольного тока оказалась неустойчивой относительно распада на более узкие полосы. Теория, разработанная Б. А. Тверским, позволяла предсказывать число структур, на которые должен распадаться вытекающий продольный ток. Теоретические предсказания нашли экспериментальное подтверждение в ходе измерений на ИСЗ «Интеркосмос—Болгария-1300». В 1989 г. обнаруженное Б. А. Тверским явление магнитосферно-ионосферных взаимодействий было зарегистрировано в качестве открытия.

Большой цикл работ Б. А. Тверского связан с теорией статистического ускорения частиц. Ему удалось количественно описать диффузию в импульсном пространстве

при ускорении Ферми и статистическом ускорении гидромагнитной турбулентностью. Если турбулентность имеет широкий спектр, а максимум энергии пульсаций лежит в области волн, длины которых много больше ларморовского радиуса тепловых частиц, то затухание турбулентности приведет не к нагреву основной массы этих частиц, а к ускорению небольшой их группы до высоких энергий (принцип турбулентного ускорения). Разработанная теория позволила обосновать предположение об ускорении протонов с энергией порядка 1 МэВ в межпланетной среде.

В 1971 г. Б. А. Тверской создал в НИИЯФ МГУ Отдел теоретической и прикладной космофизики, главной задачей которого стала разработка фундаментальных основ и экспериментальное изучение процессов в магнитосфере Земли и межпланетном пространстве, существенных для практического освоения космического пространства. Под руководством Б. А. Тверского был создан комплекс аппаратуры для исследований плазмы и жесткой корпускулярной радиации в диапазоне энергий от эВ до десятков МэВ, проводивший исследования на многих космических аппаратах. Практическое применение проведенных исследований позволило значительно повысить надежность работы и увеличить срок службы спутников связи и навигационных спутников, обеспечить радиационную безопасность пилотируемых объектов.

Б. А. Тверской уделял большое внимание подготовке и воспитанию научных кадров. На физическом факультете МГУ он читал курс лекций «Введение в Космофизику», под его руководством защищено 15 кандидатских диссертаций, четыре его ученика стали докторами наук. Б. А. Тверским была создана научная школа по исследованию взаимосвязей плазменных процессов на Солнце, межпланетной среде, магнитосфере и ионосфере Земли. Он был членом редакционной коллегии журнала «Геомагнетизм и аэрономия» и ряда научных советов.

Выдающиеся научные и трудовые заслуги Б. А. Тверского отмечены присуждением ему в 1971 г. Ломоносовской премии МГУ, в 1978 г. — Государственной премии. Он был награжден орденом «Знак почета», золотой медалью ВДНХ, медалью им. академика С. П. Королева Федерации космонавтики СССР. В 1994 г. Б. А. Тверской был избран действительным членом Международной академии астронавтики. В 1996 г. ему было присвоено звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации».

Всех, кто лично знал Б. А. Тверского, поражали его энциклопедические знания истории, искусства и литературы, широта его интересов. Он страстно любил и знал музыку и поэзию. Все, кто знал Б. А. Тверского, навсегда сохраняют в своей памяти образ большого ученого, одного из лучших представителей российской интеллигенции, вся жизнь которого была посвящена беззаветному служению науке.

*А. А. Галеев, Г. Т. Зацепин, М. И. Панасюк,  
Р. З. Сагдеев, В. А. Садовничий, Э. Н. Сосновец*



**ЧАСТЬ I**

**ДИНАМИКА РАДИАЦИОННЫХ  
ПОЯСОВ ЗЕМЛИ**

**(МОНОГРАФИЯ)**

---

## **Аннотация**

В первой главе монографии дан обзор современных представлений о физических условиях в магнитосфере Земли (магнитном поле, плазме и электромагнитных пульсациях различных частот). Во второй главе подробно излагаются данные о структуре и динамике радиационных поясов Земли.

Третья глава посвящена теоретическому исследованию переноса захваченных частиц под действием геомагнитных возмущений. Найдено электрическое поле, индуцируемое возмущением, решены уравнения дрейфа частиц и определен коэффициент диффузии. Изучены различные стационарные и нестационарные процессы переноса частиц в магнитосфере.

Приложения теории переноса к интерпретации свойств радиационных поясов рассмотрены в главе четвертой. Показано, что протоны с энергиями менее 30 МэВ возникают в магнитосфере за счет бетатронного ускорения при переносе с границы. Дано объяснение диффузионных волн быстрых электронов.

В пятой главе исследована граница устойчивости радиационных поясов и показано, что протонный пояс либо устойчив, либо слабо неустойчив. Электронные интенсивности близки к границе устойчивости, а утечки электронов обусловлены сбросом избыточной интенсивности в ионосферу.

Таблиц — 4, иллюстраций — 37, библиография — 156 названий.

Первое издание монографии Б. А. Тверского «Динамика радиационных поясов Земли» вышло в издательстве «Наука» в 1968 году.

## **Предисловие**

За последние годы достигнуты большие успехи в экспериментальном исследовании околоземного пространства. Выяснена структура геомагнитного поля, деформированного солнечным ветром, проведены детальные систематические исследования потоков заряженных частиц различных энергий, начаты исследования спектра электромагнитных колебаний и волн в магнитосфере. Развитие теоретических исследований по физике магнитосферы характеризуется все более широким использованием достижений современной теории плазмы.

Огромный экспериментальный материал показывает, что формирование мощных потоков заряженных частиц высоких энергий в магнитосфере — это прежде всего одно из проявлений сложного комплекса процессов взаимодействия геомагнитного поля с потоками солнечной плазмы. В области сравнительно небольших энергий ( $\lesssim 10$  кэВ) существенная роль принадлежит также чисто земным процессам (электростатическим полям, порождаемым ионосферными ветрами, а также электромагнитному излучению грозových разрядов и ионосферной турбулентности).

Создание полной теории динамики магнитосферы в настоящее время сталкивается с рядом принципиальных трудностей. Можно лишь надеяться, что, когда будут выполнены детальные измерения электростатических и электромагнитных полей в околоземном пространстве, на этой основе удастся построить полуфеноменологическую теорию динамики заряженных частиц. Вместе с тем, решение некоторых отдельных проблем вполне возможно уже в настоящее время. Сюда относится, в частности, вопрос о происхождении мощных потоков заряженных частиц с энергиями  $\gtrsim 100$  кэВ — радиационных поясов Земли.

Как известно, в солнечном ветре частицы таких энергий отсутствуют. С другой стороны, имеющиеся данные об электромагнитных полях показывают, что ускорение до таких энергий за счет различных статистических и ударных механизмов невозможно. Наконец, распад нейтронов альbedo космических лучей явно недостаточен для создания наблюдаемых потоков частиц. Единственная возможность ускорения частиц радиационных поясов сводится, следовательно, к адиабатическому ускорению при переносе в область более сильного поля.

Оценки показывают, что при энергиях  $\lesssim 10$  кэВ весьма эффективный перенос обусловлен электрическими полями ионосферных ветров. Однако при больших энергиях (и, соответственно, больших скоростях магнитного дрейфа) данный эффект приводит лишь к небольшим адиабатическим вариациям дрейфовых орбит частиц. В этом случае значительно более эффективен механизм переноса, указанный Паркером, — дрейф в электрических полях, возникающих при вынужденных колебаниях границы магнитосферы во время геомагнитных возмущений.

За последние годы эта концепция интенсивно развивалась учеными ряда стран и привела к объяснению и предсказанию многих свойств радиационных поясов Земли. Многочисленные экспериментальные подтверждения данной теории позволяют надеяться, что основной механизм ускорения частиц поясов выяснен.

Второй важной проблемой теории поясов является механизм утечек. Этот вопрос тесно связан с устойчивостью зон повышенной радиации. Здесь также был достигнут существенный прогресс.

Таким образом, в настоящее время оформилась определенная совокупность теоретических представлений, которая дает внутренне-непротиворечивое объяснение процессов ускорения и гибели частиц в радиационных поясах и имеет множество прямых и косвенных подтверждений. Данная монография посвящена систематическому изложению этой теории.

Первые две главы посвящены обзору экспериментальных данных и основываются на работах, опубликованных до середины 1966 г. Цель обзора сводится к характеристике современного состояния знаний о физических условиях в магнитосфере Земли и, более подробно, о радиационных поясах. Поэтому многие результаты, сыгравшие в свое время важную роль, но впоследствии полностью перекрытые дальнейшими исследованиями, не рассматриваются. Основное внимание уделено вопросам, необходимым для понимания физики радиационных поясов, в частности явлениям в районе плоскости экватора, где содержится основной запас частиц.

В гл. III развивается общая теория переноса. В гл. IV полученные результаты прилагаются к объяснению наблюдаемых свойств поясов радиации. Теория устойчивости поясов рассмотрена в пятой главе. Главы III–V написаны в основном по материалам оригинальных исследований автора.

В заключение пользуюсь случаем выразить самую сердечную признательность С. Н. Вернову, А. А. Веденову, М. А. Леонтовичу, Л. П. Питаевскому, Р. З. Сагдееву, В. А. Троицкой и Д. А. Франк-Каменецкому за ряд ценных советов при подготовке рукописи к печати.

*Б. А. Тверской*



## Глава I

### **Физические условия в магнитосфере Земли**

#### **§ 1. Введение**

Со времени известных работ Штёрмера, Биркеланда и Чепмена по теории полярных сияний и магнитных бурь проблема воздействия корпускулярного излучения Солнца на Землю стала одним из центральных направлений геофизики. Особенно быстро развитие этих исследований началось с 1957 г., когда благодаря созданию мощных ракет появилась возможность непосредственного изучения физических процессов в космическом пространстве. Примерно в то же время в связи с термоядерными исследованиями были разработаны основы физики плазмы. В последние годы наметилась тенденция к синтезу достижений высотного эксперимента и теории плазмы, в результате чего постепенно возникает стройная физическая картина явлений, протекающих в околоземном пространстве.

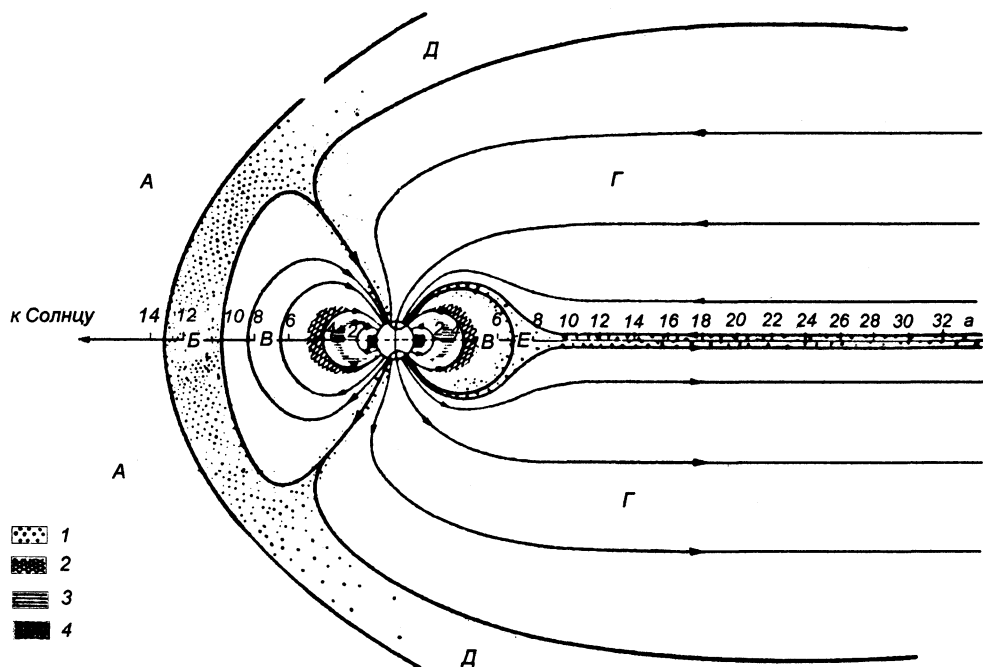
На рис. 1 и 2 представлена схема магнитосферы Земли, построенная в основном по экспериментальным данным. Сечение магнитосферы плоскостью, проходящей через ось геомагнитного диполя и линию Земля—Солнце, изображено на рис. 1, а экваториальное сечение — на рис. 2. Рисунки построены с примерным соблюдением реальных пропорций. Как видно из рисунков, имеется шесть характерных областей ( $A-E$ ) с различными свойствами. Границы между этими областями изображены жирными линиями и (за исключением границы между районами  $B$  и  $D$ ) являются весьма резкими.

Область  $A$  — это поток невозмущенной солнечной плазмы (солнечный ветер). Плотность частиц в потоке, как правило,  $\sim 10 \text{ см}^{-3}$ , направленная скорость  $\sim 300\text{--}700 \text{ км/с}$ , а хаотические скорости значительно меньше. Поток несет вмороженное магнитное поле напряженностью в несколько гамм ( $1\gamma = 10^{-5} \text{ Гс}$ ). Скорость потока во много раз больше альвеновской скорости.

При обтекании геомагнитного поля формируется ударная волна. При переходе солнечной плазмы через ударную волну возрастают хаотические скорости частиц, а магнитное поле турбулизуется. Вблизи дневной границы магнитосферы фронт волны перпендикулярен или почти перпендикулярен скорости потока, и эффект термализации особенно велик. Поэтому вблизи линии Земля—Солнце на дневной стороне возникает область горячей плазмы (область  $B$ ).

По мере удаления от Земли ударная волна становится косою и переходит в конус Маха. Диссипация падает, и область  $B$  постепенно переходит в область  $D$ , где плазменный поток по своим свойствам близок к невозмущенному солнечному ветру.

Возмущенный солнечный ветер деформирует геомагнитное поле и обжимает его в некоторой полости, которую называют *магнитосферой*. Магнитосфера распадается на три характерных района. В области  $B$  силовые линии геомагнитного поля качественно подобны дипольным, а дрейфовые орбиты частиц замыкаются в пределах магнитосферы. Этот район заполнен корпускулярной радиацией, средняя энергия



**Рис. 1.** Схема магнитосферы Земли (меридиональное сечение). 1 — самый внешний пояс; 2 — максимум внешней электронной зоны; 3 — максимум протонного пояса; 4 — внутренний электронный пояс

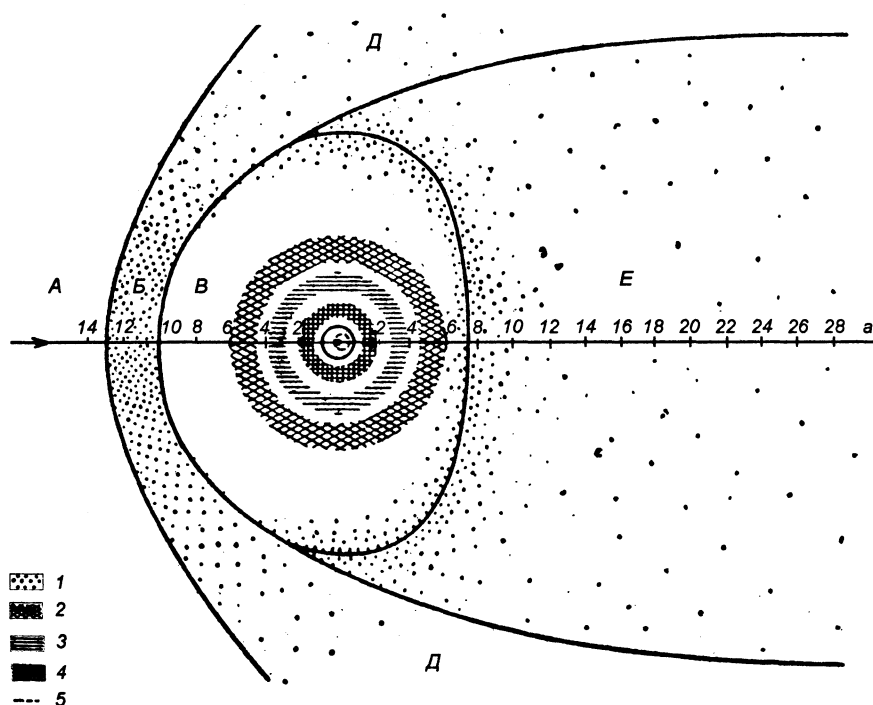
которой значительно выше, чем вне магнитосферы. Область *В* называют *областью захваченной радиации*.

Граница области захваченной радиации проектируется вдоль силовых линий в виде двух узких колец на поверхности Земли (по одному в северном и южном полушариях). Вдоль этих колец, как правило, в ионосфере горят полярные сияния. Области, ограниченные кольцами полярных сияний и содержащие магнитные полюсы Земли, называются *полярными шапками*.

Силовые линии, пронизывающие полярные шапки, замыкаются на ночной стороне магнитосферы на очень больших расстояниях от Земли. В исследованной до сих пор области магнитосферы (до 30 земных радиусов) никакой тенденции к замыканию не наблюдалось. Вблизи плоскости экватора силовые линии идут параллельно этой плоскости и имеют противоположное направление в северном и южном полушариях. Области с полем противоположных знаков разделены узким слоем, в котором напряженность ниже предела чувствительности наиболее точных магнитометров, применявшихся до настоящего времени ( $0,25\gamma$ ).

Область *Г*, в которой силовые линии вытянуты в сторону от Солнца, называют *хвостом магнитосферы*, а тонкий слой *Е* — *нейтральным слоем*.

Распределение быстрых частиц в околоземном пространстве характеризуется рядом максимумов, охватывающих Землю (*радиационных поясов*). Хотя понятие радиационного пояса прочно вошло в научный обиход, общепринятой классификации поясов пока не существует, что приводит иногда к недоразумениям. В настоящее вре-



**Рис. 2.** Схема магнитосферы Земли (экваториальное сечение). Обозначения 1–4 те же, что и на рис. 1; 5 — кольцо полярного сияния

мя, когда экспериментально исследован практически весь спектр частиц, появилась возможность провести более четкую классификацию радиационных поясов.

С нашей точки зрения представляется разумным выделить четыре основные зоны. Во-первых, это — *самый внешний пояс радиации*, который на дневной стороне совпадает с областью термализованной турбулентной плазмы *Б*, а на ночной стороне переходит в нейтральный слой *Е*, также заполненный горячей плазмой. Вдоль силовых линий, отделяющих область захваченной радиации от хвоста магнитосферы, частицы самого внешнего пояса доходят до ионосферы и попадают в кольца полярных сияний. Средние энергии частиц самого внешнего пояса  $\sim 1$  кэВ.

Несколько ближе к Земле расположен *внешний электронный пояс*, максимум интенсивности которого находится (в плоскости экватора) на расстоянии от 4 до 5 земных радиусов  $a$  от центра Земли. Электроны с энергиями  $\sim 50$  кэВ образуют довольно сильно размытый максимум, но уже при энергиях 200 кэВ и выше наблюдается весьма острый пик интенсивности.

На расстоянии 3–4 $a$  от центра Земли потоки электронов минимальны. В этом же районе лежит абсолютный максимум протонного пояса. *Протонный пояс* — единое образование. Начиная от границы области захваченной радиации, наблюдаются большие потоки протонов с энергиями свыше 100 кэВ. Вплоть до геоцентрического расстояния 3,5 $a$  в плоскости экватора по мере приближения к Земле нарастают как средняя энергия, так и интегральный поток протонов. На меньших геоцентрических

расстояниях средняя энергия продолжает расти и достигает вблизи Земли десятков МэВ. Однако интегральный поток убывает.

На геоцентрических расстояниях меньше  $3a$  вновь начинает возрастать интенсивность электронов с энергиями  $\sim 100$  кэВ и больше. Это образование естественно назвать *внутренним электронным поясом*. В настоящее время эта зона в значительной степени заполнена электронами от высотных ядерных взрывов.

Вне экваториальной плоскости конфигурация поясов в первом приближении определяется ходом магнитных силовых линий. Каждый из поясов имеет тонкую структуру, соответствующую различным участкам спектра.

Описанная выше картина соответствует спокойному солнечному ветру, характеристики которого остаются стабильными в течение длительного времени ( $\gtrsim$  нескольких суток). Возмущения ветра, связанные с солнечными вспышками или с прохождениями через центр Солнца активных областей (источников интенсивных корпускулярных потоков), приводят к вариациям радиационных поясов. Сильные возмущения ветра вызывают *магнитные бури*.

В настоящее время природа радиационных поясов в значительной степени выяснена. Ночная сторона самого внешнего пояса, скорее всего является продолжением пограничного слоя между геомагнитным полем и солнечным ветром в глубь магнитосферы. Интенсивность в областях захваченной радиации обусловлена диффузией частиц из самого внешнего пояса под действием геомагнитных возмущений. Частицы при этом переносятся в область более сильного поля и ускоряются вследствие сохранения адиабатических инвариантов.

По мере приближения к Земле скорость переноса быстро падает и начинают играть роль различные механизмы потерь. В результате формируются внутренние границы поясов. По-видимому, можно утверждать, что потери протонов обусловлены в основном ионизационным торможением. Утечка электронов происходит гораздо быстрее и связана с рассеянием на электромагнитных волнах в магнитосфере. Есть основания считать, что такие волны раскачиваются вследствие неустойчивости радиационных поясов.

Экспериментальный материал о физических явлениях в магнитосфере столь обширен, что сколько-нибудь полный обзор этих вопросов может быть дан лишь большим авторским коллективом. Однако задача значительно упрощается, если мы ограничимся рассмотрением только таких явлений (точнее говоря, только таких характеристик), которые представляют интерес с точки зрения возможности ускорения частиц до наблюдаемых в радиационных поясах энергий. Критерием отбора должны быть общие соображения о различных типах ускорительных механизмов в плазме.

По-видимому, любой из этих механизмов может быть сведен к одному из трех классов: адиабатическому, статистическому или ударному ускорению.

Адиабатическое ускорение основано на сохранении адиабатических инвариантов частиц при медленных изменениях поля. Так как геомагнитное поле в среднем постоянно, адиабатическое ускорение может играть роль в формировании поясов лишь при наличии переноса частиц поперек дрейфовых оболочек. При этом частицы, точки отражения которых смещаются к Земле (т. е. в область более сильного поля), будут ускоряться.

Перемещение частиц поперек дрейфовых оболочек может иметь место лишь при наличии электрического поля. При этом поле должно быть асимметричным по долготе и изменяться с характерным временем, которое меньше или порядка



периода магнитного дрейфа частицы на расстояние порядка пространственного масштаба электрического поля.

Первое условие вытекает из сохранения обобщенного момента импульса в аксиально-симметричных полях, а второе — из адиабатической инвариантности дрейфовой оболочки. Таким образом, из общих соображений можно существенно конкретизировать требования, при которых имеют место перенос и адиабатическое ускорение. В настоящее время теория переноса получила широкое распространение и позволила объяснить многие свойства поясов [1–15].

Статистическое ускорение происходит тогда, когда амплитуды электромагнитных и плазменных колебаний существенно превышают уровень тепловых шумов. Частным случаем статистического ускорения является фермиевский механизм (отражение частиц от движущихся магнитных неоднородностей). Статистическое ускорение (в зависимости от частоты волн) может проявляться либо во флуктуациях инварианта продольного действия при сохранении магнитного момента, либо в нарушении обоих инвариантов. В геомагнитной ловушке процессы первого типа должны были бы привести к концентрации высокоэнергичных частиц на малых высотах, чего в действительности не наблюдается. Имеется ряд других данных (прежде всего о спектре гидромагнитных колебаний на частотах 1–10 Гц), также указывающих на отсутствие фермиевского ускорения в поясах.

Если рассматривать только возможные причины ускорения, то можно отбросить практически все типы волн в плазме с частотами ниже ленгмюровской. Фазовые скорости этих волн  $u_f = \omega/k$  много меньше скорости света, и поэтому из уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \text{ следует, что амплитуда магнитного поля } H \approx \frac{c}{u_f} E \gg E \text{ (} E \text{ —}$$

амплитуда электрического поля). Исключение составляет лишь случай продольных или почти продольных колебаний ( $||\mathbf{kE}|| \ll kE$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор). Изменение энергии частицы связано только с электрическим полем. Если обозначить через  $l_{\text{эф}}$  эффективную длину резонансного взаимодействия частицы с волной, то изменение энергии  $\delta\epsilon$  составит  $\sim eEl_{\text{эф}}$ . Изменение ориентации импульса (рассеяние) вызывается и электрическим, и магнитным полем, причем электрическая сила  $f_E = eE$ , а сила Лоренца  $f_H \sim e\frac{v}{c}H$ . Если скорость частицы  $v \gg u_f$ , то сила Лоренца, вызывающая чистое рассеяние, много больше электрической силы. Поэтому время рассеяния частицы на угол  $\sim \pi$  много меньше времени, за которое вероятная флуктуация энергии  $\Delta\epsilon$  станет порядка  $\epsilon$ . Следовательно, при  $v > u_f$  частицы будут сбрасываться в ионосферу без существенных изменений энергии.

Электростатические волны типа ионного звука являются слишком медленными. Поэтому наиболее вероятной причиной статистического ускорения (если оно имеет место в радиационных поясах) могут быть либо ленгмюровские колебания, либо космическое радиоизлучение. Однако последнее имеет слишком малую мощность.

Гипотеза о статистическом ускорении электронов радиационных поясов плазменными колебаниями была выдвинута в [16]. При наличии экспериментальных или теоретических данных об эффективной температуре плазменных волн в магнитосфере можно оценить роль таких процессов в формировании зон радиации. Следовательно, при анализе физических условий в магнитосфере с точки зрения ускорительных процессов необходимо специально рассмотреть этот тип волн.

Хотя, как отмечалось выше, колебания с частотами ниже плазменной не могут эффективно ускорять частицы, их роль в динамике поясов, по-видимому, весьма велика, поскольку на волнах такого типа происходит рассеяние частиц [17–20]. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим данные и об этих волнах.

Наконец, третьим классом мыслимых механизмов ускорения являются бесстолкновительные ударные волны. При сильно нелинейных движениях частицы плазмы приобретают большие направленные скорости и одновременно формируются неустойчивые конфигурации (как правило, возникают пучки). При рассеянии частиц на развивающихся электромагнитных или электростатических колебаниях направленные скорости частично хаотизируются, что и приводит в конечном счете к необратимому разогреву. Подчеркнем, что неустойчивость является необходимым элементом механизма нагрева. Во многих работах это обстоятельство не учитывается и ударными волнами называют решения чисто динамических задач, в которых ускорение обратимо (см., например, [21]). Определяющая роль неустойчивости при ударном нагреве была выяснена в работах Р. З. Сагдеева, подробное изложение которых см. в [22].

В настоящее время принципиальная возможность ударного нагрева не вызывает сомнений. Бесстолкновительные ударные волны получены в лабораторных экспериментах и обнаружены в космосе. Для некоторых типов волн удастся получить строгие решения уравнений, в которых последовательно учитывается эффект неустойчивости [23].

Однако в пределах радиационных поясов сильные ударные волны (с числом Маха  $\gtrsim 1,5$ ) отсутствуют. Этот факт подтверждается многими данными наземных и высотных измерений и, в конечном счете, объясняется большой протяженностью передних фронтов возмущений солнечного ветра. Ширина такого фронта  $\sim (2-10) \cdot 10^{10}$  см, что при скорости  $\sim 10^8$  см/с приводит к временам нарастания давления на магнитосферу порядка нескольких минут. Основной период собственных гидромагнитных колебаний магнитосферы имеет тот же порядок величины. Поэтому сжатие происходит адиабатический. Адиабатичность сжатия проявляется и в том, что амплитуды собственных колебаний, вызванных деформацией поля, много меньше величины статического возмущения из-за сдвига границы магнитосферы к Земле.

Указанный факт выдвигает важную проблему в теории солнечного ветра — объяснение возмущений с широким фронтом. Давление плазмы в невозмущенном солнечном ветре много меньше магнитного давления. Поэтому, согласно [22], ширина фронта должна быть порядка  $c/\Omega_0$ , где  $\Omega_0$  — ионная плазменная частота (именно такова ширина фронта стоячей ударной волны, возникающей при обтекании магнитосферы солнечным ветром). В то же время оказывается, что в теории радиационных поясов ударный нагрев не играет существенной роли.

Таким образом, из общих соображений о характере ускорительных процессов в плазме можно значительно сузить круг явлений, представляющих первоочередной интерес. Эти рамки становятся еще более жесткими при анализе динамики самих радиационных поясов. Следует, однако, иметь в виду, что такой подход к проблеме имеет до некоторой степени субъективный характер и оправдан лишь при выборе направления более детальных исследований. Решающими критериями истинности той или другой концепции остаются обоснованность исходных предпосылок, количественное объяснение имеющихся данных и подтверждение вытекающих из теории следствий экспериментом.

В следующих параграфах гл. I излагаются современные представления о физических условиях в магнитосфере с учетом приведенных соображений.

## § 2. Геомагнитное поле

Геомагнитное поле является основным фактором, благодаря которому возможно существование радиационных поясов, так как оно удерживает в течение длительного времени захваченные заряженные частицы. Источником поля являются токи в земном ядре. На больших расстояниях поле сильно деформировано солнечным ветром и обжато в некоторой вытянутой на ночной стороне в направлении от Солнца полости. Помимо токов в ядре Земли и на границе магнитосферы, в геомагнитное поле дают вклад ионосферные токи и, возможно, гипотетический кольцевой ток в районе внешней радиационной зоны, существование которого предполагается для объяснения некоторых явлений во время магнитных бурь.

В отдельные периоды времени, продолжительность которых в годы минимума солнечной активности достигает примерно недели, солнечное корпускулярное излучение весьма стабильно. По-видимому, при этом вариации формы границы магнитосферы обусловлены только вращением магнитной оси Земли относительно географической.

Ионосферные токи, обусловленные трением между электронами или ионами и ветрами нейтральных частиц, имеют плавный суточный ход, связанный в основном с изменениями степени ионизации при изменениях освещенности. Величина суточной вариации поля, фиксируемой при таких условиях на каждой магнитной обсерватории, составляет  $\sim 20\text{--}50\gamma$ . Кольцевой ток либо отсутствует, либо имеет постоянную величину.

В такие спокойные периоды граница магнитосферы почти всегда находится на определенном расстоянии от Земли (во всяком случае, по данным 1961–1963 гг.). Лобовая точка, примерно соответствующая пересечению границы магнитосферы с линией Земля—Солнце, отстоит от центра Земли на 10–11 земных радиусов  $a$ . Стабильность границы в магнитно-спокойные дни показывает, что солнечный ветер имеет постоянную составляющую.

Рассмотрим экспериментальные и теоретические данные о структуре геомагнитного поля в условиях спокойного солнечного ветра. Наиболее подробное исследование формы границы и особенностей поля на больших расстояниях было проведено на спутнике IMP-1 с апогеем  $\sim 200\,000$  км от центра Земли ( $\sim 30a$ ) [24, 25]. Магнитометры, установленные на спутниках серии «Электрон» и на «Эксплорер-XII» и «Эксплорер-XIV», также дали ценную информацию о геомагнитном поле вдали от Земли [26–28].

Из теории солнечного ветра [41] следует, что вследствие радиального расширения солнечная плазма становится сверхзвуковой и на орбите Земли скорость направленного движения частиц много больше теплового разброса. Поэтому (если к движению солнечной плазмы применима гидродинамика) при обтекании магнитосферы солнечным ветром должны возникать головная ударная волна и конус Маха. На это обстоятельство было указано в теоретических работах [29, 30]. В районе лобовой точки ударная волна расположена вблизи от границы магнитосферы (отстоит от нее на  $2\text{--}3a$ ) и поэтому давление на границу примерно соответствует удвоенному потоку импульса в солнечном ветре (удвоение обусловлено отражением

частиц от границы). В области конуса Маха ударная волна является слабой и давление на границу также определяется удвоенной компонентой потока импульса невозмущенного ветра в направлении нормали к границе.

Поэтому форма полости, в которой локализовано геомагнитное поле, даже при наличии ударной волны приближенно определяется решением уравнения Лапласа для магнитного потенциала  $U$  с дипольной особенностью в нуле и с граничным условием

$$\frac{1}{8\pi}(\nabla U)_s^2 = 2mn_0v_0^2 \sin^2 \psi, \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса протона,  $n_0$  и  $v_0$  — плотность и скорость солнечного ветра в невозмущенной области,  $\psi$  — угол между направлением ветра и касательной плоскостью к границе [29].

Такая задача изящно решается с помощью теории функций комплексной переменной в двумерном случае (аналогом диполя здесь является двухпроводная линия с антипараллельными токами) [29]. В настоящее время разработан ряд приближенных методов решения трехмерной задачи о форме границы с применением быстродействующих счетных машин. Хотя строгое обоснование этих методов не было проведено, сопоставление результатов численного решения двумерной задачи с точным решением подтверждает надежность такого подхода.

Численное исследование было проведено для несколько более общего граничного условия:

$$\frac{1}{8\pi}(\nabla U)_s^2 = 2mn_0v_0^2 \sin^2 \psi + P_0, \quad (2.2)$$

где к динамическому давлению прибавлено постоянное статическое давление  $P_0$ . Решения с  $P_0 \neq 0$  приводят к замкнутым моделям магнитосферы, при  $P_0 = 0$  цилиндрический хвост простирается на ночной стороне до бесконечности.

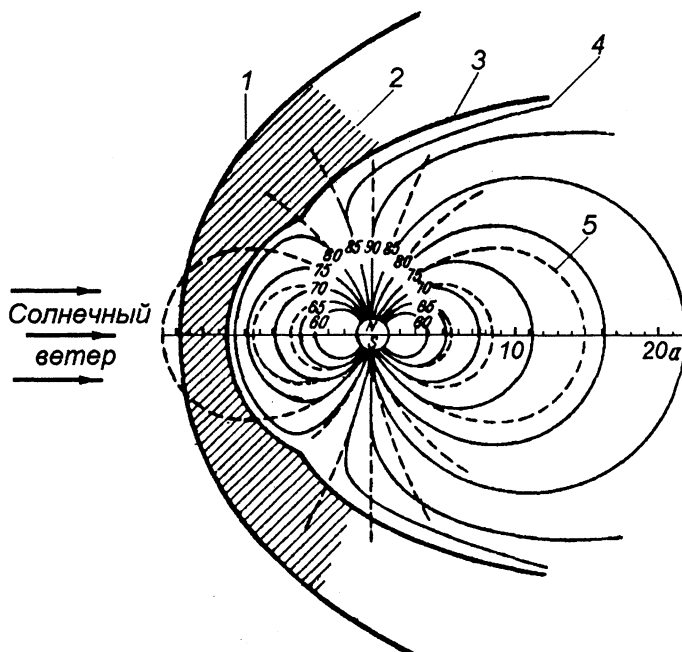
На рис. 3 представлены результаты проведенного в [31, 32] расчета формы границы и поля при  $P_0 = 0$  в плоскости, проходящей через магнитную ось и линию Земля—Солнце. Отметим, что поскольку при  $P_0 = 0$  параметры задачи сводятся к  $m, n_0, v_0$  и  $M$  (магнитный момент Земли), единственной величиной с размерностью длины и разумным масштабом, которую можно составить из этих констант, является

$$\Lambda' = \left( \frac{M}{mv_0^2 n_0} \right)^{1/6}. \quad (2.3)$$

По порядку величины  $\Lambda'$  соответствует расстоянию от диполя до лобовой точки  $\Lambda$ . Такие параметры, как межчастичное расстояние ( $n_0^{-1/3}$ ), ширина фронта ударной волны и ширина пограничного слоя между плазмой и полем, в первом приближении не влияют на размер и форму магнитосферы. Поэтому если в качестве единицы длины выбрать  $\Lambda$ , решение должно иметь универсальный характер.

Проведенный в [32] сферический анализ показал, что при разумных значениях  $\Lambda$  (7–11 $a$ , где  $a$  — радиус Земли) в сферической области с радиусом  $\Lambda$  поле практически определяется двумя гармониками:

$$U = -h_0 \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^3 R \cos \theta + h_1 \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^4 R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \quad (2.4)$$



**Рис. 3.** Ход силовых линий геомагнитного поля в плоскости, проходящей через магнитную ось и линию Земля—Солнце, рассчитанный на основе граничного условия (2.1) (упругое отражение частиц солнечного ветра от границы магнитосферы). 1 — ударная волна; 2 — область термализованной солнечной плазмы; 3 — граница магнитосферы; 4 — силовые линии деформированного и 5 — дипольного поля. Указаны геомагнитные широты, на которых соответствующие силовые линии пересекают поверхность Земли

где  $R, \theta, \varphi$  — сферические координаты с началом в точке диполя, полярной осью вдоль магнитной оси и началом отсчета  $\varphi$  на полуденном меридиане. При этих расчетах не учитывались несовпадение магнитной и географической осей и наклон последней к плоскости эклиптики. Однако эти эффекты, по-видимому, дают лишь малые поправки к (2.4).

Потенциал (2.4) записан в форме, в которой вместо  $\Lambda'$  введен параметр  $\Lambda$  — расстояние от диполя до лобовой точки;  $\Lambda, \Lambda_0$  и  $R$  измеряются в земных радиусах  $a$ . Через  $\Lambda_0 \approx 10,8$  обозначено среднее положение границы. При такой записи параметры  $h_0$  и  $h_1$  описывают среднее значение и долготную вариацию  $\theta$ -компоненты поля внешних токов у экватора Земли. Эти величины для модели [31, 32] составляют соответственно  $25\gamma$  и  $2\gamma$  ( $\Lambda = \Lambda_0$ ). В лобовой точке при  $\Lambda = \Lambda_0$  возмущение составляет  $\approx 45\gamma$ . Вклад остальных гармоник при  $R \lesssim \Lambda$  почти на порядок меньше.

Предположение о быстрой сходимости потенциала поля внешних токов в области  $R \lesssim \Lambda$  было выдвинуто в [5–7] и использовано для исследования движения частиц радиационных поясов при колебаниях границы магнитосферы. На этой основе было построено уравнение переноса, использованное в наших работах [8–12], а также в [15]. Это предположение значительно упрощает расчеты. Поскольку многие экспериментальные данные подтверждают основанные на представлении потенциала в виде (2.4) теоретические выводы, можно считать, что преобладание первых

двух гармоник является реальным фактом. Однако численные значения констант, полученные в [31, 32], неверны. Более того, истинная структура магнитосферы очень сильно отличается от описанных выше теоретических моделей.

Хотя многие важные результаты о структуре магнитосферы были получены еще в 1959 г., основной вклад в решение этой проблемы внесли исследования на спутнике IMP-1 [24, 25]. На этом спутнике с апогеем  $\sim 30a$  и с малым наклоном линии апсид<sup>1)</sup> к плоскости эклиптики были, в частности, установлены особо чувствительные магнитометры. Один из них (так называемый рубидиевый магнитометр), основанный на принципах квантовой электроники, позволял с высокой точностью измерять зеемановское расщепление спектральных линий паров рубидия. Отсюда определялась с абсолютной ошибкой  $\pm 0,25\gamma$  величина напряженности поля  $H$ . Кроме того, использовались магнитно-насыщенные магнитометры, с несколько меньшей точностью измерявшие три компоненты вектора напряженности. Интервал между двумя последовательными измерениями составлял  $\sim 1$  с.

Вначале спутник был запущен на дневную сторону магнитосферы, затем его апогей вследствие движения Земли вокруг Солнца постепенно перешел на ночную сторону. Измерения на дневной стороне хорошо подтверждают изложенные выше теоретические результаты. Вблизи апогея спутник, как правило, фиксирует стабильный холодный солнечный ветер с небольшим регулярным магнитным полем напряженностью около  $5\gamma$ . При подходе к границе магнитосферы спутник пересекает сначала фронт стоячей ударной волны, ширина которого составляет несколько сотен километров. При переходе через фронт магнитное поле турбулизуется, а средняя величина его возрастает в 2–3 раза. Плазменные анализаторы, установленные на том же спутнике, фиксируют термализацию солнечной плазмы на фронте волны (хаотические скорости частиц становятся того же порядка, что и направленная). Возникают значительные ( $\sim 2 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>) потоки протонов с энергиями  $\gtrsim 10$  кэВ [33].

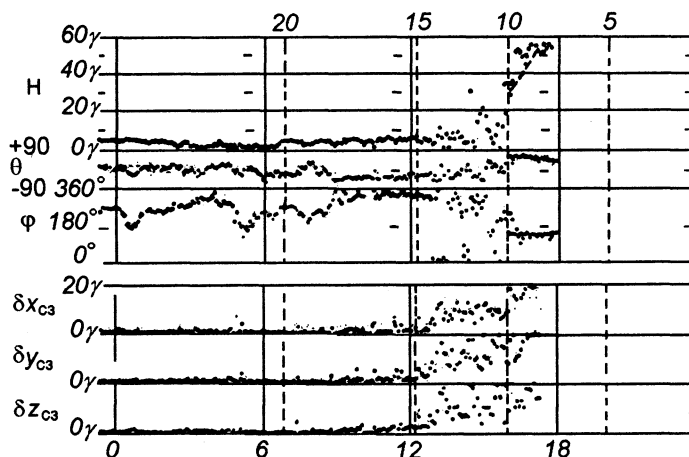
При дальнейшем приближении к Земле спутник вновь пересекает резкую (шириной  $< 1000$  км) границу, на которой средняя напряженность поля возрастает примерно от 10 до  $60\gamma$ . Поле еще заметно флуктуирует, однако здесь уже возможно говорить не только о средней величине, но и о среднем направлении, которое медленно меняется при дальнейшем движении спутника. Этот переходный слой и является границей магнитосферы.

На рис. 4 приведены типичные показания магнитометров, полученные при одном из прохождений спутника через указанные области вблизи лобовой точки [24]. В верхней части рисунка отложены средние за 10 секунд значения напряженности поля и углов между полем и нормалью к плоскости эклиптики ( $\theta$ ), а также между проекцией поля на эту плоскость и линией Земля—Солнце ( $\varphi$ ) в зависимости от геоцентрического расстояния. Нижний график дает среднеквадратичную флуктуацию каждой из трех компонент поля за десятисекундный интервал. На рисунке отчетливо видны область спокойного ветра, ударная волна, переходная турбулентная область и граница магнитосферы.

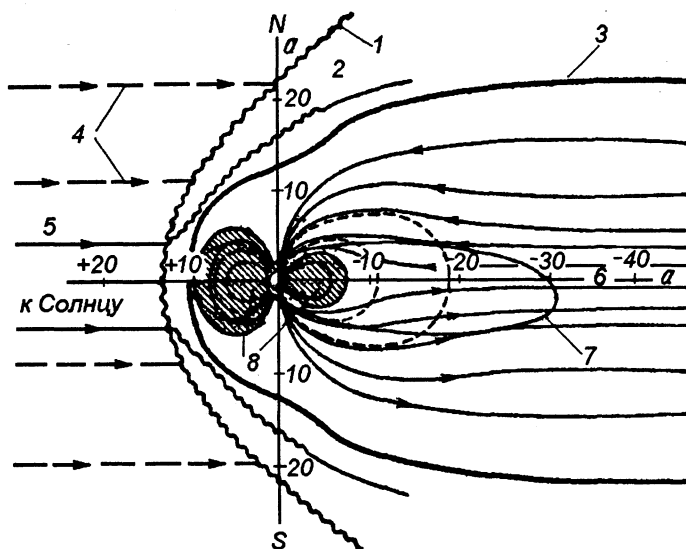
Итоговая картина положения ударной волны и границы магнитосферы вблизи плоскости эклиптики по данным многих витков изображена на рис. 5 [25].

Авторы провели сравнение результатов с теоретическими профилями, полученными путем численных расчетов в [34] (границы магнитосферы) и [35] (ударная

<sup>1)</sup> Линия, проходящая через точки апогея и перигея, т. е. большая полуось эллиптической орбиты.



**Рис. 4.** Пример магнитограммы, полученной на спутнике IMP-1. По оси абсцисс отложены мировое время в часах (внизу) и геоцентрическое расстояние  $R$  в земных радиусах (вверху). Отчетливо видны фронт ударной волны при  $R = 14a$  и граница магнитосферы при  $R = 10a$



**Рис. 5.** Меридиональное сечение магнитосферы по данным IMP-1. 1 — ударная волна; 2 — область термализованной плазмы; 3 — граница магнитосферы; 4 — скорость солнечного ветра; 5 — межпланетное магнитное поле; 6 — нейтральный слой; 7 — орбита спутника; 8 — область захваченной радиации

волна). Зазубренность экспериментальных кривых указывает на то, что с изменением мощности солнечного ветра меняется положение границы и ударной волны (временной интервал между соседними точками составляет около двух суток).

Отметим, что полученные в [24, 25] результаты хорошо подтверждают теорию ударных волн в бесстолкновительной плазме [22]. Согласно [22] ширина  $\delta$  фронта ударной волны, распространяющейся под углом  $\Theta$  к магнитному полю ( $\sqrt{m/M} \ll \Theta \ll 1$ ), составляет примерно  $c\Theta/\Omega_0$ , где  $c$  — скорость света,  $m$  и  $M$  — масса электрона и иона,  $\Omega_0 = \frac{4\pi e^2 N}{M}$  — ионная плазменная частота (точнее,  $\delta$  порядка нескольких  $c\Theta/\Omega_0$ ; см. [22, с. 68–69]). При параметрах солнечного ветра  $N = 1\text{--}10\text{ см}^{-3}$ ,  $\Theta \approx 1/3$  эта оценка приводит к  $\delta \sim 10^7$  см.

Ширина пограничного слоя между солнечной плазмой и геомагнитным полем соответствует теоретическим расчетам для электрически нейтрального слоя, в котором поле разделения зарядов, обусловленного различием ларморовских радиусов электронов и ионов, компенсируется притоком холодных электронов [36, 37]. В этом случае ширина слоя будет порядка ионного ларморовского радиуса.

По мере удаления апогея спутника от лобовой точки наблюдался переход головной ударной волны в конус Маха. Мощность волны убывала и постепенно исчезал эффект термализации плазмы. В конце концов, орбита спутника сместилась на ночную сторону и линия апсид вошла в хвост магнитосферы. Подтвердился теоретический результат, согласно которому граница магнитосферы на ночной стороне должна иметь почти цилиндрическую форму. Однако структура поля оказалась совершенно отличной от ожидаемой. Оказалось, что цилиндрический хвост рассеян пополам узким слоем горячей плазмы, лежащим примерно (но не строго) в плоскости эклиптики. Силовые линии идут почти параллельно слою, но по разные стороны от него поле имеет противоположные знаки. В пределах слоя поле меньше  $0,25\gamma$ , (порог чувствительности рубидиевого магнитометра). Наименьшее геоцентрическое расстояние, на котором наблюдался нейтральный слой, составляло  $9a$ . Со стороны больших расстояний никакой тенденции к замыканию хвоста магнитосферы не наблюдалось.

Схема строения магнитосферы в плоскости полуденного и полуночного меридианов приведена на рис. 5 [25]. У поверхности нейтрального слоя магнитное поле составляет приблизительно  $\pm 20\gamma$  и медленно (примерно как  $1/R$ ) убывает с расстоянием. Ширина слоя около 600 км. Магнитное давление уравнивается давлением плазмы внутри слоя.

Существуют три точки зрения на природу деформации поля в хвосте. Первая из них объясняет вытягивание силовых линий взаимодействием солнечного ветра с полем у границы магнитосферы [38–40]. Образование нейтрального слоя с горячей плазмой приписывается джоулеву разогреву при аннигиляции антипараллельных полей вследствие неустойчивости. Две другие гипотезы основаны на различных предположениях о прорыве солнечной плазмы в хвост магнитосферы. Одна из возможностей прорыва связана с тем, что в моделях типа [31, 32] дрейфовые орбиты частиц выходят из хвоста в пограничный слой и поэтому возможно затекание солнечных протонов и электронов в хвост магнитосферы (см. § 5). Этот эффект был указан в [5] и [8]. Нам представляется вероятным, что при достаточно большой прозрачности пограничного слоя, начиная с некоторой критической дрейфовой орбиты, давление плазмы в хвосте может сравняться с давлением в турбулентной зоне. Плазма своим давлением будет вытягивать силовые линии на ночную сторону.

Наконец, третья гипотеза [42–44] связывает прорыв плазмы с так называемыми «нейтральными точками». Точное решение двумерной задачи о форме границы между полем диполя и потоком плазмы показывает, что вблизи некоторой точки



поверхности раздела (в северном и южном полупространстве) происходит ветвление силовой линии, причем ветвление имеет характер излома. При этом магнитное поле в точке ветвления обращается в нуль. В [29] было высказано предположение о том, что через эти нейтральные точки солнечные частицы могут прорываться в магнитосферу. По сути дела, этот эффект является частным случаем механизма, рассмотренного в [5] и [8].

Большую роль в выяснении истинного механизма формирования хвоста магнитосферы должны сыграть дальнейшие высотные исследования, а также модельные эксперименты типа [45] и [48], в которых магнитный диполь обстреливался из плазменной пушки.

Представляет интерес вопрос о существовании в «нейтральном» слое перпендикулярной слою компоненты магнитного поля  $h$ . Согласно [25] напряженность этого поля не превышает  $0,25\gamma$ . Однако маловероятно, что  $h \equiv 0$ . Оценку величины  $h$  можно провести независимо от той или иной концепции о природе «нейтрального» слоя. Достаточно предположить, что давление плазмы в этой переходной области не слишком анизотропно.

Эксперимент [25] показывает, что вплоть до расстояний  $30a$  радиус сечения магнитосферы  $R$  хотя и очень медленно, но продолжает возрастать. Если пренебречь изменением магнитного потока в хвосте за счет замыкания силовых линий через нейтральный слой (ниже будет показано, что это — разумное предположение), то абсолютная величина напряженности поля в северной и южной половинах хвоста будет изменяться по закону

$$H(z) = H_0 \left[ \frac{R(z_0)}{R(z)} \right]^2;$$

здесь  $z$  — координата, отсчитываемая от центра Земли вдоль линии Земля—Солнце;  $z_0 \approx 15a$  — расстояние, начиная с которого можно положить  $\frac{dR}{dz} \delta z \ll \delta z$ , т. е. считать границу близкой к цилиндрической;  $R(z_0) \equiv R_0 \approx 20a$  — радиус хвоста при  $z = z_0$  и  $H_0 \approx 20\gamma$  — поле при  $z = z_0$ .

У границы магнитное давление уравновешивается нормальной компонентой потока импульса солнечного ветра [см. (2.1)]. Очевидно, что

$$\sin \psi \approx \operatorname{tg} \psi = \frac{dR}{dz} \quad (\psi \ll 1).$$

Отсюда

$$\frac{dR}{dz} = \left( \frac{H_0^2}{16\pi m n_0 v_0^2} \right)^{1/2} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2$$

и

$$R = R_0 \left\{ 1 + \left( \frac{H_0^2}{16\pi m n_0 v_0^2} \right)^{1/2} \frac{z - z_0}{R_0} \right\}^{1/3} \quad (2.5)$$

(постоянная интегрирования определяется из условия  $R = R_0$  при  $z = z_0$ ). Магнитное поле в хвосте изменяется по закону

$$H = H_0 \left\{ 1 + \left( \frac{H_0^2}{16\pi m n_0 v_0^2} \right)^{1/2} \frac{z - z_0}{R_0} \right\}^{-2/3} \quad (2.6)$$

и спадает значительно медленнее поля диполя в согласии с результатами [25]. Из (2.6) следует, что полученные результаты сохраняют силу вплоть до расстояний  $\sim 300a$ , на которых поле  $H$  падает до уровня магнитного поля солнечного ветра ( $\approx 5\gamma$ ) и изменяется характер граничного условия.

Оценим теперь величину  $h$  на расстояниях  $\approx 20a$ . Из (2.6) следует, что на границу слоя действует давление  $\frac{H^2}{8\pi}$ , градиент которого при  $z = z_0$  есть

$$|\nabla P| \approx \frac{H_0^2}{6\pi R_0} \left( \frac{H_0^2}{16\pi m n_0 v_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Приравнявая по порядку величины  $|\nabla P|$  плотности  $z$ -компоненты силы Лоренца  $\frac{1}{c} j h$  и учитывая, что  $j \approx \frac{c}{2\pi} \frac{H_0}{\delta}$ , где  $\delta$  — ширина слоя, получаем:

$$h \approx \frac{1}{3} \frac{\delta}{R_0} H_0, \quad (2.8)$$

при  $\delta \approx 600$  км,  $R_0 = 20a \approx 130\,000$  км и  $H_0 = 20\gamma$  величина  $h$  составляет  $\approx 3 \cdot 10^{-2}\gamma$ , что не противоречит результатам [25] ( $h \leq 0,25\gamma$ ).

Магнитный поток  $\Phi$  через северную (или южную) часть хвоста по модулю равен  $\frac{1}{2\pi R_0^2 H_0} \approx 5 \cdot 10^{16}$  Мкс. При  $h = 3 \cdot 10^{-2}\gamma$  и средней ширине слоя  $\approx 2R_0 = 40a$  такой поток замыкается на расстоянии  $\approx 10^{12}$  см (свыше  $10^3 a$ ), что подтверждает наше исходное предположение о пренебрежимо малом изменении потока за счет замыкания через нейтральный слой на расстояниях  $\sim z_0$  от Земли. Величина  $\sim 10^3 a$  характеризует вероятную длину хвоста магнитосферы при условии существования «нейтрального» слоя на больших расстояниях.

Для многих вопросов физики магнитосферы, и в том числе для теории радиационных поясов Земли, необходимо точно знать положение и структуру внутренней границы нейтрального слоя. Есть основания считать, что эта граница является резкой. Так, например, естественно предположить, что полярные сияния вызываются прорывом мягких электронов к Земле через нейтральный слой<sup>2)</sup>. Анализ данных МГГ (синхронное фотографирование ночного неба мировой сетью станций) показал, что полярные сияния наблюдаются одновременно на всех долготах в северном и южном полушариях. В то же время ширина светящихся областей, как правило,  $\sim 1^\circ$  широты, а иногда измеряется расстояниями  $\sim 1$  км. Если сияние является проекцией вдоль силовых линий внутренней границы «нейтрального слоя» на поверхность Земли, то узость сияния указывает на малую ширину этой границы. К такому же заключению приводит и анализ структуры радиационных поясов (§ 5).

Данные о границе нейтрального слоя имеют пока отрывочный характер. Как уже отмечалось, минимальное расстояние, на котором был зафиксирован этот слой на спутнике IMP-1, составляло  $9a$ . На спутнике «Эксплорер-XIV» также было зафиксировано изменение направлений силовых линий вблизи плоскости геомагнитного экватора. В магнитно-спокойные дни переход от перпендикулярного

<sup>2)</sup> Как известно, энергии захваченных в радиационных поясах частиц заведомо недостаточно для возбуждения сияния даже умеренной яркости.

этой плоскости направления к почти параллельному происходил на расстоянии около  $10a$ , при наличии же геомагнитных возмущений граница смещалась до  $8a$  [28].

Учет токов в хвосте магнитосферы существенно сказывается и на характере поля в области радиационных поясов. В [50] модель магнитосферы [31, 32] (рис. 3) была дополнена плоским током, соответствующим нейтральному слою. Параметры тока подбирались так, чтобы объяснить некоторые особенности высокоширотной границы радиационных поясов. В [15] отмечается, что долготная асимметрия в этой модели примерно вдвое больше, чем в модели [31, 32]. По-видимому, истинная асимметрия еще выше.

До сих пор мы анализировали только токи, текущие вне области радиационных поясов. Возникает вопрос, насколько можно считать поле в этой области потенциальным. Существуют два механизма образования токов в данном районе. Во-первых, это — разности потенциалов на концах одной и той же силовой линии, которые могут возникать за счет электрических полей в ионосфере. При этом токи будут течь вдоль силовых линий. Второй механизм — дрейфовые токи быстрых частиц в радиационных поясах. Результаты расчетов, выполненных в [51] на основе экспериментальных данных о поясах, приведены на рис. 6. Расчет по тем же формулам, что и в [51], на основе более детального анализа показаний тех же датчиков быстрых частиц [52] дает кривую примерно той же формы, но абсолютные величины во всех точках приблизительно в 3 раза меньше.

Исследования на спутнике «Электрон-2» [26, 53] качественно подтверждают существование таких возмущений. Однако, поскольку магнитометры включались лишь на расстояниях  $> 3a$ , минимум наблюдался примерно лишь в трех случаях из сорока. При большинстве пролетов минимум был, по-видимому, расположен ближе к Земле. Максимальные отрицательные аномалии на расстояниях  $\approx 3a$  составляли в спокойное время  $100-150\gamma$ .

На расстояниях  $> 5a$  вблизи плоскости экватора и  $> 7a$  на высокоширотных ветвях орбиты спутника отклонение измеренного поля от поля внутренних источников почти всегда положительно. По-видимому, источником такой положительной аномалии являются токи на границе магнитосферы [52]. Создаваемое ими в пределах магнитосферы поле, естественно, потенциально.

Заканчивая краткий обзор современных представлений о спокойной магнитосфере, сформулируем основные выводы, которые будут использованы при разработке теории поясов в последующих главах.

1. Магнитное поле в области захваченной радиации в спокойной магнитосфере является практически потенциальным.
2. Поле внешних токов в пределах области радиационных поясов может, по-видимому, быть с достаточной точностью аппроксимировано суммой однородного

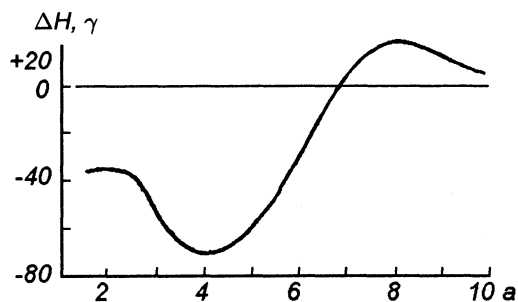


Рис. 6. Возмущение  $\Delta H$  геомагнитного поля дрейфовыми токами протонного пояса вблизи плоскости геомагнитного экватора. По оси абсцисс отложено геоцентрическое расстояние

поля и квадрупольного члена, описывающего асимметрию дневной и ночной сторон.

3. На расстояниях  $\leq 5a$  от центра Земли отклонения от дипольного поля относительно малы.
4. При изменениях мощности солнечного ветра форма границы и структура поля в магнитосфере остаются подобными, а коэффициентом подобия является параметр  $\Lambda$ .

Наземные наблюдения показывают, что геомагнитное поле постоянно изменяется. Даже в тех случаях, когда Солнце в течение длительного времени совершенно спокойно, геомагнитное поле в каждой точке в течение суток испытывает вариации с амплитудой  $\sim 20\text{--}50\gamma$ . Эти вариации имеют закономерный характер и хорошо коррелируют с изменениями освещенности атмосферы Солнцем. Известно, что токи, вызывающие такие вариации, текут в  $E$ -слое ионосферы на высотах 100–110 км: при высотных исследованиях знак тангенциальной компоненты возмущения изменяется, когда ракета пересекает слой  $E$ .

В настоящее время считается, что причина этих вариаций — ветры в ионосфере, обусловленные приливными или кориолисовыми силами<sup>3)</sup>. Сила трения между ветром, состоящим из нейтральных атомов, и ионами и электронами при наличии магнитного поля вызывает токи, сила которых пропорциональна концентрации заряженных частиц. Изменения концентрации коррелируют с условиями освещенности, и поэтому возникает суточный ход вариаций поля. Подробности о суточных вариациях см. в [55, 56].

Ионосферные токи, по-видимому, не играют сколько-нибудь существенной роли в динамике частиц с энергиями  $>100$  кэВ, так как создаваемые ими возмущения поля даже у Земли всегда много меньше дипольного поля и быстро убывают с высотой, а временные масштабы исключают возможность резонансного взаимодействия с такими частицами. Однако такое же заключение о частицах с энергиями 1–10 кэВ было бы ошибочным. Известно, что в высокоширотных областях происходит мощный сброс частиц с энергиями 10–50 кэВ в ионосферу, который может резко повысить степень ионизации. Поэтому такие частицы часто вызывают существенное перераспределение и усиление ионосферных токов, которое проявляется на наземных магнитограммах в виде нерегулярных колебаний компонент поля. Величина таких колебаний резко возрастает с ростом магнитной широты и в зоне полярных сияний (примерно  $\pm 65^\circ$  широты) может достигать на отдельных станциях нескольких тысяч гамм ( $\sim 10\%$  от поля диполя). Корреляция амплитуд возмущений даже на близких станциях мала.

Появление таких возмущений хорошо коррелирует с солнечной активностью: как правило, примерно за сутки до сильного геомагнитного возмущения на Солнце происходит мощная вспышка. Этот результат также показывает, что возмущения ионосферных токов связаны с заряженными частицами: световые эффекты вспышки должны были бы проявиться на Земле всего через 8 минут, что также наблюдается на магнитограммах в виде небольших крючков.

---

<sup>3)</sup> В ионосфере вследствие различной освещенности температура на дневной стороне несколько выше, чем на ночной, и поэтому существует градиент давления, перпендикулярный силе тяжести. При наличии вращения это приводит к появлению стационарных потоков, параллельных земной поверхности.

Неправильные колебания поля в области зоны полярных сияний наблюдаются почти ежедневно. При этом на ночной стороне Земли возникают узкие токовые струи, в некотором (довольно грубом) приближении совпадающие с очертаниями северной и южной зон максимальной частоты полярных сияний. Ширина такой подковообразной струи составляет  $\sim 100\text{--}500$  км. На концах «подковы» токи растекаются по полярным шапкам и по низкоширотным областям. Возможно, что частично токи замыкаются через магнитосферу. Амплитуда возмущения, естественно, максимальна под струей и быстро убывает по мере удаления от нее. Возмущения такого типа называют *полярными бурями* или *бухтами* (по сходству формы магнитogramмы с очертаниями берега бухты). В последнее время получило распространение сокращенное обозначение *DP* (polar disturbance), предложенное С. Чепменом.

При мощных возмущениях иррегулярные колебания охватывают весь земной шар. Существует несколько способов количественной оценки геомагнитной активности, установленных на основе анализа многолетних данных и принятых всеми странами. Наиболее распространенной характеристикой является так называемый *K*-индекс. Определение *K*-индекса основано на максимальных отклонениях возмущения поля от уровня, соответствующего спокойной суточной вариации. Сутки разбиваются на восемь трехчасовых интервалов, и максимальное отклонение определяется для каждого из них на всех магнитных обсерваториях мира. Для каждой станции существует своя шкала перевода этих амплитуд в *K*-индекс. Смысл такого перевода состоит в том, что при одном и том же планетарном характере возмущения амплитуды на различных станциях существенно различаются и резко возрастают при смещении от экватора к зонам максимума полярных сияний.

В табл. 1 приведена связь между амплитудами трехчасовых отклонений поля от спокойного уровня и соответствующими *K*-индексами для геомагнитной широты  $\approx 50^\circ$ . Как видно из таблицы, связь между *K* и амплитудой имеет примерно логарифмический характер. Очень сильные возмущения ( $K = 9$ ) соответствуют на широте  $50^\circ$  амплитудам  $> 500\gamma$ . В зоне полярных сияний этому значению *K*-индекса соответствуют амплитуды  $> 2000\gamma$ .

Таблица 1

Пределы изменения амплитуды (в гаммах)	0	5	10	20	40	70	120	200	330	500
<i>K</i> -индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

По международному соглашению, данные о *K*-индексах с двенадцати определенных станций, лежащих между  $48^\circ$  и  $63^\circ$  геомагнитных широт в северном и южном полушариях, пересылаются в Геттинген, где после соответствующей статистической обработки определяются планетарные *K*-индексы. Эти усредненные величины также даются для каждого трехчасового интервала и обозначаются через  $K_p$  (*K*-планетарное). Индексы  $K_p$  измеряются в 28-бальной шкале:  $0_0, 0_+, 1_-, 1_0, 1_+, 2_-$  и т. д. до  $9_0$ . Параметр  $K_p$  характеризует, таким образом, общепланетарный уровень возмущенности.

Как показывает практика, несмотря на несколько формальный характер индекса  $K_p$ , использование этой величины для обнаружения качественной (а иногда

даже количественной) корреляции геомагнитных возмущений с другими процессами является весьма эффективным.

Подчеркнем, что неправильные колебания поля ведут себя самым различным образом на разных станциях. Поэтому  $K$ -индексы и соответствующие им амплитуды отнюдь не являются характеристикой планетарных токов. Между тем такая характеристика также представляет большой интерес. Чтобы исключить широтный эффект, среднее возмущение определяется усреднением по долготе показаний станций с близкими магнитными широтами. При этом, несмотря на сравнительно небольшую корреляцию иррегулярных колебаний, среднее значение, как правило, отлично от нуля. В средних широтах оно проявляется либо в увеличении, либо в уменьшении горизонтальной составляющей поля. Усредненная по долготе величина возмущения в средних широтах обозначается как  $D_{st}$  (storm disturbance).

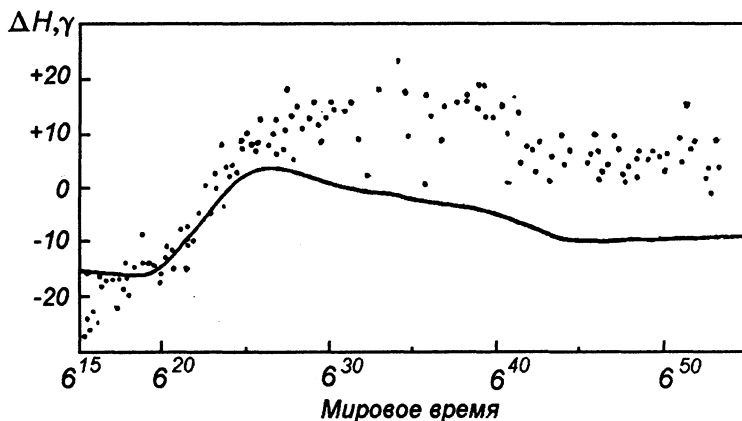
В настоящее время доказано, что увеличение  $H$  всегда связано со сжатием магнитосферы. Абсолютная величина этого эффекта, как правило, невелика (10–40γ). Почти всегда возмущение такого типа имеет резкий фронт продолжительностью ~ 1 мин. Затем возмущение медленно убывает (с характерным временем порядка одного или нескольких часов). Реже наблюдаются внезапные спады поля, связанные с быстрым расширением магнитосферы.

Поскольку время нарастания или спада поля при таких внезапных импульсах мало, они отчетливо выделяются на магнитограммах. Имеются и другие способы исследования этих процессов. С нашей точки зрения, эти эффекты являются основным механизмом ускорения частиц в радиационных поясах до энергий свыше 100 кэВ.

Помимо внезапных импульсов, вариация  $D_{st}$  содержит более плавные во времени спады поля, иногда достигающие величины в несколько сотен гамм. До недавнего времени существовала практически общепринятая точка зрения, согласно которой это ослабление вызывается кольцевыми токами, текущими вблизи плоскости экватора на расстояниях 4–5а от центра Земли. Однако исследование потоков быстрых частиц и вариаций геомагнитного поля на больших высотах ставит под сомнение существование столь сильных токов. Не исключено, что значительная часть токов, создающих возмущение  $D_{st}$ , течет в ионосфере и на внутренней границе хвоста.

Совокупность резкого возрастания  $K$ -индекса (т. е. иррегулярных колебаний поля), усиления тока в полярных электроструях и появления большой отрицательной  $D_{st}$  вариации (корреляция первых двух явлений с третьим имеет место практически всегда) называют *магнитной бурей*. Как правило (особенно в случае сильных бурь), этим явлениям предшествует внезапный положительный импульс. В этом случае быстрое нарастание поля называют *внезапным началом бури*, а период, в течение которого  $D_{st} > 0$  — *первой фазой*. Период от прохождения  $D_{st}$  через нуль до достижения минимума поля называется *главной фазой бури*, а время уменьшения  $|D_{st}|$  до нуля и спада  $K_p$  до малых значений — *фазой восстановления*.

Еще недавно считалось, что внезапное начало и три фазы являются необходимыми элементами бури. Однако за последние 10 лет эта точка зрения была пересмотрена. Оказалось, что главная фаза бури может развиваться и без внезапного начала. Такие бури, как правило, повторяются с периодом вращения Солнца вокруг оси (через 27, 54 и т. д. дней после вспышки) и поэтому называются *рекуррентными*. В то же время внезапные импульсы регистрируются почти ежедневно и не сопровождаются, как правило, бурями.



**Рис. 7.** Внезапный импульс. По оси абсцисс — мировое время в часах и минутах, по оси ординат — магнитное возмущение у поверхности Земли (сплошная кривая) и на большой высоте (точки)

Высотные измерения показывают, что внезапные импульсы развиваются и на Земле, и в магнитосфере одинаковым образом [27]. Один из примеров внезапного положительного импульса см. на рис. 7, взятом из этой работы. В [27] показано, что асимметрия геомагнитного поля на больших расстояниях велика.

Так, по наземным данным величина возмущения вблизи экватора зависит от долготы  $\varphi$  по закону

$$\Delta h \approx \bar{h}(1 + 0,44 \cos \varphi) \quad (2.9)$$

(угол  $\varphi$  отсчитывается от полуденного меридиана). Если принять, что в среднем внезапному импульсу соответствует смещение границы с  $11a$  до  $8-10a$ , и представить возмущение (2.9) в виде суммы внешних токов и внутриземных скин-токов экранировки, то можно найти отношение констант  $h_0$  и  $h_1$  в (2.4).

В двухкомпонентной модели потенциала внешних токов (2.4) возмущение у экватора Земли с учетом скин-эффекта имеет вид

$$\Delta h = \frac{3}{2}h_0 \left[ \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^3 - 1 \right] + \frac{5}{3}h_1 \left[ \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^4 - 1 \right] \cos \varphi. \quad (2.10)$$

Отсюда и из (2.9) получаем ( $\Lambda_0 = 11$ ,  $\Lambda = 8-9$ ), что  $h_1 \approx 0,25h_0$ . Отношение  $h_1/h_0$  слабо зависит от  $\Lambda$  (так, при  $\Lambda = 10$  величина  $h_1/h_0$  равна 0,27), и поэтому соотношение (2.9) довольно надежно определяет степень асимметрии.

Приведенная оценка асимметрии подтверждается анализом пространственной зависимости амплитуды внезапных импульсов. Возмущение в космосе (вблизи плоскости экватора) есть

$$\Delta h(R, \varphi) = h_0 \left[ \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^3 - 1 \right] + h_1 \left[ \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^4 - 1 \right] R \cos \varphi$$

( $R$  — в земных радиусах). Отсюда видно, что при  $\varphi = \pm 90^\circ$  амплитуда в космосе должна составлять  $(2/3)\bar{h}$  (практически уже при  $R = 3a$  можно пренебречь полем скин-токов). Согласно [27], отношение  $h(R)/\bar{h}$  составляет 0,7 (при  $R = 4a$ ,  $\lambda_m = 25^\circ$ ,

$\varphi = 90^\circ$ ). В то же время на полуденном меридиане при больших  $R$  величины  $h(R)$  должны значительно превышать  $\bar{h}$  из-за роста квадрупольной гармоники с  $R$ . При  $\Lambda = 9-10$ ,  $\Lambda_0 = 11$  и  $R = 8a$  получим  $h(8,0)/\bar{h} = 2,8-2,5$ . Согласно [27] это отношение равно 2,3. В дальнейшем мы будем пользоваться этой оценкой асимметрии. По-видимому, сферический анализ поля внезапных импульсов является наиболее перспективным методом исследования геомагнитного поля в районе радиационных поясов.

Внезапные импульсы, как уже отмечалось в § 1, отражают структуру возмущений в солнечном ветре. Быстрое нарастание поля связано с прохождением магнитосферы через передний фронт возмущения ветра с шириной  $\sim 10^5-10^6$  км. Это расстояние, значительно превышающее ширину ударного фронта ( $\sim 10^2-10^3$  км), все же составляет ничтожную долю (1 %) астрономической единицы. Медленный спад поля продолжительностью порядка нескольких часов соответствует постепенному восстановлению средних характеристик солнечного ветра. Такая асимметрия с точки зрения газовой динамики представляется вполне естественной и закономерной, поскольку вследствие нелинейных эффектов крутизна переднего фронта должна нарастать.

Внезапные импульсы не являются единственным типом возмущений границы магнитосферы. Помимо регулярного солнечного ветра, возмущаемого при вспышках, имеются стабильные плазменные струи, истекающие из активных областей на Солнце. В этих струях поток импульса выше, чем в солнечном ветре. Радиус поперечного сечения струй  $\gtrsim 10^{12}$  см. При скорости струи  $\sim 10^8$  см/с время взаимодействия с магнитосферой составит  $\gtrsim 10^4$  с, т. е. несколько часов. Такие струи вызывают рекуррентные бури, о которых речь шла выше.

Относительно других типов возмущений границы магнитосферы пока прямых данных нет. Поскольку общая картина поля на больших высотах изучена слабо, пространственные вариации трудно отличить от временных (исключение составляют внезапные импульсы, временной характер которых однозначно вытекает из сопоставления данных спутников с наземными магнитограммами).

Сопоставление высотных и наземных данных показывает, что магнитная возмущенность вдали от Земли значительно ниже, чем предполагалось. Наиболее полные данные о связи высотной и наземной возмущенностей были получены на спутниках серии «Электрон» [26, 53]. Благодаря этим результатам было окончательно доказано, что причиной сильных возмущений ионосферных токов (возрастания  $K_p$ -индекса) являются вариации солнечного ветра. Выше мы уже отмечали, что на больших удалениях от Земли разность  $\Delta H$  между измеренным полем и полем внутриземных источников всегда положительна. Несомненно, этот эффект связан с обжатием магнитосферы солнечным ветром. Следовательно, возрастанию  $\Delta H$  соответствует более сильное обжатие поля (приближение границы магнитосферы к Земле) и наоборот. На рис. 8 [26] приведены значения  $\Delta H$  на больших расстояниях и  $K_p$ -индексы в функции от времени. Корреляция  $K_p$  и  $\Delta H$  очевидна.

Магнитные измерения [26, 53] (так же как и все предыдущие исследования) не обнаружили заметных вариаций кольцевых токов, которым приписывается понижение поля у Земли во время главных фаз магнитных бурь. В области отрицательных  $\Delta H$  магнитограммы при больших  $K_p$  не отличаются от аналогичных кривых, снятых в спокойные периоды. Граница, на которой  $\Delta H = 0$ , с ростом возмущенности приближается к Земле. Это обстоятельство показывает, что токи, вызывающие ослабление поля, варьируют слабее, чем токи на границе магнитосферы. Хотя магнитные



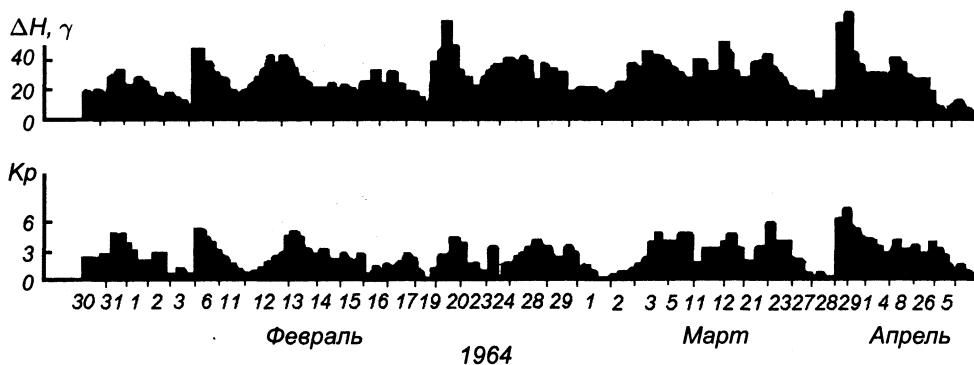


Рис. 8. Корреляция  $K_p$ -индекса с возмущением геомагнитного поля  $\Delta H$  токами у границы магнитосферы

бури в период с февраля по апрель 1964 г. (в это время были получены результаты [26] и [53]) были относительно слабыми и делать окончательные выводы пока преждевременно, все же следует отметить, что проблема главных фаз магнитных бурь заметно усложнилась. По-видимому, необходимо более детально изучить возможность локализации кольцевых токов, создающих усредненную  $D_{st}$ -вариацию, в ионосфере.

В [26] описано явление, которое, пожалуй, представляется наиболее загадочным из всех обнаруженных в космосе магнитных эффектов. Во время магнитной бури 12 февраля 1964 г. и, несколько менее отчетливо, во время бурь 21 февраля и 4 марта 1964 г. было зарегистрировано кратковременное ( $\sim 10$  мин) уменьшение поля на очень большую величину ( $300\text{--}500\gamma$ ). Все три события наблюдались примерно на одной и той же магнитной оболочке (с расстоянием от вершины силовой линии до центра Земли  $\sim 4a$ ) на геомагнитных широтах  $\sim 30\text{--}50^\circ$ . Не было обнаружено какой-либо корреляции этих явлений с мировыми эффектами по наземным магнитограммам, однако установлена корреляция с началом усиления полярных электроструй.

Основные трудности в понимании природы этих эффектов связаны с результатами проводившихся одновременно измерений потоков частиц практически во всем разумном диапазоне энергий. Для создания наблюдавшихся возмущений поля (спад от  $\sim 1500$  до  $1000\gamma$ ) плотность энергии частиц должна была бы примерно в 30 раз превышать наибольшее из всех когда-либо наблюдавшихся в поясах значение. В то же время в некоторых участках спектра протонов, где интенсивность очень быстро падает с энергией, бетатронное замедление при спаде поля на 30 % должно было бы более чем на порядок понизить скорость счета соответствующих датчиков. Между тем никаких сколько-нибудь существенных вариаций ни в одном из участков спектра не наблюдалось. Природа эффекта остается загадочной. Однако сугубо локальный характер, кратковременность и малая вероятность возникновения таких явлений ( $\sim 10$  мин/месяц  $\approx 2 \cdot 10^{-4}$ ) позволяют предположить, что их роль в динамике поясов невелика.

При магнитных возмущениях граница магнитосферы приближается к Земле. Нейтральный слой, судя по результатам [28], также оказывается на более близких расстояниях. В [15] (со ссылкой на одного из авторов магнитных исследований

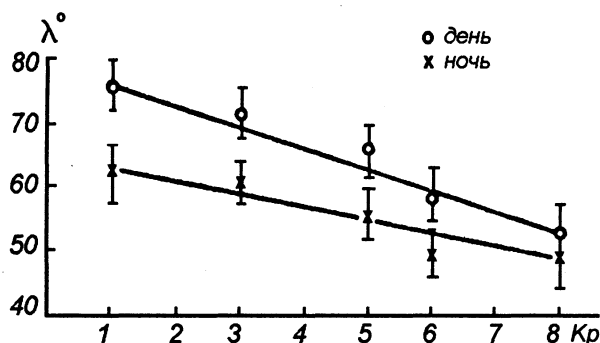


Рис. 9. Зависимость полуденной и полуночной широты кольца полярного сияния от уровня магнитной активности

на спутнике IMP-1) отмечаются большие изменения поля в хвосте. Выше указывалось, что внутренняя граница нейтрального слоя, по-видимому, проектируется вдоль силовых линий на расположенное в ионосфере кольцо полярных сияний. Результаты проведенного в [49] анализа данных синхронного фотографирования ночного неба мировой сетью станций определенно указывают на сдвиг кольца в область более низких широт с ростом магнитной возмущенности. На рис. 2 (с. 17) была приведена схема, показывающая связь между границей нейтрального слоя и кольцом полярных сияний. Некоторые результаты [49] показаны на рис. 9 (зависимость полуденной и полуночной широты кольца от  $K_p$ ). Хотя смещение сияний от полюса при возмущениях магнитного поля было известно давно, лишь данные МГГ позволили изучить этот эффект количественно. В частности, фундаментальный факт существования кольца полярных сияний одновременно на всех долготах был впервые установлен в [49] на основе анализа этих данных.

Поскольку геомагнитные возмущения обусловлены вариациями корпускулярного излучения Солнца, естественно ожидать, что уровень возмущенности должен изменяться с 11-летним циклом солнечной активности. Действительно, среднесуточные  $K_p$ -индексы отчетливо коррелируют с числом солнечных пятен. Более детальный анализ показывает, что наиболее сильные вариации испытывают мощные бури со среднесуточным  $K_p$ -индексом  $\gtrsim 5$ . Частота умеренных и в особенности слабых бурь флуктуирует мало. Возможно даже, что максимум таких возмущений запаздывает относительно максимума пятен на 3–4 года.

В заключение рассмотрим вопрос об электрических полях, связанных с геомагнитными возмущениями. Так как временные масштабы возмущений ( $\gtrsim 1$  мин) велики в сравнении с периодами колебаний частиц радиационных поясов между точками отражения, эти поля могут вызывать лишь адиабатическое ускорение, сопровождающее перенос частиц вглубь магнитосферы.

Современная картина магнитосферы, вкратце обрисованная в данном параграфе, указывает на существование электрических полей двух типов: вихревых полей, связанных с вариациями геомагнитного поля и электростатических полей, обусловленных ионосферными возмущениями. Исследованию эффектов вихревых полей посвящена в основном данная работа.

Электростатические поля возникают в ионосфере и распространяются по всему объему магнитосферы, так как вследствие высокой проводимости околоземной плазмы вдоль поля силовые линии можно считать практически эквипотенциальными. Если поляризация обусловлена стационарными ветрами и поле во времени не изменяется, оно будет несколько деформировать дрейфовые орбиты частиц. Этот эффект был рассмотрен в [57]. Оценка показывает, что возмущения орбит становятся существенными при энергиях  $\lesssim 10$  кэВ. Переменные поля, связанные с ионосферной турбулентностью, могут вызывать перенос частиц поперек дрейфовых оболочек. Заметный эффект будет иметь место в том случае, если спектр турбулентных электрических полей содержит с заметной амплитудой пульсации с такими частотами и масштабами  $\lambda$ , при которых «фазовая скорость» пульсаций  $\lambda\omega/(2\pi) \sim v_d$ , где  $v_d$  — скорость магнитного дрейфа частиц. Основы теории такого переноса разработаны в [14].

Отметим, что турбулентные электрические поля на больших высотах должны вызывать турбулентную конвекцию плазмы (и наоборот). Идея о диффузии частиц поясов при конвекции в магнитосфере рассматривалась в [1]. Конвекция из-за ионосферных токов является вынужденной. Можно предположить, что в самой магнитосфере имеет место конвективная неустойчивость, обусловленная градиентом давления холодной плазмы и диамагнитными эффектами [58]. Однако крупномасштабные движения такого типа подавляются диссипацией в ионосфере [59]. Кроме того, сравнение энергетических ресурсов источников свободной и вынужденной конвекции показывает, что последняя должна быть значительно более интенсивной.

Таким образом, механизм переноса частиц с точки зрения современных представлений о динамике магнитосферы может быть связан с вихревыми полями мировых геомагнитных возмущений или с ионосферной турбулентностью. Выяснение их относительной роли в формировании поясов из общих соображений пока невозможно, так как информация о ветрах в ионосфере явно недостаточна. Перенос под действием вихревых полей к настоящему времени изучен довольно подробно, и экспериментальные данные по этому вопросу значительно пополнились, хотя их нельзя считать исчерпывающими. Результаты проведенных исследований успешно объясняют динамику частиц, периоды дрейфа которых  $\lesssim 1$  часа (что примерно соответствует энергиям  $> 100$  кэВ). В то же время в области больших значений дрейфовых периодов (меньших энергий) возникает ряд трудностей; в частности, некоторые экспериментальные данные указывают, что перенос таких частиц происходит более быстро (особенно во время магнитных бурь). Поскольку, судя по оценкам [57], эффект поляризации ионосферы становится существенным именно в области энергий  $\sim 1\text{--}10$  кэВ, можно предположить, что этот механизм играет важную роль в данном диапазоне энергий.

Обзор современных данных о магнитосфере Земли, проведенный в этом параграфе, отнюдь не является полным. Наша цель состояла в том, чтобы описать основные качественные особенности магнитного поля Земли, необходимые для понимания структуры геомагнитной ловушки, дать общее представление о методах исследования, применяемых в настоящее время, и описать некоторые количественные характеристики возмущенности поля ( $K$ -индекс,  $K_p$ -индекс и т. д.), широко используемые при анализе связи магнитных явлений с другими процессами в магнитосфере.

Более полные данные по ряду вопросов физики магнитосферы можно найти в лекциях С. Чепмена [56] (1962 г.) и в оригинальных работах [24–26, 50, 53], в которых описаны основные результаты, полученные после 1962 г.

### § 3. Холодная плазма и электромагнитные и плазменные волны в магнитосфере

Наряду с магнитным полем одной из важнейших характеристик физических условий в магнитосфере является распределение холодной плазмы, т. е. частиц со средними энергиями примерно от 0,1 до 10 эВ. Холодная плазма определяет многие важные с точки зрения теории радиационных поясов параметры, прежде всего — время жизни быстрых частиц относительно ионизационных потерь и показатель преломления для различных типов электромагнитных и плазменных волн. В свою очередь через показатель преломления выражаются частоты, при которых имеет место резонансное взаимодействие соответствующих типов волн с частицами заданной энергии, и условия устойчивости радиационных поясов относительно раскачки различных волн.

Распределение холодной плазмы, пожалуй, относится к числу наименее изученных параметров околоземного пространства. Даже на такой сравнительно небольшой высоте, как 1000 км, измерения, выполненные сходными методами, приводят к значениям электронной плотности  $N_e$ , различающимся в десятки раз. По-видимому, причина таких расхождений заключается не в порочности той или иной методики (хотя все они имеют известные недостатки), а в сильной изменчивости свойств холодной плазмы в пространстве и времени. Во всяком случае, контрольные измерения профиля электронной концентрации на высотах  $\sim 1000$  км, выполненные четырьмя различными методами с помощью спутника, ракеты и наземного зондирования в одно и то же время и в одном и том же месте [60], дали один и тот же результат. В частности, на высоте 1000 км электронная концентрация составляла  $10^4 \text{ см}^{-3}$ . Эта величина в настоящее время принимается большинством авторов в качестве средней плотности электронов у верхней границы ионосферы в годы пониженной солнечной активности (1961–1965).

Высота  $\sim 1000$  км считается верхней границей ионосферы, так как здесь суммарная концентрация ионов атомарного кислорода, азота и гелия примерно равна концентрации протонов. На высотах  $> 1200$  км атмосфера Земли практически на 100 % состоит из протонов и электронов [61]. Эти результаты, а также согласующиеся с ними данные [62], были получены в годы низкой солнечной активности (1962–1964), когда температура верхней атмосферы была, по-видимому, примерно в 2 раза ниже, чем в годы максимума (1958–1959).

В дальнейшем сведения об ионосфере понадобятся нам лишь при исследовании устойчивости радиационных поясов, причем необходимая информация сводится к оценке коэффициента отражения некоторых типов волн от Земли с учетом поглощения в ионосфере. Этот сугубо специальный вопрос мы обсудим в гл. V работы.

Значительно более широкий круг явлений в магнитосфере и радиационных поясах определяется плотностью холодной плазмы на высотах  $\gtrsim 3000$  км от поверхности Земли (или  $1,5a$  от центра Земли). Различные оценки показывают, что вблизи плоскости экватора при  $1,5a \leq R \leq 3,5a$  плотности ионов и электронов  $N_i = N_e \approx 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Такой результат был получен как в годы максимума солнечной

активности [63], так и в годы минимума [64, 65]. Аналогичный порядок величины  $N$  в указанном районе дает анализ распространения сверхнизкочастотных электромагнитных волн [66] и альвеновских волн [67] по силовым линиям геомагнитного поля. Точность этих результатов невелика, и поэтому можно говорить лишь о порядке величины  $N$ . Судя по некоторым данным, при  $R > 3,5-4a$  плотность холодной плазмы резко падает до величины  $\lesssim 10^2 \text{ см}^{-3}$  [63, 66]. Зависимость  $N(R)$ , используемая в различных теоретических работах, имеет самый разнообразный характер (от  $N \approx \text{const}$  до  $N \sim R^{-4}$ ). С точки зрения теории представляются несомненными следующие положения:

- а) вдоль силовых линий магнитного поля имеет место гидростатическое равновесие:

$$(\mathbf{H} \nabla P) = (g\mathbf{H})\rho, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $P$  — давление холодной плазмы,  $\rho$  — ее плотность;

- б) плазма квазинейтральна ( $N_i = N_e \equiv N$ ).

Кроме того, представляется вероятным, что на высотах  $> 1000$  км температуры ионов и электронов во всяком случае не убывают по мере удаления от Земли вдоль силовых линий. Возможно, выше 3000 км электроны изотермичны (однако на разных силовых линиях температуры  $T_e$  могут различаться). Если предположить, что и температура протонов  $T_i$  на таких высотах постоянна вдоль силовых линий, то решение (3.1) тривиально:

$$N = N_0 \exp \left\{ 2M \frac{U(R_0) - U(R)}{T_i + T_e} \right\}, \quad (3.2)$$

где  $N_0$  — плотность на высоте  $R_0$ , начиная с которой достигается изотермия,  $U(R)$  — гравитационный потенциал,  $M$  — масса протона. Температуры в (3.2) измеряются в эргах.

Входящие в (3.2) параметры  $N_0$ ,  $T_i$  и  $T_e$  постоянны вдоль силовых линий, однако для разных линий они могут быть различными. Поэтому распределение (3.2) не является, вообще говоря, сферически симметричным. Градиенты давления поперек магнитного поля уравниваются суммарным действием силы тяжести и магнитогидростатических сил. Перенос тепла и вещества поперек поля сильно замагничен и идет со скоростью в  $(\nu_i/\Omega_H)^2$  или  $(\nu_e/\omega_H)^2$  раз меньшей, чем вдоль поля ( $\nu_i$  и  $\nu_e$  — частоты ионных и электронных соударений,  $\Omega_H$  и  $\omega_H$  — соответствующие циклотронные частоты). В области максимума радиационных поясов эти отношения очень малы ( $\lesssim 10^{-9}$ ).

На больших высотах поле тяжести нельзя считать однородным:

$$U(R) = -\frac{g_0 a^2}{R}$$

(здесь радиус Земли  $a$  и расстояние  $R$  измеряются в сантиметрах). С помощью (3.2) можно оценить высотный ход плотности вдоль силовых линий, если известны  $T_i$  и  $T_e$ . Если, например, в соответствии с экспериментальными данными [68] принять, что на больших высотах ( $\sim 10\,000$  км от поверхности Земли) в плоскости экватора  $T_e = 8000$  К, то даже при  $T_i = 0$  К плотность от  $1,5a$  до вершины силовой линии уменьшится не более чем в 3,5 раза. Если же  $T_i = T_e/2 \approx 4000$  К, то, скажем,

на силовой линии, вершина которой отстоит от центра Земли на  $3a$ , аналогичный перепад плотности составит лишь  $\approx 30\%$ . Таким образом, при температурах  $\sim 1$  эВ высотный ход плотности вдоль силовых линий невелик, и, по-видимому, большую роль играет зависимость  $N_0$  от магнитной широты (возможно, и от долготы).

При расчетах структуры радиационных поясов Земли на основе теории переноса вычисления полностью аналогичны при любой степенной зависимости  $N$  от экваториального расстояния. В работах [5–12] принималось, что при  $R > 1,5a$   $N = \text{const} \approx 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Полученные на основе такой простейшей модели результаты значительно лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты [15], соответствующие модели с быстрым спадом (как  $R^{-4}$ ). Данные о радиационных поясах позволяют в принципе определить  $N(R)$  несколькими независимыми способами. Результаты такой оценки и перспективы более точного определения  $N$  по динамике быстрых частиц будут обсуждены в § 13. При оценках показателя преломления и ионизационных потерь в дальнейшем положим  $N = \text{const} \approx 10^3 \text{ см}^{-3}$ .

Давление холодной плазмы ( $10^{-9}$  эрг/см<sup>3</sup>) ничтожно мало в сравнении с  $H^2/(8\pi)$  ( $10^{-8}$  эрг/см<sup>3</sup> у границы магнитосферы, примерно  $10^{-5}$ – $10^{-6}$  эрг/см<sup>3</sup> в районе внешней зоны). В максимуме протонного пояса давление быстрых частиц, несмотря на малую концентрацию, на порядок превышает давление холодной плазмы.

Плотности  $N_e = 10^3 \text{ см}^{-3}$  соответствует плазменная частота  $\omega_0 \approx 2 \cdot 10^6$  рад/с ( $3 \cdot 10^5$  Гц). Электронная циклотронная частота  $\omega_H$  вблизи экваториальной плоскости изменяется от  $2 \cdot 10^6$  рад/с при  $R \sim 1,5a$  до  $\approx 10^3$  рад/с у границы магнитосферы, и, следовательно, почти всюду выполняется неравенство  $\omega_H \ll \omega_0$ . При  $R \leq 4a$  ионная плазменная частота  $\Omega_0 < \omega_H$ . Таким образом, в спектре частот электромагнитных и электростатических волн в магнитосфере имеется широкая запрещенная щель ( $\omega_H \leq \omega \leq \omega_0$ ). Распространение волн с частотами  $< \omega_H$  имеет существенно магнитогидродинамический характер (исключение составляет лишь ионный звук). На частотах  $\sim \omega_0$  (но больше  $\omega_0$ ) еще заметно сказывается влияние инерции холодных электронов. Наконец, при  $\omega \gg \omega_0$  электромагнитные волны распространяются практически так же, как в вакууме. Как уже отмечалось в § 1, электромагнитные волны с  $\omega \gg \omega_0$  (космическое и солнечное радиоизлучение) не представляют интереса для теории радиационных поясов.

Низкочастотные электромагнитные поля в магнитосфере (за исключением вынужденных колебаний, рассмотренных в § 2) связаны с собственными гидромагнитными колебаниями. По-видимому, собственные колебания «ядра» магнитосферы (т. е. области захваченной радиации) и ее хвоста в некотором приближении могут рассматриваться раздельно. Очевидно, периоды низших гармоник полоидальных колебаний (т. е. колебаний, у которых имеется радиальная и широтная составляющая скорости) по порядку величины определяются временем распространения возмущения от поверхности Земли до границы

$$T \sim \int_a^{R_0} \frac{dR}{u_a(R)}, \quad (3.3)$$

где  $u_a = H(R)/\sqrt{4\pi\rho}$  — альвеновская скорость. Считая  $\rho = \text{const} \sim 10^{-22}$ – $10^{-23}$  г·см<sup>-3</sup>, т. е.  $N \approx 10^2$ – $10^3 \text{ см}^{-3}$ , и  $H = 2H_0(a/R)^3$  ( $H_0 \approx 0,3$  Гс — поле у экватора

Земли), получаем:

$$T \sim \frac{1}{4} \left( \frac{R_b}{a} \right)^4 \frac{\sqrt{4\pi\rho} a}{H_0}. \quad (3.4)$$

Разумеется, такая оценка является очень грубой, так как не учитывает широтной и долготной зависимости  $H$  и поля токов у границы. Однако все же из (3.4) можно сделать ряд качественных выводов. Во-первых, порядок величины  $T$  составляет  $\sim 1$  мин. Во-вторых,  $T$  сильно зависит от положения границы. Исходя из этих оценок, можно проанализировать данные о геомагнитных возмущениях с периодами порядка нескольких минут и попытаться выделить типы колебаний, качественно соответствующие данным соотношениям. Поскольку речь идет о низших гармониках, то пульсации с данной частотой должны одновременно наблюдаться на значительной части поверхности земного шара (сравнение амплитуд затрудняется наводками в ионосфере и скин-эффектом у неоднородной в электрическом отношении поверхности Земли). В последние годы были опубликованы экспериментальные данные об изменениях положения границы магнитосферы, зафиксированных различными спутниками. Согласно (3.4) должна существовать сильная зависимость  $T$  от  $R_b$  (хотя, разумеется, не обязательно в виде  $T \propto R_b^4$ ).

Анализ, проведенный В. А. Троицкой [69], показал, что указанным качественным требованиям удовлетворяют регулярные микропульсации геомагнитного поля в интервале частот от  $\sim 0,1$  до  $0,01$  Гц. Эти колебания фиксируются одновременно всеми станциями на освещенной стороне Земли и имеют одинаковые для всех станций стабильные частоты. В [69] получено эмпирическое соотношение между  $T$  и  $R_b$ :

$$T \approx 7 \cdot 10^{-4} \left( \frac{R_b}{a} \right)^5 \text{ с}, \quad (3.5)$$

близкое к грубой оценке (3.4).

Изменения частоты таких пульсаций происходят, как правило, скачкообразно и связаны с внезапными импульсами геомагнитного поля. При этом амплитуда колебаний иногда возрастает, что естественно объяснить возмущением границы магнитосферы. Однако амплитуды колебаний ( $\lesssim 1\gamma$ ) всегда значительно меньше величины статического скачка поля во время внезапного импульса.

Детальное объяснение регулярных пульсаций пока сталкивается с известными трудностями (прежде всего, не совсем понятно, почему они наблюдаются лишь на освещенной стороне Земли). Однако уже сейчас видны пути преодоления таких затруднений, и вывод [69] о том, что эти колебания являются низшими собственными гармониками магнитосферы, не вызывает сомнений. В недалеком будущем измерения регулярных пульсаций, по-видимому, позволят осуществить непрерывный контроль положения границы магнитосферы по наземным данным.

Измерения микропульсаций в диапазоне частот примерно от  $0,2$  до  $5$  Гц привели к обнаружению явлений, принципиально отличных от рассмотренных выше регулярных пульсаций [70]. Оказалось, что в этом диапазоне часто наблюдаются длинные квазимонохроматические волновые пакеты, регулярно повторяющиеся с периодом  $\sim 100$  с. Магнитограмма напоминает цепочку бусин, нанизанных на нить, и из-за такого сходства эти пульсации были названы «жемчужинами». С нашей точки зрения «жемчужины» возникают вследствие слабой неустойчивости протонной зоны [19, 20]. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в гл. V.

В интервале частот от  $\sim 10$  до нескольких сотен герц наземная информация об электромагнитных колебаниях в магнитосфере отсутствует. Эти частоты близки к циклотронным частотам ионов  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $NO^+$  (т.е. основных компонент ионосферы) и поэтому очень сильно поглощаются. Первая и пока единственная попытка наблюдения таких колебаний на больших высотах была предпринята на спутнике «Электрон-3» [71]. Полученные данные обрабатываются. Пока выяснилось, что амплитуды в диапазоне 30–300 Гц ниже, чем на более низких частотах (1–10 Гц). Одиночные импульсы с амплитудами  $\geq 5\gamma$  регистрируются примерно один раз в минуту. Импульсы с амплитудами  $> 25\gamma$  не наблюдались. Одна из задач эксперимента состояла в оценке эффективности фермиевского механизма ускорения, рассмотренного в применении к радиационным поясам в [72]. Результаты [71] показывают, что при наблюдаемом спектре пульсаций фермиевское ускорение не может играть существенной роли.

В диапазоне частот примерно от 1 кГц до  $\omega_H$  в вершинах соответствующих силовых линий ионосфера становится относительно прозрачной. Электромагнитные волны таких частот являются электронным аналогом альвеновских волн, и при  $\omega \sim \omega_H$  их скорость близка к  $\frac{H}{2\sqrt{4\pi mN}}$  ( $m$  — масса электрона). Наземные наблюдения регистрируют в этом диапазоне интенсивные шумы, приходящие как из ионосферы (т.е. сверху), так и вдоль поверхности Земли. В последнем случае волны генерируются, как правило, при грозových разрядах и называются *атмосфериками*.

Часто эхо грозových разрядов в данном диапазоне удается принимать в точке, сопряженной с районом грозы вдоль силовой линии. Сигнал, прошедший длинный путь из одного полушария в другое, за счет дисперсии растягивается и воспринимается на слух как свист с понижающимся во времени тоном. Такие явления называют свистящими атмосфериками. Иногда удается наблюдать много (до 40) последовательных отражений свистящего атмосферика в магнитно-сопряженных точках.

Исследование свистящих атмосфериков позволило еще до запуска космических ракет и спутников оценить плотность холодной плазмы на больших высотах. Найденный при этом порядок величины ( $N \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ ) был в дальнейшем подтвержден высотными измерениями.

Источником волн УНЧ (ультранизкой частоты) могут быть не только грозových разряды, но и некоторые типы неустойчивости радиационных поясов [17–20]. Мы вернемся к этому вопросу в гл. V. Отметим, что способность электромагнитных волн данного диапазона распространяться вдоль искривленных силовых линий геомагнитного поля не является тривиальным следствием закона дисперсии и может быть обусловлена лишь наличием неоднородностей плотности на больших высотах (своеобразных ультранизкочастотных волноводов). Однако реальность этого эффекта подтверждается не только исследованиями радиоэхо грозových разрядов, но и более целенаправленными экспериментами. Была осуществлена аналогичная ретрансляция волн с частотой 15,5 кГц, созданных с помощью генератора [73].

Высотные измерения в диапазоне УНЧ описаны в [74–76]. В первых двух работах в качестве приемного устройства использовался виток и регистрировались пульсации магнитного вектора. В [74] сообщалось о регистрации волн с амплитудами  $\sim 1\gamma$  (по наземным данным амплитуды в этом диапазоне не превышают  $10^{-3}\gamma$ ). В [75] максимальные амплитуды не превышали  $10^{-2}\gamma$ , что представляется более разумным с точки зрения теории прозрачности ионосферы.



В [76] измерения производились с помощью штыревой антенны (т. е. фиксировались колебания электрического вектора  $E$ ). На высотах 500–600 км регистрировались кратковременные (длительностью 3–10 мин) всплески излучения с амплитудами 0,2–1 мВ/см и в основном на частоте 1,7 кГц. Если бы эти волны относились к описанному выше типу, то таким амплитудам соответствовали бы высокочастотные магнитные поля 10–100  $\gamma$ , никогда не наблюдавшиеся в данном диапазоне. Поэтому авторы [76] приходят к выводу, что их аппаратура регистрировала электростатические колебания типа ионного звука.

Частота, на которой эффект выражен наиболее ярко (1,7 кГц), близка к ионной плазменной частоте кислорода и азота ( $O^+$  или  $N^+$ ) на высотах  $\sim 500$  км ( $N_i \approx 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ ). Согласно дисперсионному уравнению для ионно-звуковых волн длина волны должна при этом быть порядка дебаевского радиуса, а фазовая скорость  $\lesssim \sqrt{T_i + T_e/M_i}$ , т. е.  $10^5$  см/с. При столь низких фазовых скоростях резонансное ускорение частиц малоэффективно. Циклотронный резонанс с учетом эффекта Доплера ( $k_{\parallel} v_{\parallel} \approx \omega_H$ , где  $k_{\parallel}$  и  $v_{\parallel}$  — проекции волнового вектора и скорости частицы на магнитное поле,  $\omega_H$  — циклотронная частота) при  $v \sim c$  также возможен лишь при  $k_{\parallel} \ll k$ . Поэтому роль волн, обнаруженных в [76], в формировании радиационных поясов невелика (тем более, что большие амплитуды наблюдались в основном на малых высотах 500–600 км; апогей орбиты находился выше 3000 км).

Как уже отмечалось, между частотами  $\omega_H$  и  $\omega_0$  (при  $\Omega_0 < \omega_H$ ) в спектре волн имеется запрещенная щель. Плазменные колебания были, по-видимому, зарегистрированы на спутнике «Электрон-2» [64]. Измерения на частоте 725 кГц показали, что иногда эффективная температура излучения в этой области частот возрастает на 1–3 порядка по сравнению с фоном космического радиоизлучения ( $T_{\text{эфф}} \approx 3 \cdot 10^7$  К).

На более высокой частоте (1525 кГц) возрастание значительно ниже. Всплески не обнаруживают корреляции с солнечными явлениями и геомагнитной активностью, но довольно четко коррелируют с возрастанием потоков мягких электронов (с энергиями  $\sim 100$  эВ) в магнитосфере Земли. Плазменная частота равна 725 кГц при  $N_e = 5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ , и если источником наблюдавшихся волн действительно являются плазменные колебания, то их генерация происходит на высотах 1500–2000 км от поверхности Земли.

Средняя эффективная температура этих колебаний (с учетом большой скважности), по-видимому, не превышает  $10^8$  К. Если допустить, что аналогичные процессы имеют место во всей магнитосфере, и предположить, что  $T_{\text{эфф}}$  пропорциональна  $1/N_e$  (две точки  $f = 725$  кГц и 1525 кГц удовлетворяют этому условию), то вблизи плоскости экватора среднее значение  $\bar{T}_{\text{эфф}}$  будет  $10^9$  К. Согласно расчетам [16] такие значения  $T_{\text{эфф}}$  слишком малы, чтобы оказать сколько-нибудь заметное влияние на радиационные пояса. Однако при расчетах предполагалось, что средняя длина волны — порядка дебаевского радиуса. В случае более длинных волн эффективность статистического ускорения возрастает. Из [16] следует, что при энергиях электронов  $\sim \frac{T_{\text{эфф}}}{\ln q}$  ( $\ln q$  — логарифм дебаевской экранировки, в магнитосфере  $\ln q \approx 25$ ) ускорение прекращается и начинают преобладать ионизационные потери. Поэтому механизм [16] не может играть существенной роли в динамике электронов с энергиями  $\gtrsim 100$  кэВ. Таким образом, хотя статистическое ускорение пока нельзя полностью сбрасывать со счетов, оно, по-видимому, не является основным механизмом генерации быстрых частиц.

На этом мы заканчиваем обзор физических условий в магнитосфере. Напомним, что задача обзора состояла в характеристике наиболее существенных параметров и процессов с точки зрения современных экспериментальных и теоретических результатов, а также в изложении аргументов, на основе которых мы считаем первоочередным и наиболее перспективным направлением в теории ускорения частиц радиационных поясов исследование переноса частиц поперек дрейфовых оболочек. Поэтому ряд представляющих большой интерес для других разделов физики магнитосферы вопросов (прежде всего ионосферные процессы и свойства солнечного ветра), а также многие результаты морфологического исследования различных явлений не получили сколько-нибудь подробного освещения. Не были затронуты и некоторые дискуссионные вопросы, по которым отсутствует единство мнений.

## Глава II

### **Радиационные пояса Земли**

#### **§ 4. Дрейф частиц в поле внутриземных токов**

Прежде чем переходить к анализу экспериментальных данных о радиационных поясах, целесообразно рассмотреть основные свойства той области, в которой локализованы высокоэнергичные частицы (с энергиями  $\gtrsim 40$  кэВ). Эта область занимает сравнительно небольшой объем, и ее граница, по-видимому, совпадает с границей хвоста магнитосферы. В этом параграфе будут рассмотрены в основном кинематические вопросы (т. е. геометрия дрейфовых орбит частиц). Рассмотрение основано на теории дрейфа и, прежде всего на использовании двух первых адиабатических инвариантов — магнитного момента и продольного действия. В настоящее время общая теория ловушек достаточно широко известна, и поэтому будут рассмотрены лишь те вопросы, в которых проявляется специфика геомагнитного поля.

Область захваченной радиации несколько условно можно разделить на внутреннюю и внешнюю части, в первой из которых поле определяется внутриземными токами, а во второй становятся существенными токи на границе магнитосферы. В магнитно-спокойное время к внутренней области можно отнести район, ограниченный силовыми линиями, удаленными в плоскости экватора от центра Земли примерно на  $5a$  и опирающимися на 63-ю геомагнитную параллель. Во время возмущений эта граница несколько сдвигается к Земле, однако, даже во время наиболее мощных бурь вряд ли оказывается ближе  $3,5a$  в плоскости экватора. На больших высотах поле во внутренней области близко к дипольному.

Дрейфовые орбиты частиц в поле диполя вследствие симметрии лежат на оболочках, образуемых вращением силовых линий вокруг магнитной оси. Точки отражения дрейфуют по кругам с постоянной напряженностью. Рассмотрим, прежде всего, временные параметры дрейфа. Для большинства вопросов теории поясов (кроме проблемы устойчивости) нет необходимости учитывать конечность ларморовского радиуса и циклотронной частоты: можно считать, что  $r_H = 0$ , а  $\omega_H \rightarrow \infty$ . Период колебаний частицы между точками отражения  $\tau_\theta$  (индекс  $\theta$  означает, что при колебаниях изменяется полярный угол  $\theta$ ) зависит от скорости частицы  $v$ , значения  $\theta$  в зеркальной точке ( $\theta = \theta_3$ ) и от параметра силовой линии  $L$  (расстояния от диполя до вершины силовой линии; здесь и всюду в дальнейшем  $L$  измеряется в радиусах Земли  $a$  и является безразмерной величиной):

$$\tau_\theta = 6,3 \cdot 10^{-2} \frac{L}{\beta} f_\theta(\theta_3) \text{ с}, \quad (4.1)$$

где  $\beta = v/c$ , а функция  $f_\theta(\theta_3)$  монотонно изменяется от 1 при  $\theta \rightarrow \pi/2$  до  $\approx 2$  при  $\theta = 0$ . Как правило, время  $\tau_\theta$  используется лишь для оценок, и поэтому можно считать, что  $f_\theta = 1$ . Порядок величины  $\tau_\theta$  для электронов — 0,1–1 с.

Скорость дрейфа по долготе  $v_\varphi$  для частиц с зеркальными точками вблизи экватора, очевидно,  $\propto \omega_H r_H \frac{\partial r_H}{\partial R}$  ( $R$  — радиус-вектор, отсчитываемый от диполя).

Обозначим через  $\epsilon$  полную энергию частицы в единицах  $Mc^2$  ( $M$  — масса данной частицы), через  $P$  — импульс в единицах  $Mc$  ( $\epsilon$  и  $P$  — безразмерные числа и  $\epsilon^2 = P^2 + 1$ ) и через  $\omega_H^{(0)}$  — нерелятивистскую циклотронную частоту  $eH/(Mc)$ . Учитывая, что  $H \propto R^{-3}$ , получим, что скорость дрейфа пропорциональна  $P^2 L^2 / \epsilon$ . Расчеты [77] приводят к следующим выражениям для периода долготного дрейфа

$$\tau_\varphi = \frac{2\pi a L}{v_\varphi} : \quad \tau_\varphi = \begin{cases} \frac{44}{LE} f_\varphi(\theta_3) \text{ мин} & (E \ll Mc^2), \\ \frac{88}{LE} f_\varphi(\theta_3) \text{ мин} & (E \gg Mc^2), \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $E$  — кинетическая энергия в МэВ. Функция  $f_\varphi(\theta_3)$  определяет зависимость  $\tau_\varphi$  от широты зеркальной точки. В плоскости экватора  $f_\varphi = 1$ , при  $\theta_3 \rightarrow 0$  функция  $f_\varphi \approx 1,5$ . В случае необходимости таблицы и графики для точного определения  $\tau_\varphi$  и  $\tau_\theta$  можно найти в обзоре [78].

Из сравнения (4.1) и (4.2) видно, что при  $1 \leq L \leq 10$   $\tau_\varphi \gg \tau_\theta$  вплоть до энергий  $\sim 100$  МэВ; следовательно, всюду в радиационных поясах долготный дрейф происходит значительно медленнее, чем колебания по силовой линии.

Если процессы, приводящие к изменению адиабатических инвариантов, энергии  $\epsilon$  или числа частиц в некоторой силовой трубке поля, характеризуются временами  $\tau \gg \tau_\theta$ , то вдоль силовых линий устанавливается квазистационарное (изменяющееся за время  $\gtrsim \tau \gg \tau_\theta$ ) распределение частиц, однозначно связанное с угловым распределением и спектром в плоскости экватора. Пусть  $f = f(\eta, P_\parallel, P_\perp)$  — функция распределения, зависящая от продольной и поперечной к полю компонент импульса и от заменяющей координату вдоль силовой линии величины  $\eta = H/H_{\min}$ , где  $H$  — поле в данной точке, а  $H_{\min}$  — минимальное на силовой линии значение напряженности. Функция  $f$  должна удовлетворять дрейфовому кинетическому уравнению. Общим решением этого уравнения в стационарном случае является, как известно, произвольная функция двух дрейфовых интегралов движения. В качестве последних удобно выбрать абсолютную величину импульса и адиабатический инвариант  $\mu = (\sin^2 \alpha)/\eta$  ( $\alpha$  — угол между скоростью и силовой линией). Для однозначного определения  $f$  необходимо задать значения этой функции при  $\eta = 1$  (при  $\eta > 1$  некоторые частицы могут не доходить до точки с данным  $\eta$ , и их распределение не зависит от  $f(\eta)$ ).

Если при  $\eta = 1$   $f = f_0(P, \sin^2 \alpha_0)$ , то при произвольном  $\eta$  функция определяется заменой в  $f_0$  величины  $\sin^2 \alpha_0$  на  $(\sin^2 \alpha)/\eta$ . Таким образом, плотность частиц в произвольной точке силовой линии есть

$$n(\eta) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi P^2 f(P, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \, dP = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi P^2 f_0\left(P, \frac{\sin^2 \alpha}{\eta}\right) \sin \alpha \, d\alpha \, dP. \quad (4.3)$$

Отметим один важный частный случай. Если  $f_0 = \psi(P) \sin^\nu \alpha_0$ , то, как легко видеть,

$$f(\eta, P, \alpha) = \psi(P) \eta^{-\nu/2} \sin^\nu \alpha. \quad (4.4)$$

Угловое распределение и спектр одинаковы вдоль всей силовой линии, а плотность частиц изменяется как  $\eta^{-\nu/2}$ . Распределение (4.4) позволяет аппроксимировать простыми выражениями экспериментальные данные и особенно удобно для теоретических расчетов.

Полученные соотношения не содержат явной зависимости  $\eta$  от координат и поэтому справедливы не только для диполя, но и для любой магнитной ловушки, в которой  $H_{\max} \gg H_{\min}$ . В случае диполя, кроме того, в силу аксиальной симметрии, значения стационарной функции распределения одинаковы вдоль линий  $H = \text{const}$  на оболочках  $L = \text{const}$ . При произвольной инжекции частиц такое аксиально-симметричное распределение устанавливается за время  $t \sim \tau_\varphi^2 / \Delta\tau_\varphi$  ( $\Delta\tau_\varphi$  — разброс значений дрейфовых периодов инжектированных частиц, обусловленный разбросом по энергиям).

Учет сравнительно небольших отклонений поля внутриземных токов от дипольного не приводит к качественным изменениям картины дрейфа. Как показал Мак-Илвайн [79], дрейфовые оболочки частиц и в этом случае не зависят (или зависят очень слабо) от широты точки отражения. Доказательство основано на численном анализе дрейфовых оболочек в реальном геомагнитном поле. С помощью счетной машины по заданному скалярному потенциалу рассчитываются силовые линии и поверхности

$$H = \text{const} \quad \text{и} \quad I = \int_z^{z^*} \sqrt{1 - \frac{H}{H_3}} dz = \text{const}.$$

Интеграл  $I$  берется вдоль силовых линий между точками с равными значениями поля. В стационарном поле  $I$  является вторым адиабатическим инвариантом. Расчет дрейфовых оболочек на основе вычисления двух инвариантов практически оказался значительно более эффективным, чем непосредственное решение уравнений дрейфа. Анализ показал, что частицы с любыми  $\alpha_0$ , первоначально находившиеся на одной и той же силовой линии, дрейфуют почти по одной и той же поверхности. Как известно [80], при этом линии  $H = \text{const}$  на дрейфовых оболочках являются линиями постоянной плотности частиц.

Однако качественная близость характера дрейфа частиц в поле диполя и в поле внутриземных токов отнюдь не означает, что различия пренебрежимо малы. Если вблизи экваториальной плоскости на высотах  $\gtrsim 3000$  км ( $R \gtrsim 1,5a$ ) можно использовать приближение нецентрального (сдвинутого примерно на 500 км от центра Земли по направлению к Восточной Сибири) диполя, то на меньших высотах необходимо учитывать более высокие гармоники.

В работе [79] был введен параметр магнитной оболочки  $L$ , соответствующий вдали от Земли расстоянию от вершины силовой линии до диполя, и указан способ вычисления  $L$  по географическим координатам точки. Такой расчет можно провести на машинах. В настоящее время построены карты линий  $L = \text{const}$  на расстояниях от 0 до 3000 км от поверхности Земли с шагом 100 км. С помощью этих карт легко определить значение  $L$  в любой точке с точностью, в пределах которой само понятие  $L$ -координаты имеет смысл (1–2 %). На рис. 10 приведена в качестве примера одна из карт линий  $L = \text{const}$ ,  $H = \text{const}$  на высоте 1000 км. Карты построены в Годдардском центре космических исследований (США).

Расчет дрейфовых оболочек позволил ввести естественную систему координат для описания частиц радиационных поясов [79]. Одной из координат является пара-

метр  $L$ , а другой — напряженность поля  $H$ <sup>1)</sup>. Если в радиационных поясах за время порядка  $\tau_\varphi$  не происходит каких-либо возмущений, то интенсивность при данных  $L$  и  $H$  не зависит от долготы. Физический смысл использования  $L$  и  $H$  в качестве координат состоит в том, что если рассматривать  $H$  как напряженность поля в зеркальной точке некоторой частицы, то изменения  $L$  и  $H$  имеют совершенно различную природу. Изменение  $L$  связано с переносом частиц поперек дрейфовых оболочек, и с этой точки зрения наиболее эффективны возмущения поля, временной масштаб которых порядка периода дрейфа  $\tau_\varphi$  (как было показано в [80], при медленных в сравнении с  $\tau_\varphi$  вариациях поля частица следует за дрейфовой оболочкой, и при возвращении поля к исходному состоянию восстанавливается исходное распределение частиц). Изменения положения зеркальных точек на силовых линиях обусловлены нарушением первых двух адиабатических инвариантов — магнитного момента и «продольного действия»

$$I = \int_{z_1}^{z_2} P_{||} dz.$$

Магнитный момент нарушается под действием возмущений с частотами  $\omega \gtrsim \omega_H$  или волновыми числами  $k \gtrsim 1/r_H$ . Нарушения второго инварианта связаны с возмущениями, у которых либо  $\omega \gtrsim \tau_\theta^{-1}$ , либо  $m \gtrsim \tau_\varphi/\tau_\theta$  ( $m$  — номер гармоники в разложении поля возмущения в ряд Фурье по долготе). Эти масштабы много меньше, а частоты много больше, чем в случае нарушения  $L$ .

До разработки системы координат  $L, H$  экспериментальные данные о поясах на высотах  $\lesssim 2000$  км практически не поддавались количественному анализу. На этих высотах распределение быстрых частиц характеризуется резкими градиентами как вдоль силовых линий (вследствие быстрого спада плотности холодной плазмы с высотой), так и поперек дрейфовых оболочек, расстояния между которыми на малых высотах значительно меньше, чем в экваториальной плоскости. Однако введение системы координат Мак-Илвайна позволило систематизировать данные и вскрыть простые закономерности на первый взгляд в совершенно хаотических наборах точек.

В настоящее время различные системы координат, основанные на использовании в качестве одной из систем координатных поверхностей  $L$ -оболочки, широко применяются как при анализе экспериментальных данных, так и в теоретических работах. Параметр  $L$  обычно измеряют в земных радиусах.

Таким образом, стационарная функция распределения на больших высотах зависит от трех переменных  $L, P$  и  $\alpha$  и полностью определяется экваториальным распределением.

Рассмотрим теперь изменения энергии и углового распределения частиц радиационных поясов при медленных в сравнении с  $\tau_\theta$  вариациях магнитного поля. Исходное поле будем считать дипольным.

В зависимости от характера возмущения вариации могут быть обратимыми и необратимыми. При обратимых вариациях восстановление исходного поля сопровождается восстановлением исходного распределения частиц, а при необратимых

<sup>1)</sup> Часто вместо поля  $H$  используют магнитную индукцию  $B$ , которая, естественно, в магнитосфере тождественно равна  $H$ .

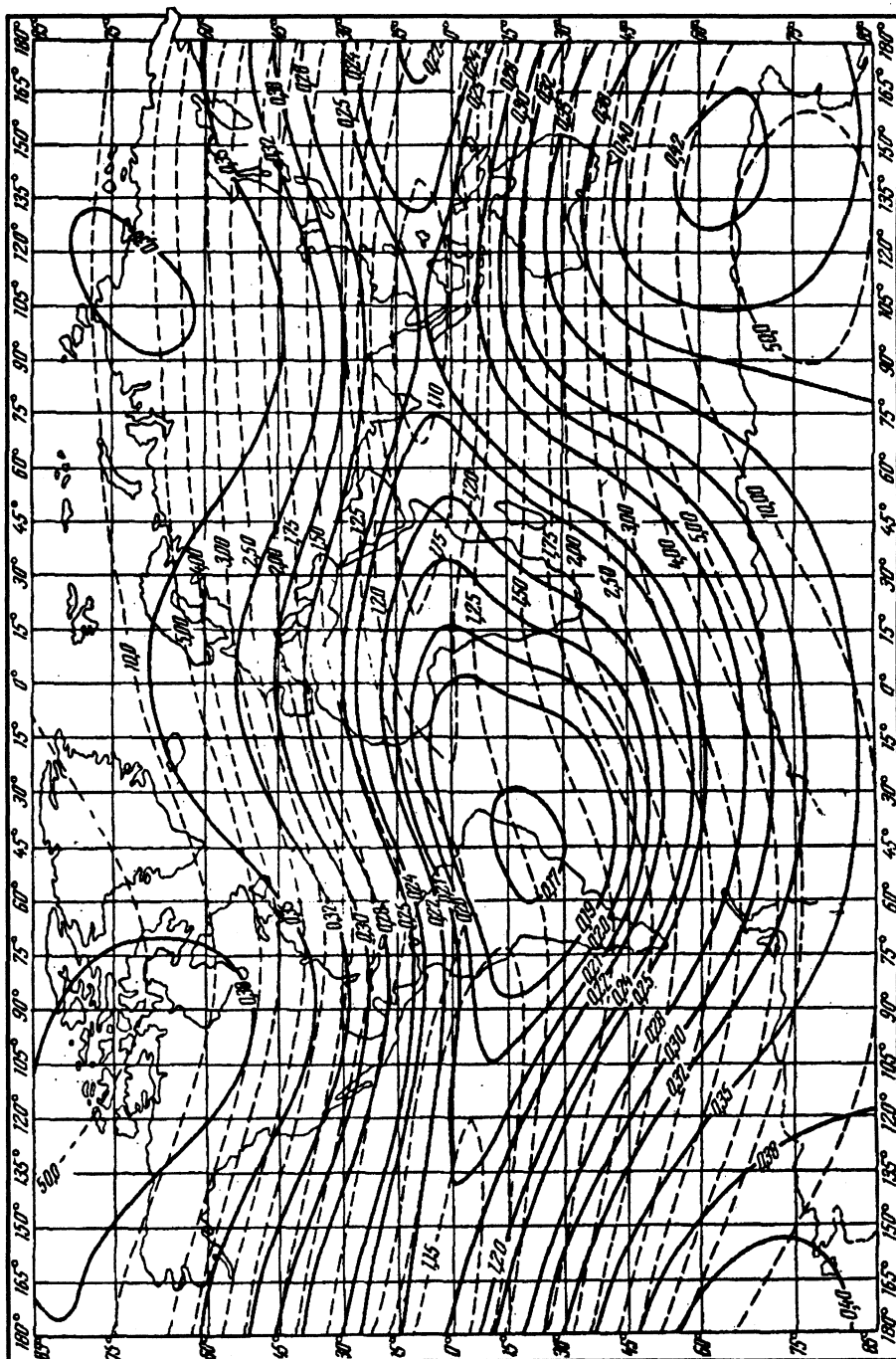


Рис. 10. Линии  $L = \text{const}$  (пунктир) и  $H = \text{const}$  (сплошные линии) на высоте 1000 км

возмущениях параметр  $L$ , импульс  $P$  и экваториальный угол между скоростью и силовой линией  $\alpha_0$  могут в конце цикла иметь значения, отличные от начальных.

Реальные геомагнитные возмущения вызывают, как правило, и обратимые и необратимые вариации. Обратимые изменения в радиационных поясах могут быть связаны либо с медленными в сравнении с  $\tau_\varphi$  ( $\lesssim 1$  часа) возмущениями, либо с аксиально-симметричной частью возмущения любых временных масштабов.

В первом случае обратимость обусловлена уже упомянутой инвариантностью дрейфовой оболочки [80]: хотя при изменениях поля оболочка деформируется, дрейфовая траектория частицы следует за изменениями оболочки. Магнитный поток через траекторию зеркальной точки частицы не меняется и является третьим адиабатическим инвариантом частицы в магнитной ловушке [80].

При аксиально-симметричных относительно магнитной оси возмущениях обратимость следует непосредственно из закона сохранения обобщенного момента импульса

$$\mathbf{M} = \left[ \mathbf{r} \left( \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right], \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы,  $\mathbf{P}$  — ее импульс,  $e$  — заряд,  $c$  — скорость света и  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал поля. При аксиальной симметрии ( $\partial A / \partial \varphi = 0$ ) сохраняется проекция  $M$  на ось симметрии. В дрейфовом приближении член  $eA/c \gg P$  ( $A \sim H r$  и  $cP/(eA) \sim r_H/r \ll 1$ , где  $r$  — масштаб неоднородности поля). Отсюда следует, что с точностью до небольших осцилляций при ларморовском вращении сохраняется величина

$$M_z = r \sin \theta A_\varphi, \quad (4.6)$$

где  $r, \varphi, \theta$  — сферические координаты (полярная ось направлена по магнитной оси). Но выражение  $r \sin \theta A_\varphi = \text{const}$  является уравнением силовой линии, и поэтому из сохранения  $M_z$  следует, что частица при аксиально-симметричных полях движется вместе с силовыми линиями и по окончании возмущения возвращается на исходную оболочку. Теория обратимых вариаций вблизи плоскости экватора развита в [9].

В [81] рассматривалась возможность формирования радиационных поясов за счет некоторого гипотетического процесса, при котором захваченные частицы регулярно сносятся к Земле. Из (4.5) следует, что такой процесс не может быть обусловлен электромагнитным полем, так как для регулярного радиального дрейфа необходимо аксиально-симметричное электрическое поле  $E_\varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_\varphi}{\partial t}$ , движение в котором обратимо.

Необратимые смещения частиц происходят под действием асимметричных возмущений электрического поля с характерными временами  $\tau \lesssim \tau_\varphi$ . В первом приближении по амплитуде возмущения среднее смещение равно нулю и перенос имеет диффузионный характер. Однако среднее смещение, квадратичное по амплитуде возмущения, не равно нулю.

Исследование конкретного механизма переноса является одной из основных задач теории радиационных поясов. Представляет интерес исследовать изменение углового распределения и энергии частиц при изменении параметра  $L$  и сохранении первых двух инвариантов. Эти результаты имеют силу при любом механизме переноса, если временные и пространственные масштабы возмущений достаточно велики.



Рассмотрим эту задачу в релятивистском случае, считая, что в начале и конце возмущения поле является дипольным и что параметр магнитной оболочки изменяется от  $L$  до  $L'$  [82]. Вынося адиабатические инварианты  $P/\sqrt{H}$  и  $\int_{-l_0}^{+l_0} P_{||} dl$  через  $P = \varepsilon\beta$  ( $\beta = v/c$ ) и поле в зеркальной точке  $H_3$ , имеем:

$$\frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{H_3}} = \frac{\varepsilon'\beta'}{\sqrt{H'_3}}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon\beta \int_0^{l_0} \sqrt{1 - \frac{H(l)}{H_3}} dl = \varepsilon'\beta' \int_0^{l'_0} \sqrt{1 - \frac{H(l')}{H'_3}} dl', \quad (4.8)$$

где интегралы по  $dl$  и  $dl'$  берутся соответственно вдоль силовых линий с параметрами  $L$  и  $L'$ . Вынося  $H$  и  $dl$  через магнитную широту  $\lambda$  и обозначив через  $\lambda_0$  и  $\lambda'_0$  значения  $\lambda$  в точках отражения, получаем:

$$\varepsilon\beta = \varepsilon'\beta' \left( \frac{L'}{L} \right)^{3/2} \frac{\cos^3 \lambda'_0}{\cos^3 \lambda_0} \sqrt{\frac{1 + 3 \sin^2 \lambda_0}{1 + 3 \sin^2 \lambda'_0}}, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon\beta = \varepsilon'\beta' \left( \frac{L'}{L} \right)^{3/2} \frac{\Psi(\lambda'_0)}{\Psi(\lambda_0)}, \quad (4.10)$$

при этом

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \int_0^x \sqrt{1 - \frac{\cos^6 \varphi (1 + 3 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{\cos^6 \varphi (1 + 3 \sin^2 \varphi)^{1/2}}} \times \\ \times \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi \approx 1,78x^2 - 0,79x^3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Последнее соотношение является аналитической аппроксимацией результатов численного табулирования  $\Psi(x)$  и справедливо с ошибкой  $< 1\%$  на отрезке  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Из (4.9)–(4.11) находим, что  $\lambda'_0$  определяется уравнением

$$f(\lambda'_0) = \sqrt{\frac{L}{L'}} f(\lambda_0), \quad (4.12)$$

при этом

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{x^2(1 - 0,44x)\sqrt{1 + 3 \sin^2 x}}. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.12) легко решается с помощью таблицы значений  $f(x)$  (табл. 2). Затем из (4.10) определяется  $P'$ . При  $\lambda_0 = 0$  всегда  $\lambda'_0 = 0$  и  $P' = P(L/L')^{3/2}$  (поскольку  $P_{||} = 0$ , изменение  $P = P_{\perp}$  определяется сохранением магнитного момента). При  $\lambda_0 \rightarrow \pi/2$ , наоборот,  $P_{\perp} = 0$  и  $P' = PL/L'$  (инвариант продольного действия сводится к  $LP$ ). Оказывается, что при  $\lambda_0 \leq 30^\circ$  при изменении  $L$  в 3–4 раза  $P' \approx P(L/L')^{3/2}$  с ошибкой не более 3%. Следовательно, полный импульс частиц с точками отражения вблизи плоскости экватора изменяется так же как  $P_{\perp}$ . Широта точек отражения  $\lambda'_0 \approx (L'/L)^{1/4} \lambda_0$ . Аналогичные расчеты в нерелятивистском случае были приведены в [13].

Таблица 2

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0,38	6,13	0,70	1,08	1,00	0,21
0,40	5,41	0,72	0,98	1,02	0,19
0,42	4,80	0,74	0,88	1,04	0,17
0,44	4,27	0,76	0,80	1,06	0,15
0,46	3,80	0,78	0,72	1,08	0,13
0,48	3,40	0,80	0,65	1,10	0,11
0,50	3,05	0,82	0,58	1,12	0,10
0,52	2,74	0,84	0,52	1,14	0,08
0,54	2,46	0,86	0,47	1,16	0,07
0,56	2,21	0,88	0,42	1,18	0,06
0,58	1,99	0,90	0,38	1,20	0,05
0,60	1,80	0,92	0,34	1,22	0,04
0,62	1,63	0,94	0,30	1,24	0,04
0,64	1,47	0,96	0,27	1,26	0,03
0,66	1,32	0,98	0,24	1,28	0,02
0,68	1,20			1,30	0,02

Большинство частиц радиационных поясов имеют точки отражения на широтах  $\lambda \leq 30^\circ$  (и, следовательно, углы  $\alpha_0 \geq \arcsin \eta^{-1/2} (\pi/3) = 36^\circ$ ). Запас частиц с данной энергией в силовой трубке сечением  $1 \text{ см}^2$  при  $\eta = 1$  определяется экваториальным распределением  $f_0(\varepsilon, \alpha_0, L)$ . Поскольку за время  $\tau_\theta$  каждая частица дважды пересекает экваториальную плоскость, запас можно определить как

$$\begin{aligned}
 N &\approx \pi \int_0^{\pi/2} f_0(\varepsilon, \alpha_0, L) v_{\parallel} \tau_\theta(\alpha_0, v) \sin \alpha_0 d\alpha_0 = \\
 &= \pi v \tau_\theta(\pi/2, v) \int_0^{\pi} f_0(\varepsilon, \alpha_0, L) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 f_\theta(\alpha_0) d\alpha_0, \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

где  $f_\theta(\alpha_0)$  — функция, определяющая зависимость  $\tau_\theta$  от  $\alpha_0$ . Как уже отмечалось,  $f_\theta(\alpha_0) \approx 1$ . Запас частиц  $N(\gamma)$  с  $\alpha_0 \geq \gamma$  определяется таким же интегралом в пределах от  $\gamma$  до  $\pi/2$ . При изотропном распределении

$$\frac{N(\gamma)}{N} \approx \frac{\int_\gamma^{\pi/2} f_0(\alpha_0) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 d\alpha_0}{\int_\gamma^{\pi/2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 d\alpha_0} = 1 - \sin \gamma,$$

и если  $\gamma = 36^\circ$ , то  $N(\gamma)/N \approx 60\%$ , а если  $f_0(\alpha_0) \propto \sin^2 \alpha_0$ , то  $N(\gamma)/N \approx 90\%$ .

Еще более значительный в процентном отношении вклад эти частицы вносят в плотность вблизи экваториальной плоскости

$$n_{\Sigma} \propto \int_0^{\pi/2} f_0(\alpha_0) \sin \alpha_0 d\alpha_0$$

или в усредненную по всем направлениям интенсивность  $nv$ : при  $f_0 = 1$  (изотропное распределение)  $n(\gamma)/n \approx 80\%$ .

Поэтому при изучении динамики основной массы частиц можно ввести функцию распределения  $\Theta = \Theta(J, L, t)$  такую, что величина

$$d\nu = \Theta(J, L, t) dJ dL \quad (4.15)$$

дает число частиц между оболочками  $L, L + dL$  в интервале значений  $J = PL^{3/2}$  от  $J$  до  $J + dJ$ , и исключить угловое распределение [6]. Интенсивность частиц с  $P > P_0$  вблизи плоскости экватора выражается через  $\Theta$  следующим соотношением:

$$I_0(> P_0) = \frac{\hat{\alpha}}{2\pi W_0 L^2} \int_{P_0 L^{3/2}}^{\infty} \Theta(J, L, t) v(J, L) dJ, \quad (4.16)$$

где  $W_0$  — объем слоя между двумя оболочками с  $L \approx 1$ , отстоящими друг от друга на расстоянии 1 см в плоскости экватора,  $v(J, L)$  — скорость частицы, выраженная через  $J$  и  $L$ , и  $\hat{\alpha}$  — функционал углового распределения, очень слабо зависящий от степени анизотропии. В [11] рассмотрена зависимость  $\hat{\alpha}$  от  $\nu$  при аппроксимации углового распределения законом  $\sin^{\nu} \alpha_0$ . При  $\nu = 0$  (изотропия); 2; 4; 6; 8; 10  $\hat{\alpha}$  соответственно есть 1; 1,33; 1,60; 1,83; 2,04; 2,2. Если положить  $\hat{\alpha} = \text{const} \approx 1,5$ , то ошибка, возможная при наблюдаемой в радиационных поясах угловой анизотропии, будет значительно меньшей, чем неопределенность в абсолютных значениях измеряемых потоков из-за экспериментальных ошибок.

Введение функции  $\Theta$  позволяет резко упростить исследование процессов переноса и в то же время обеспечивает точность, вполне достаточную для сопоставления с экспериментом.

## § 5. Граница области захваченной радиации

Строгая количественная теория физических явлений, связанных с формированием хвоста магнитосферы, вряд ли может быть создана в ближайшие годы, так как взаимодействие геомагнитного поля с солнечной плазмой в этом районе существенно нелинейно. Сильная асимметрия задачи и необходимость последовательного учета бесстолкновительной диссипации, которая определяет характер взаимодействия плазмы с полем, создают пока непреодолимые трудности для количественного исследования. Есть основания считать, что изучение плазменной турбулентности в конце концов приведет к некоторой упрощенной системе уравнений типа уравнений Навье—Стокса и теплопроводности, которая будет приближенно, но достаточно строго описывать динамику плазмы с учетом бесстолкновительной диссипации <sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> В некоторых частных случаях это удастся сделать уже сейчас, см., например, [22, 23, 83].

Лишь на этой основе, по-видимому, удастся разработать полную теорию взаимодействия солнечного ветра с геомагнитным полем. В настоящее время возможен лишь полуэмпирический подход к задаче, основанный на качественном анализе экспериментальных данных.

С точки зрения теории радиационных поясов представляет большой интерес проблема границы области захваченной радиации. В работах [84, 85] было показано, что на высотах  $\sim 1000$  км радиационные пояса имеют резкие границы по широте. При пересечении этих границ потоки электронов с энергиями  $> 40$  кэВ изменяются на несколько порядков на расстояниях  $\lesssim 100$  км. На дневной стороне граница расположена в области более высоких широт, чем на ночной. В магнитно-спокойное время дневные границы расположены при  $\pm 75-77^\circ$ , а ночные — при  $\pm 67-68^\circ$ . С ростом возмущенности границы сдвигаются к экватору (до  $\pm 60^\circ$  на ночной стороне). Измерения вблизи плоскости экватора [86] показывают, что в спокойное время на дневной стороне граница пояса электронов с энергиями  $\sim 40$  кэВ совпадает с границей магнитосферы ( $\sim 10a$  от центра Земли в лобовой точке). На ночной стороне граница расположена значительно ближе (при  $\sim 7,5a$ ). Исследования на спутниках серии «Электрон» [87] в утренней и ночной областях магнитосферы позволили проследить границу в большой области широт и привели к выводу о том, что граница радиационных поясов совпадает с силовыми линиями и проектируется вдоль них с плоскости экватора на ионосферу. Эти исследования подтвердили также смещение границы захваченной радиации к Земле при геомагнитных возмущениях [88].

Таким образом, граница области, в которой эффективно удерживаются быстрые частицы, скорее всего тождественна внутренней границе хвоста магнитосферы.

В работах [6] и [8] было показано, что граница геомагнитной ловушки не совпадает с границей магнитосферы и на ночной стороне должна лежать ближе к Земле, чем на дневной. Этот вывод следует непосредственно из анализа дрейфовых орбит в экваториальной плоскости, которые отождествлялись в [6] и [8] с линиями равной напряженности геомагнитного поля. Аналогичные соображения были развиты в [98].

Очевидно, что экваториальное сечение границы магнитосферы не является линией  $H = \text{const}$ , так как на границе  $H^2/(8\pi)$  равно давлению солнечного ветра, которое максимально в лобовой точке и убывает по направлению к утренней и вечерней сторонам. Следовательно, линия  $H = H_s$  ( $H_s$  — поле в лобовой точке) разбивает экваториальное сечение на две области. В одной из них  $H > H_s$  и дрейфовые орбиты замыкаются в пределах магнитосферы. В другой области  $H < H_s$  и линии  $H = \text{const}$  выходят в тонкий пограничный слой между геомагнитным полем и солнечным ветром. Этот слой сильно турбулизован, так что возможна эффективная диффузия частиц из межпланетного пространства в магнитосферу и наоборот. Если вне магнитосферы электроны с энергиями  $> 40$  кэВ отсутствуют (что, как правило, и наблюдается на эксперименте), то они должны в течение времени  $\sim \tau_\phi$  исчезнуть и из области  $H < H_s$ . Поле внешних токов в плоскости экватора параллельно полю земного диполя, но на равных расстояниях от Земли на ночной стороне меньше, чем на дневной. Поэтому на ночной стороне линия  $H = H_s$  приближается к Земле.

Граница  $H = H_s$ , была названа в [6] и [8] сепаратрисой магнитосферы. Отмеченные выше закономерности справедливы не только для частиц с нулевой продольной скоростью, дрейфующих по сепаратрисе, но и для частиц с точками отражения на широтах  $\lambda_m \lesssim 30^\circ$ .

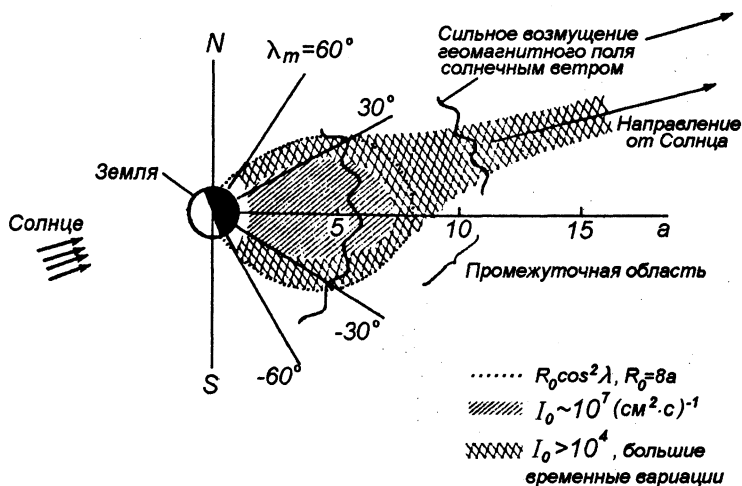
При геомагнитных возмущениях магнитосфера сжимается и сепаратриса приближается к Земле. В процессе восстановления поля некоторые частицы, первоначально находившиеся вне сепаратрисы, могут оказаться на замкнутых в пределах магнитосферы дрейфовых орбитах. Подробный анализ этого механизма захвата для случая плоской границы магнитосферы был проведен в [8] при обсуждении возможных источников частиц радиационных поясов.

Хотя рассмотренные выше явления с качественной точки зрения, несомненно, должны иметь место и частично подтверждаются данными эксперимента, концепция границы радиационных поясов [6, 8] сталкивается с рядом трудностей. Эксперимент (к моменту завершения работ [6] и [8] были опубликованы результаты [84] и [86]) показывает, что границей радиационных поясов на ночной стороне является почти одна и та же силовая линия, независимо от положения точек отражения частиц. Между тем, как легко видеть из рис. 3<sup>3)</sup>, длина силовой линии, проходящей через полуденную точку сепаратрисы, значительно больше, чем на полуночном меридиане (следует сравнить силовую линию, касающуюся границы магнитосферы, с силовой линией, проходящей на ночной стороне через 70-ю параллель). Поскольку дрейф частиц с точками отражения вблизи Земли определяется сохранением продольного действия, которое в этом случае пропорционально длине силовой линии, то, казалось бы, эти частицы должны дрейфовать по более удаленным от Земли на ночной стороне линиям. Между тем этого не наблюдается.

Вторая трудность связана с морфологией полярных сияний. Очевидно, что из развитых выше соображений с необходимостью следует вывод о возбуждении сияний во всей области Северной и Южной полярных шапок (районов, ограниченных проекциями сепаратрисы вдоль силовых линий на Землю). В то же время на самом деле светятся лишь границы шапок, причем ширина светящейся полосы иногда бывает  $\lesssim 1$  км.

Открытие нейтрального слоя [25] автоматически устраняет эти трудности. Интерпретация полярных сияний на основе модели магнитосферы [25] была приведена выше (§ 2, с. 28). Столь же естественно объясняется и кажущаяся независимость границы захваченной радиации от широты зеркальных точек частиц. Деформация силовых линий в хвосте приводит к тому, что при расчете продольного действия необходимо учитывать участки, идущие вблизи границы слоя. Небольшой сдвиг по широте к полюсу вызывает в плоскости полуночного меридиана огромное удлинение силовых линий, и частицы с такими значениями второго инварианта уже не могут продрейфовать на дневную сторону и должны выйти в пограничный слой. Полуразность длин силовых линий, ограничивающих область захваченной радиации, составляет  $8 - 15a$  (в этих пределах укладываются оценки по самым различным моделям). Учитывая, что ширина хвоста  $\sim 40a$  и что магнитное поле, перпендикулярное «нейтральному» слою, может быть порядка  $10^{-5}$  Гс (см. с. 28), получаем, что магнитный поток между границами областей захваченной радиации с приэкваториальными и высокоширотными точками отражения  $\Phi \lesssim 10^{15}$  Мкс. Оценим теперь расстояние между этими границами у поверхности Земли. Считая, что поле  $H \approx 1$  Гс и что радиус проекции сепаратрисы на Землю  $r = a \cos \lambda_m^{(s)}$ , где магнитная широта

<sup>3)</sup> Результаты [6] и [8] были основаны на замкнутой модели магнитосферы (без учета в то время неизвестного нейтрального слоя), и поэтому рис. 3 ближе всего соответствует картине поля, принятой в [6] и [8].



**Рис. 11.** Области повышенной интенсивности электронов с энергией 40 кэВ на ночной стороне магнитосферы (сечение плоскостью полуночного меридиана)

границы  $\lambda_m \approx 70^\circ$ , получаем:

$$\Phi \approx 2\pi a \cos \lambda_m^{(s)} \cdot \Delta z \cdot H,$$

откуда  $\Delta z \lesssim 10^6$  см и, следовательно, обе границы практически совпадают. Сходные результаты получены в [50] при анализе конкретных моделей нейтрального слоя.

Из приведенных соображений следует, что вблизи нейтрального слоя вплоть до расстояний  $\sim 15\text{--}22a$  должна наблюдаться узкая зона повышенной интенсивности электронов с энергиями  $\sim 40$  кэВ, что и было обнаружено в экспериментах на спутнике «Эксплорер-14» [91] (рис. 11).

Концепция [6] и [8] о механизме захвата частиц на замкнутые в магнитосфере орбиты при движении границы ловушки во время магнитных возмущений сохраняет силу и для модели [25]. Эффект вытягивания силовых линий на ночной стороне и резкого ослабления поля вблизи экваториальной плоскости вносит новый элемент в механизм захвата — возможность сильного бетатронного ускорения частиц при частичном восстановлении поля по окончании возмущения. Как было показано в § 2, даже на сравнительно небольших расстояниях от Земли ( $\sim 10\text{--}20a$ ) поле в «нейтральном» слое убывает до  $\sim 0,3\gamma$  и становится в сотню раз меньше, чем у границы радиационных поясов. Поскольку в солнечном ветре за фронтом ударной волны возникают протоны и электроны с энергиями соответственно  $\sim 10$  кэВ и 1 кэВ, бетатронное ускорение могло бы в принципе привести к захвату протонов с энергиями в десятки МэВ и релятивистских электронов. Основное ограничение возможности таких процессов связано с дрейфом частиц поперек «нейтрального» слоя и выходом в межпланетное пространство.

Пусть  $Z(z)$  — масштаб неоднородности нормальной компоненты поля  $h$  в «нейтральном» слое. Скорость дрейфа в направлении  $y$  (к границе магнитосферы в нерелятивистском случае составляет  $\sim \frac{v_\perp^2}{2\omega_H} \cdot \frac{1}{Z}$ ). Величина  $v_\perp^2/\omega_H$  — адиабатический

инвариант, и поэтому скорость дрейфа изменяется как обратный масштаб неоднородности поля  $h$ . В «нейтральном» слое величина  $Z$  велика (по-видимому,  $\sim 10^2 a$ ). Наименьшее значение  $Z$  достигается вблизи границы области захваченной радиации, и поэтому захват определяется дрейфом частиц во время «втягивания» силовых линий из хвоста в район радиационных поясов. Если  $Z_{\min}$  — минимальное значение  $Z$ ,  $\tau$  — время «втягивания» и  $Y \approx 40a$  — ширина хвоста на ночной стороне, то условие захвата ( $\tau$  меньше времени дрейфа на расстоянии  $Y$ ) имеет вид

$$\frac{v_{\perp}^2}{2\omega_H} \tau \lesssim Y Z_{\min}. \quad (5.1)$$

Отсюда видно, какое большое значение для динамики радиационных поясов имеют тонкая структура района внутренней границы хвоста магнитосферы и временные масштабы ее вариаций. Как уже отмечалось в § 2, экспериментальные данные по этому вопросу пока весьма скудны.

В 1966 г. появилось несколько интересных работ по динамике рассматриваемого района магнитосферы [151–155], на которых необходимо хотя бы вкратце остановиться. В [151] показано, что в примыкающем на ночной стороне к области захваченной радиации приэкваториальном выступе (см. рис. 11) наблюдается сильная анизотропия углового распределения скоростей электронов с энергиями  $> 40$  кэВ. В отличие от радиационных поясов здесь явно преобладают частицы, у которых продольная по отношению к полю компонента скорости больше поперечной. Этот результат подтвержден в [152], где показано также, что силовые линии в выступе замыкаются через экваториальную плоскость. В области изменения знака параллельной экватору компоненты поля абсолютная величина напряженности не обращается в нуль и имеет значение  $\sim 1\gamma$ , что указывает на наличие заметной нормальной к плоскости экватора компоненты  $H$ . Как указывалось выше, по выступу дрейфуют захваченные частицы с точками отражения на высоких геомагнитных широтах. Вблизи экваториальной плоскости направление скоростей таких частиц близко к силовым линиям, чем и объясняется обнаруженная анизотропия распределения скоростей.

В работах [153, 154] описаны быстрые вариации электронных потоков во время сильной магнитной бури 17 апреля 1965 г. Как показано в этих работах, вскоре после внезапного начала бури при  $L > 5$  интенсивность электронов во внешней зоне резко упала, а затем в течение времени  $\leq 1$  часа сформировался новый пояс. Потоки электронов с энергиями свыше 300 кэВ возросли до величины, на порядок превышающей соответствующее значение до бури. Появились релятивистские электроны с энергиями свыше 5 МэВ. В [154] отмечается, что время формирования нового пояса совпало с магнитными бурями в зоне полярных сияний. Данные явления можно качественно понять на основе изложенных выше соображений о бетатронных эффектах при вытягивании силовых линий из области захваченной радиации в хвост и их обратном втягивании. Судя по результатам [153, 154], внутренняя граница выступа в начале бури сместилась до  $L \approx 5$ , что вполне возможно во время сильного возмущения. В связи с этим представляет большой интерес движение границы области захваченной радиации на малых высотах во время данной бури.

Остановимся, наконец, на работе [155], посвященной статистическому анализу временных сдвигов между усилением потоков электронов с энергиями  $> 100$  кэВ вблизи границы области захваченной радиации на ночной и дневной сторонах. Оказалось, что на дневной стороне такое усиление запаздывает на один час по сравнению с аналогичным эффектом на ночной стороне. Время запаздывания близко к полупериоду дрейфа электронов с энергиями 100 кэВ вдоль сепаратрисы. Результат [155] также показывает, что инжекция частиц в области захваченной радиации происходит на ночной стороне.

В [86] приведены контуры равной интенсивности электронов с энергиями  $> 40$  кэВ вблизи границы области захваченной радиации. Судя по этим данным,

ширина границы вблизи экватора  $\sim 1-3 \cdot 10^3$  км. Предположим, что  $\sim 3 \cdot 10^3$  км — типичное значение  $Z_{\min}$ . Значения  $\tau$  могут быть самыми различными. Время восстановления поля после бури составляет  $\sim 10^5$  с. С другой стороны, при развитии полярных бурь значительные изменения токов в электроструях (см. § 2) могут происходить в течение нескольких минут. Поскольку полярные электроструи расположены вдоль проекции границы зоны захваченной радиации на поверхность Земли и обусловлены резким повышением степени ионизации в  $E$ -слое ионосферы за счет сброса электронов с энергиями  $\gtrsim 40$  кэВ<sup>4)</sup>, естественно предположить, что  $DP$ -возмущения связаны с ускорением электронов хвоста при втягивании силовых линий в область захваченной радиации. Поэтому можно принять значение  $\tau \sim 10^2$  сек в качестве нижней границы  $\tau$ . Наконец, напряженность поля  $H_s$  в области захваченной радиации вблизи границы составляет  $\approx 50 \gamma$ . Отсюда и из (5.1) следует, что максимальные энергии частиц, захватываемых посредством данного механизма, составляют:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2} \lesssim \frac{e}{c} H_s \frac{Y Z_{\min}}{\tau} \approx 1 \text{ МэВ}. \quad (5.2)$$

(В случае электронов скорость дрейфа при таких энергиях определяется релятивистским соотношением и примерно в 2 раза больше, чем в (5.1), однако это не влияет на порядок величины оценки (5.2).) При более плавном восстановлении ( $\tau \sim 10^4-10^5$  с) предельная энергия уменьшается до 100–10 кэВ.

По-видимому, при вариациях поля чередуются сравнительно плавные и скачкообразные периоды, и поэтому часто вблизи границы области захваченной радиации наблюдается сильно зубчатое по  $L$  распределение интенсивности электронов с энергиями  $\sim 100$  кэВ [89]. В [89] показано, что имеется связь между появлением зубцов в распределении потоков быстрых электронов и развитием полярных бурь.

В работе [90] сообщается, что вблизи границы радиационных поясов наблюдается резкое изменение спектра электронов (в приближении экспоненциального спектра  $e^{-E/E_0}$  средняя энергия изменяется от 20 кэВ внутри до  $\sim 3$  кэВ снаружи области). Исследования проводились на сравнительно небольших высотах ( $< 3000$  км). Ширина области, в которой изменяется спектр, по данным [90] составляет  $\approx 1^\circ$ . Потоки малоэнергичных ( $\sim 10$  кэВ) электронов у границы в отдельных случаях достигали  $10^{10} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . По-видимому, эти электроны проникают в магнитосферу из турбулентной области между ударной волной и границей геомагнитного поля вдоль сепаратрисы и вызывают деформацию поля в хвосте. При удалении сепаратрисы часть этих электронов захватывается на замкнутые дрейфовые орбиты и ускоряется до энергий свыше 40 кэВ. Судя по изменению средней энергии, при этом длина силовой линии уменьшается в 2,7 раза (если наблюдаемое на малых высотах ускорение связано с сохранением продольного действия). Возможно также, что при частичном втягивании хвоста в ловушку поле усиливается примерно в 7 раз. В этом случае наблюдаемые на малых высотах частицы должны появляться вследствие интенсивного рассеяния в приэкваториальной области.

Изложенные выше соображения позволяют связать воедино ряд экспериментальных данных о физических явлениях на границе области захваченной радиации и приводят к разумным значениям основных численных характеристик. В дальней-

<sup>4)</sup> Электроны меньших энергий поглощаются в более высоких слоях атмосферы.



шем будет показано, что многие более тонкие эффекты, наблюдаемые на опыте, также согласуются с данной точкой зрения.

Отметим, что существуют и иные взгляды на механизм захвата частиц. В уже упоминавшихся работах [42–44] предполагается, что аналогичные процессы происходят не на ночной, а на дневной стороне. Ослабление поля приписывается гипотетическим токовым кольцам частиц, прорвавшихся не вблизи плоскости экватора, а через точки ветвления. Прорвавшиеся протоны вследствие дрейфа отклоняются к утренней, а электроны — к вечерней стороне, вследствие чего и возникают кольцевые токи. Однако данные экспериментов в космосе противоречат концепции [42–44]. Авторы [42–44] исходят из того, что даже в магнитно-спокойное время у границы магнитосферы наблюдаются протоны с энергиями 60–100 эВ и интенсивностью  $\sim 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Легко видеть, что этим параметрам соответствуют плотность  $\sim (3\text{--}4) \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$  и давление  $\sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ эрг/см}^3$ . Чтобы уравновесить такое давление, необходимо поле  $\sim 300 \gamma$ , в то время как поле у границы магнитосферы, по-видимому, в магнитно-спокойное время не превышает 60–70  $\gamma$ . При давлении  $5 \cdot 10^{-7} \text{ эрг/см}^3$  граница находилась бы, следовательно, не на одиннадцати, а на шести земных радиусах от центра Земли.

Второе противоречие концепции [42–44] с экспериментом — отсутствие мощных потоков протонов в указанной авторами области магнитосферы: по данным [92] интенсивности протонов с энергиями от 0,1 до 10 кэВ в утренней высокоширотной области не превышали порога чувствительности прибора ( $\sim 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ ). Поэтому совокупность выдвинутых в [42–44] гипотез представляется спорной.

С проблемой границы области захваченной радиации тесно связан вопрос о малоэнергичных ( $\sim 1$  кэВ) частицах. Повышенные интенсивности таких электронов были впервые обнаружены на больших расстояниях от Земли в экспериментах на 2-й советской космической ракете [93]. Вскоре при запусках геофизических ракет в ионосферу было установлено, что электроны таких энергий являются причиной возбуждения полярных сияний [94, 95]. Многочисленные исследования, проведенные в дальнейшем как на больших, так и на малых высотах (см. [92] и обзор [96]), показали, что частицы со средними энергиями  $\sim 1$  кэВ образуют так называемый самый внешний пояс радиации и охватывают Землю. На ночной стороне максимум этого пояса лежит вблизи границы зоны захваченной радиации, а на дневной стороне пояс, вероятно, замыкается вне магнитосферы (см. рис. 1).

По-видимому, малоэнергичные частицы зарождаются в солнечном ветре на фронте ударной волны и затем проникают в магнитосферу вдоль сепаратрисы. Электроны с энергиями  $\sim 1$  кэВ наблюдаются и в области захваченной радиации вплоть до  $L \sim 5$  на ночной стороне [97]. Возможный механизм их проникновения в эту область связан с дрейфом в электростатических полях, возбуждаемых ионосферными ветрами [57].

Таким образом, экспериментальные данные показывают, что во время магнитных возмущений внешняя часть области захваченной радиации заполняется частицами с энергиями от нескольких десятков кэВ и выше. Механизм захвата, вероятно, состоит в вытягивании силовых линий на ночную сторону, инъекции частиц солнечного ветра в сильно ослабленное поле и бетатронном ускорении этих частиц при втягивании силовых линий в зону захваченной радиации по окончании возмущения. В зависимости от временного хода восстановления поля при этом могут формироваться самые различные спектры частиц с энергиями вплоть до  $\sim 1$  МэВ.

Электроны и протоны с энергиями соответственно  $\sim 1$  и  $10$  кэВ проникают в ловушку вдоль сепаратрисы и в отсутствие возмущений, так как такие частицы всегда имеются в области между ударной волной и границей магнитосферы. По-видимому, описанные механизмы захвата являются основными источниками частиц радиационных поясов.

## § 6. Высокоэнергичные протоны в магнитосфере Земли

В §§ 6–7 будут изложены современные представления о радиационных поясах Земли (т. е. о потоках заряженных частиц с энергиями  $\gtrsim 50$  кэВ в области захваченной радиации). Следует иметь в виду, что информация, полученная за период с 1957 г., распределяется во времени весьма неравномерно.

В 1957–1961 гг. были установлены основные качественные особенности поясов и оценены порядки величин потоков частиц различных энергий в различных районах. Эти результаты позволили в дальнейшем осуществить более точные измерения (1962–1965 гг.), которые дали необходимый материал для выяснения природы поясов. Хотя уровень солнечной активности в 1957–1960 гг. (уникальный максимум) и в 1961–1965 гг. (спад и минимум активности) сильно различался, свойства радиационных поясов в среднем, по-видимому, оставались довольно стабильными. Однако к экстраполяции данных 1961–1965 гг. на более ранний период следует относиться с большой осторожностью. Поэтому подчеркнем, что настоящий обзор основан на данных, полученных после 1961 г., и рассматриваемая картина поясов, строго говоря, относится к периоду пониженной активности.

Протоны с энергиями в несколько десятков МэВ были впервые обнаружены еще при первых запусках искусственных спутников Земли [72, 78]. При исследованиях на спутнике «Эксплорер-XII» был открыт мощный пояс относительно малоэнергичных протонов (от 100 кэВ до  $\sim 2$  МэВ) [99], существование которого было подтверждено затем в дальнейших экспериментах на спутнике «Эксплорер-XIV» [86, 100]. В [5–10] было высказано предположение о том, что эти протоны возникают вследствие переноса с границы магнитосферы. В [11, 12] на основе этих соображений был выполнен расчет экваториального распределения протонов с энергиями от 100 кэВ до 40 МэВ. В качестве граничного условия был принят спектр [99] при  $L = 5$ . Результаты последующих измерений в пределах точности эксперимента совпадают с теоретическими кривыми [11, 12].

Наиболее подробные исследования протонов с энергиями выше 200 кэВ были проведены на спутниках серии «Электрон» [87, 101, 102] и «Реле-1» (США) [103, 104]. Результаты [87, 101, 102] хорошо совпадают с теорией [11, 12], в [103] имелось некоторое расхождение (максимумы протонов с энергиями 1–5 МэВ оказались на  $0,5a$  ближе к Земле), однако более детальная обработка и анализ этих данных [104] показывает, что в [103] имелись неточности. Окончательные результаты измерений на «Реле-1» [104] хорошо согласуются как с другими экспериментами, так и с теорией.

На рис. 12 приведены данные о распределении протонов с энергиями от 100 кэВ до 1,7 МэВ в плоскости экватора. Эти данные были получены еще в 1961 г., однако до недавнего времени имелась лишь краткая публикация [99]. Рис. 12 взят из работы [15].

Распределения протонов с энергиями от 1 до 30 МэВ, полученные на спутниках «Электрон», приведены на рис. 13 (данные также относятся к экваториальной плоскости).

Как уже отмечалось, результаты [104] хорошо согласуются с этим распределением. Наконец, на рис. 14 изображено экваториальное распределение наиболее энергичных протонов, полученное на спутниках «Электрон» и «Эксплорер-XV» [105].

Из рисунков видно, что вплоть до энергий  $\sim 30$  МэВ наблюдается определенная закономерность хода графиков интенсивностей протонов различных энергий: с ростом энергии увеличивается крутизна внешнего края пояса, а максимум приближается к Земле. Спектр с уменьшением  $L$  становится все более и более жестким.

Согласно [99] дифференциальный спектр протонов вблизи плоскости экватора имеет вид

$$\frac{\partial I_0}{\partial \epsilon} = S_0 e^{-E/E_0}, \quad (6.1)$$

где средняя энергия  $E$  зависит от  $L$  и при  $L = 5$  и 6 равно соответственно 120 и 60 кэВ. В этих двух точках хорошо

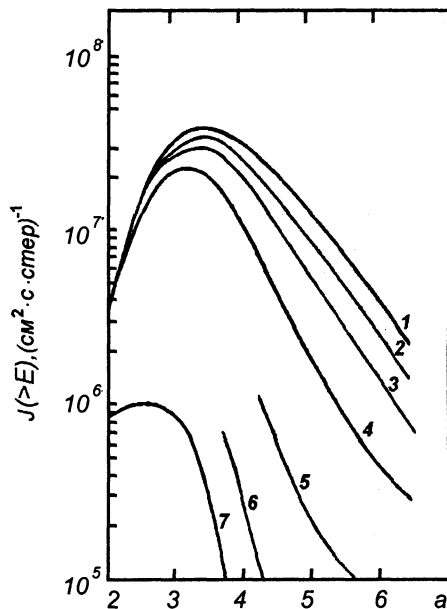


Рис. 12. Распределение потоков протонов с энергиями от 100 кэВ до 1,7 МэВ в плоскости экватора. 1 —  $E \geq 98$  кэВ; 2 —  $E \geq 134$  кэВ; 3 —  $E \geq 168$  кэВ; 4 —  $E \geq 268$  кэВ; 5 —  $E \geq 49$  кэВ; 6 —  $E \geq 988$  кэВ; 7 —  $E \geq 1,69$  МэВ

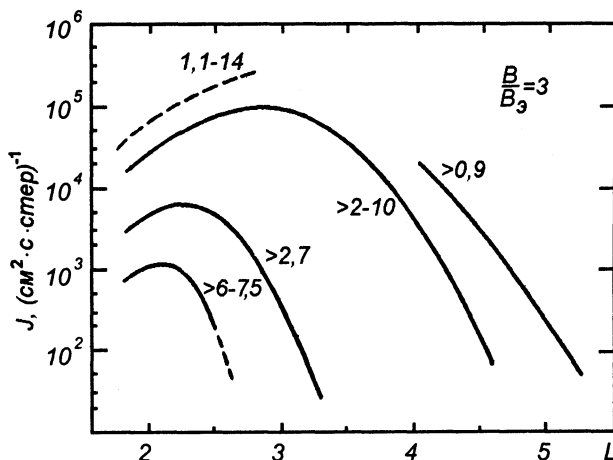


Рис. 13. Распределение протонов с энергиями от 1 до 30 МэВ вблизи экваториальной плоскости (на поверхности, где напряженность поля в 3 раза превышает экваториальное значение)

выполняется бетатронное соотношение:

$$\frac{\varepsilon_0(5)}{\varepsilon_0(6)} = \frac{H_0(5)}{H_0(6)}.$$

В работе [13] были проведены расчеты изменения энергии частиц при переходах между дрейфовыми оболочками в случае сохранения первых двух адиабатических инвариантов (см. § 4), и на основе полученных результатов проанализированы полные данные экспериментов в [99]. Исследование показало, что при энергиях, больших

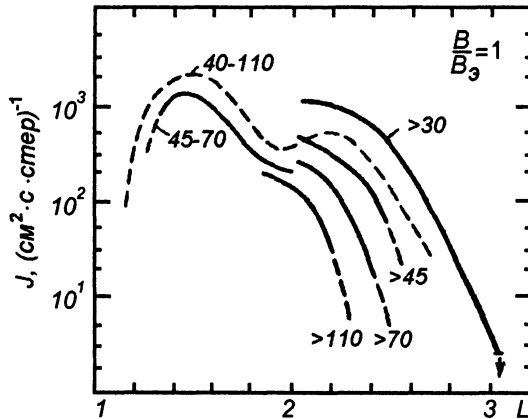


Рис. 14. Экваториальное распределение протонов с энергиями свыше 30 МэВ

некоторого критического значения  $E_m(L)$ , величина  $E_0$  при всех значениях экваториального угла между скоростью и силовой линией изменяется в соответствии с теоретическими результатами. Следовательно, если в качестве независимых переменных выбрать адиабатические инварианты, то спектр частиц будет неизменным. Этот вывод дает одно из наиболее убедительных подтверждений концепции переноса.

Из сопоставления данных о спектре при  $L = 5$  [99] и  $L = 1,5$  [106] видно, что закон  $E_0 \propto L^{-3}$  выполняется вплоть до  $L = 1,5$ , где  $E_0 \approx 4$  МэВ.

Резкое различие структуры протонного пояса в энергетических интервалах примерно от 0,1 до 30 МэВ и  $> 30 - 40$  МэВ отчетливо видно на рис. 13 и 14. Наиболее существенное различие наблюдается в районе  $L \approx 2,2$ , где интенсивность наиболее энергичных протонов ( $E > 40$  МэВ) образует второй максимум [105].

Высотный ход интенсивности протонов с  $E \lesssim 30$  МэВ вдоль силовых линий определяется рассмотренными выше особенностями их спектра. Как показано в [13], распределение частиц по значениям первых двух инвариантов во внешней части протонной зоны одинаково для всех  $L$  и магнитных широт. Из расчетов [13] и [82] следует, что при переносе частиц на более близкие к Земле  $L$ -оболочки с сохранением первых двух инвариантов энергия растет тем медленнее, чем больше магнитная широта зеркальной точки (см. § 4). Поэтому с ростом магнитной широты средняя энергия частиц убывает и интенсивность падает. Этот эффект выражен тем ярче, чем меньше  $L$ .

Закономерности такого типа были прослежены в широком диапазоне значений  $L$  и магнитных широт на спутниках серии «Электрон» [87, 102]. Если приближенно представить высотный ход в виде  $N \propto (H/H_0)^{-m}$  ( $H_0$  — поле в вершине, а  $H$  — в произвольной точке данной силовой линии), то на малых геомагнитных широтах величина  $m$  возрастает от  $\approx 0,8$  при  $L = 3-4$  до 2 при  $L \approx 2$ . Показатель  $m$  не остается постоянным вдоль силовой линии и на широтах  $\sim 45^\circ$  при  $L \sim 3$  возрастает до  $\sim 4$ . Аналогичные выводы были получены по данным измерений на спутниках «Эксплорер-ХП» [52, 99] и «Космос-41» [107, 108].

Высотный ход интенсивности протонов с энергиями от 40 до 110 МэВ в области второго максимума существенно отличается от описанной выше картины. В этом случае скорость изменения интенсивности вдоль силовой линии убывает с ростом магнитной широты (т. е. эффективный показатель  $m$  уменьшается). Дополнительный максимум, ярко выраженный в плоскости экватора, уже на магнитной широте  $\sim 25^\circ$  практически исчезает [105].

Временные вариации потоков протонов вблизи плоскости экватора малы, и даже на  $L \sim 5$  интенсивность меняется не более чем в 2 раза [52, 135]. Высокая стабильность экваториального распределения протонов характерна для всех энергий от 100 кэВ до 100 МэВ. Сравнение данных 1961 г. («Эксплорер-XII» [15, 52, 99]) с результатами, полученными в 1962–1963 гг. на спутнике «Эксплорер-XIV» [100] и в 1964 г. («Электрон-1», «Электрон-2», «Космос-41» [35, 107]), не обнаруживает сколько-нибудь существенных различий ни в положении и форме, ни в абсолютных величинах интенсивностей, хотя уровень солнечной активности в 1961 г. был существенно выше, чем в 1962 и особенно 1963–1964 гг. Более того, распределения потоков протонов с энергиями от 1 до 20 МэВ, рассчитанные теоретически в [11, 12] по данным 1961 г. при  $L = 5$  [99], с высокой точностью совпали с результатами последующих экспериментов.

Проведенный в [11, 12] анализ привел к заключению, что второй максимум протонов с энергиями  $> 40$  МэВ при  $L = 2,2$  скорее всего нестационарен и является диффузионной волной, возникшей в годы последнего максимума солнечной активности вследствие захвата у границы радиационных поясов протонов со средней энергией  $\sim 100$  кэВ. Резкое возрастание потока таких протонов у границы поясов наблюдалось во время сильной магнитной бури в конце сентября 1961 г. [108]. Исследования на спутнике «Космос-41» [107] показывают, что аналогичные явления наблюдаются и при слабых бурях (интенсивности при этом достигают  $\sim 10^4$  см $^{-2}$ с $^{-1}$  при  $E_p > 400$  кэВ, что почти на два порядка ниже потоков, зарегистрированных в случае [108]).

Результаты [107] и [108] подтверждают гипотезу [11, 12] о возможности резкого возрастания среднего потока протонов с энергиями  $\sim 100$  кэВ у границы поясов в годы максимума солнечной активности 1958–1959 гг., когда было особенно велико число сильных бурь. Недавно получено еще одно подтверждение этой концепции: в [109] сообщалось, что обнаружено движение второго максимума к Земле. Приведенная в [109] величина смещения ( $\sim 0,1a$  за два года) очень близка к теоретическим результатам [11] и [12] о скорости диффузионных волн.

Вариации потоков протонов вне экваториальной плоскости при  $L \leq 5$  также невелики. Даже на таких сравнительно малых высотах, как 1000 км, потоки протонов в магнитно-спокойное время и в период сильной магнитной возмущенности ( $K_p = 8$ ) различаются менее чем в 2 раза, а угловое распределение практически не меняется [110]. Аналогичный вывод при  $L \leq 5$  справедлив и на высотах  $\sim 10^4$  км от поверхности Земли [107].

На  $L > 5$  наблюдаются значительные вариации потоков протонов с энергиями  $\sim 0,5$  МэВ, связанные с магнитной активностью [107]. Во время бурь интенсивность при  $L \sim 9$  возрастала на три порядка.

В настоящее время общепризнано, что протонный пояс обусловлен переносом частиц поперек дрейфовых оболочек. Лишь в области энергий свыше 40 МэВ начинает играть роль нейтронный распад. Наиболее вероятной причиной гибели

протонов с энергиями  $> 0,5$  МэВ являются ионизационные потери, а в области меньших энергий, возможно, и перезарядка. Никаких данных, свидетельствующих о рассеянии протонов, пока нет<sup>5)</sup>. Напротив, результаты [13] показывают, что при переносе сохраняются оба адиабатических инварианта протонов и, следовательно, рассеяние практически отсутствует.

Таковы основные характеристики распределения быстрых протонов в магнитосфере.

## § 7. Энергичные электроны

В отличие от протонов область повышенной интенсивности электронов тех же энергий ( $\gtrsim 100$  кэВ) распадается на два отчетливых максимума — внешний и внутренний пояса. Зазор между ними, в котором интенсивность на два-три порядка ниже, чем в максимумах, расположен в районе оболочки  $L = 3 \pm 0,2$ . Во внутренней зоне и в зазоре временные вариации на больших высотах невелики. В то же время распределение интенсивности и спектр электронов во внешней зоне сильно изменяются, и амплитуды вариаций при данном  $L$  достигают трех порядков величины.

Электроны с энергиями в несколько десятков кэВ также, по-видимому, образуют внешнюю и внутреннюю зоны. Однако зазор значительно менее глубок, чем в случае более энергичных частиц, а максимумы выражены не столь отчетливо. Во внешней зоне наблюдаются вариации, при которых интенсивность быстро изменяется на один-два порядка. Вариации коррелируют с магнитной возмущенностью.

На малых высотах ( $\lesssim 1000$  км) динамика электронных поясов имеет специфические особенности, связанные с резкой зависимостью скорости утечек от высоты и аномалиями геомагнитного поля. Эти вопросы будут рассмотрены в конце параграфа.

Как уже отмечалось, во внутренней зоне и в зазоре электронная интенсивность на больших высотах стабильна. Этот вывод следует из результатов измерений потоков электронов с энергиями от 0,2 до 1,6 МэВ на спутниках «Эксплорер-XIV», «Эксплорер-XV» [100, 105], «Релей-1» [112], «Электрон-1» и «Электрон-2» [87]. Следует, однако, иметь в виду, что эти данные были получены после высотного взрыва «Морская звезда» (9 июля 1962 г.), существенно изменившего структуру внутренней электронной зоны. Надежные данные об электронах в этом районе до 1962 г. практически отсутствуют (см. обзоры [113, 114]).

Во всех перечисленных экспериментах было установлено, что минимум интенсивности электронов с энергиями  $> 200 - 500$  кэВ расположен в районе  $L = 3 \pm 0,2$ . Интенсивности, измеренные в одних и тех же областях разными спутниками, в пределах порядка величины совпадают.

Анализ, проведенный в [20, § 18], показывает, что экспериментальные данные о распределении электронов с энергиями  $\gtrsim 500$  кэВ согласуются с теоретической кривой  $I_0 \sim (10^9 - 10^{10}) L^{-10} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  при  $1,5 \leq L \leq 3$ , соответствующей грани-

<sup>5)</sup> В работе [111] сообщалось о резком спаде интенсивности протонов с  $E \sim 35$  МэВ и малымиpitch-углами при  $L \gtrsim 2$  во время магнитной бури в сентябре 1963 г. Однако ни до тех пор, ни впоследствии подобного не наблюдалось ни в одном эксперименте, хотя исследования протонов таких энергий ведутся почти непрерывно с конца 1957 г.

це устойчивости пояса. Вдоль силовых линий интенсивность при  $1,6 \leq L \leq 2,5$  изменяется как  $(H/H_0)^2$  [20].

Отметим, однако, что хотя относительные изменения интенсивности с  $L$  во всех указанных экспериментах очень близки, абсолютные величины потоков по данным различных авторов отличаются в 2–5 раз. Пока неясно, что является причиной таких расхождений — медленные изменения потоков частиц во времени или аппаратурные и ориентационные эффекты. Теоретические соображения о природе энергичных электронов будут рассмотрены в § 13.

В районе внешней зоны ( $L \gtrsim 3,5$ ) интенсивность испытывает даже при относительно слабой магнитной возмущенности огромные вариации, характер которых различен для разных участков спектра. По-видимому, можно утверждать, что нестационарность является нормальным состоянием внешней зоны, а отсутствие вариаций хотя бы в течение недели — крайне редким событием.

Экспериментальные данные показывают, что по характеру вариаций можно выделить три группы электронов с энергиями свыше 40 кэВ: 40–100 кэВ, 200–600 кэВ и от 600 кэВ до 1,6–2 МэВ. Точная граница между первыми двумя группами неизвестна (однако она заведомо лежит между 100 и 200 кэВ). Данных об электронах с энергиями  $> 2$  МэВ во внешней зоне пока почти нет.

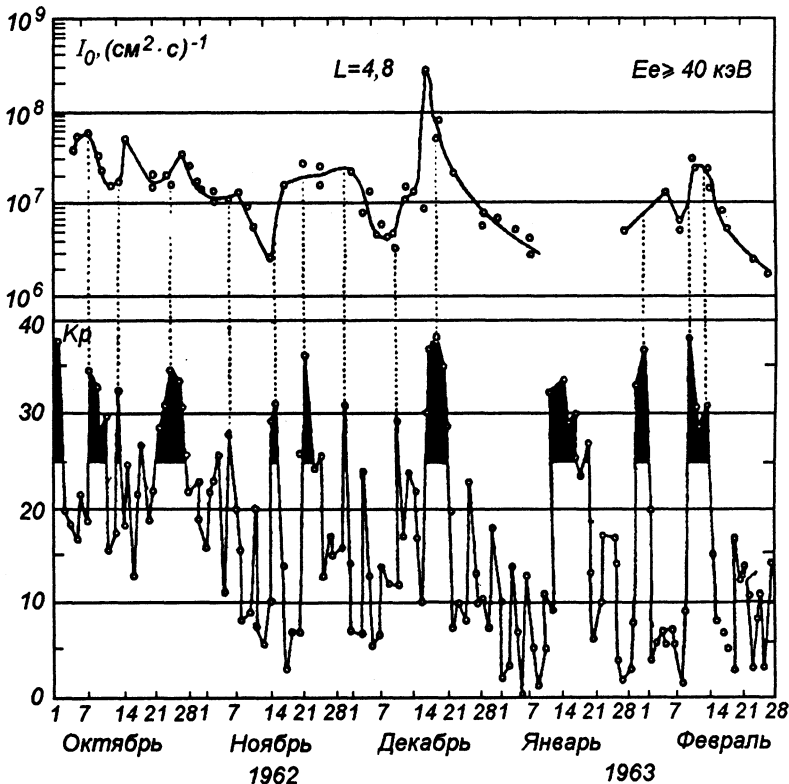


Рис. 15. Сопоставление потоков электронов с энергиями 40 кэВ в максимуме внешней зоны с уровнем магнитной активности за период с октября 1962 г. по март 1963 г.

Наиболее характерной особенностью динамики электронов с энергиями 40–50 кэВ во внешней зоне является четкая корреляция с магнитной активностью. Этот эффект был обнаружен при исследованиях на спутнике «Эксплорер-ХII» [115] и подтвержден в экспериментах на спутнике «Эксплорер-ХV» [91, 100]. На рис. 15 [89] приведены данные о потоках электронов с энергиями  $> 40$  кэВ с октября 1962 г. по март 1963 г. в максимуме внешней зоны ( $L = 4,8$ ) и соответствующие значения суточной суммы  $K_p$ -индексов. Резкие возрастания  $K_p$ -индекса (магнитные бури) всегда сопровождаются всплеском интенсивности электронов с энергиями  $\sim 40$  кэВ. Наоборот, во время длительных периодов низкой магнитной активности наблюдается монотонный спад потоков электронов.

Эти закономерности особенно отчетливо видны на рис. 16 [100], где приводятся распределения потоков электронов с энергией  $> 40$  кэВ по  $L$  в плоскости экватора в декабре 1962 г. – январе 1963 г.

Из рис. 15 видно, что в первой половине декабря магнитная возмущенность была умеренной. 17 декабря произошла довольно сильная (во всяком случае, наиболее сильная за время работы спутника «Эксплорер-ХIV») буря, после которой возмущенность оставалась аномально низкой вплоть до 10 января 1963 г. Первые две кривые (1 и 2) на рис. 16 (7 и 13 декабря 1962 г.) соответствуют периоду до бури, кривая 3 (17 декабря) получена во время бури, а остальные (4–20 декабря 1962 г., 6–8 января 1963 г.) — в период низкой возмущенности. Отметим, что интенсивность  $\sim 4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  (кривая 3) является рекордной за все время работы спутника (октябрь 1962 г. – июль 1963 г.), а  $10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  (кривая 6) — минимальной за тот же период.

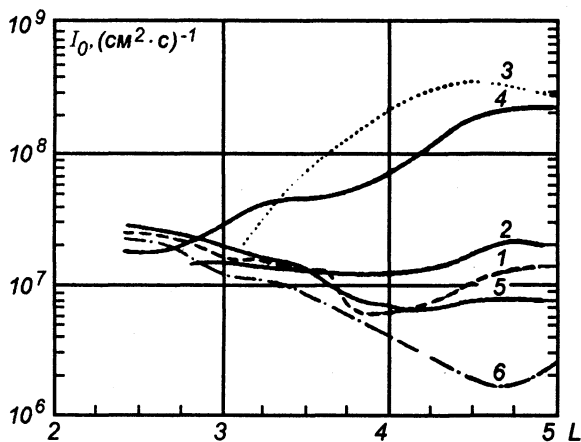


Рис. 16. Экваториальное распределение электронов с энергией  $\geq 40$  кэВ во внешней зоне (декабрь 1962 г. – январь 1963 г.). 1 — 7/XII; 2 — 13/XII; 3 — 17/XII; 4 — 20/XII; 5 — 27/XII; 6 — 8/I

Как видно из рис. 16, вариации особенно велики во внешней зоне ( $L > 3,5$ ). В зазоре вариации практически отсутствуют. Повышение интенсивности при  $L > 3,2$  произошло за время  $\lesssim 1$  суток. Аналогичные явления, хотя и с меньшей амплитудой, наблюдались во время других магнитных бурь.

Отметим, что в магнитно-спокойное время (начало января 1963 г.) был обнаружен довольно четкий максимум потоков таких электронов в приэкваториальном районе вблизи ночной границы области захваченной радиации [91]. Этот факт подтверждает изложенные в § 5 соображения о бетатронном ускорении электронов при «втягивании» силовых линий из хвоста в область захваченной радиации.

Помимо счетчика с пороговой энергией 40 кэВ для электронов и 500 кэВ для протонов, на спутнике «Эксплорер-ХIV» были установлены гейгеровские счетчики со следующими порогами регистрации: 1)  $E_e > 230$  кэВ,  $E_p > 4,5$  МэВ;



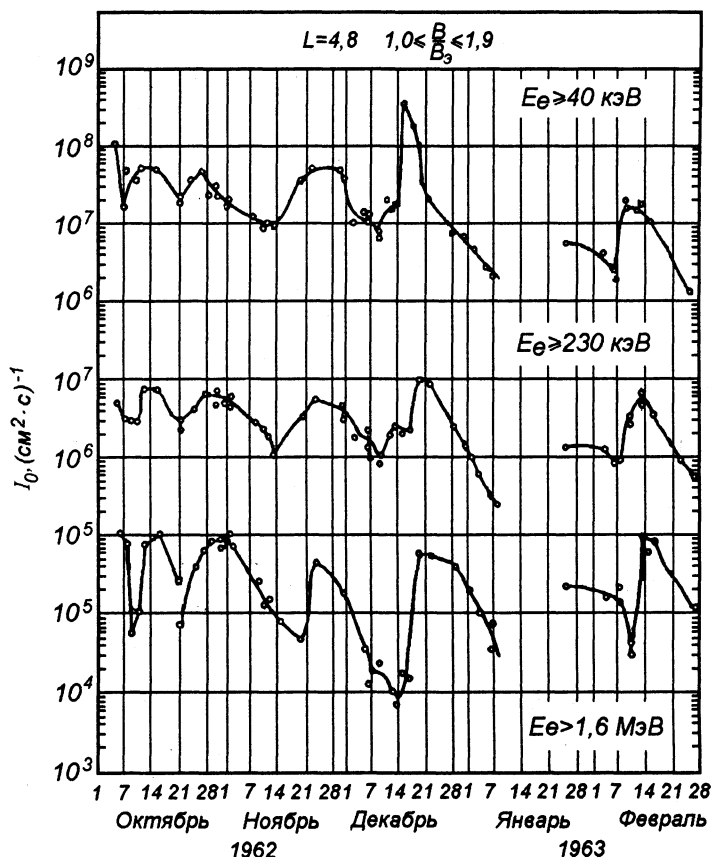
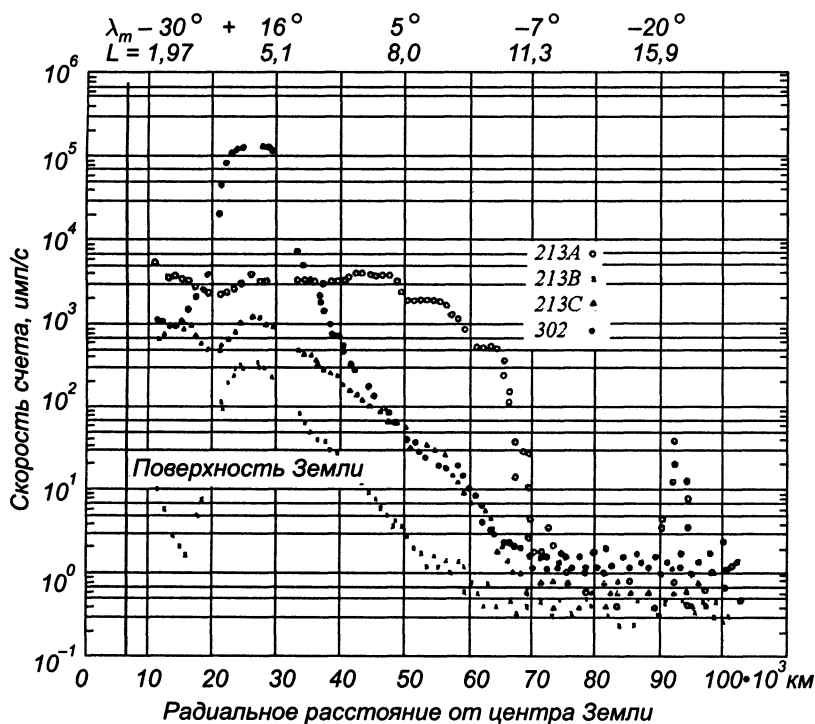


Рис. 17. Вариации интенсивности электронов с энергиями  $> 40$  кэВ,  $230$  кэВ и  $1,6$  МэВ в максимуме внешнего пояса

2)  $E_e > 230$  кэВ,  $E_p > 500$  кэВ; 3)  $E_e > 1,6$  МэВ,  $E_p > 20$  МэВ. Счетчики 1) и 2) отличались способом отсечки электронов с энергиями  $\lesssim 200$  кэВ; в случае 1) это достигалось за счет дополнительной экранировки счетчиков, повышавшей порог и для протонов, а для электронов, а в случае 2) электроны отклонялись магнитом, практически не влиявшим на проникающие через окошко протоны с  $E_p > 500$  кэВ. Сопоставление данных [100] с последующими измерениями потоков протонов с  $E_p > 5$  МэВ показывает, что счетчик 1) при  $L \geq 2,4$  регистрировал в основном электроны (при  $L < 2,4$  данные по спутнику «Эксплорер-XIV» не публиковались).

Показания трех электронных каналов в течение октября 1962 г. – февраля 1963 г. в максимуме внешнего пояса ( $L = 4,8$ ) приведены на рис. 17 [100]. Из рисунка видно, насколько нестабильны потоки электронов в этом районе. На рис. 18 [100] приведена довольно типичная для конца 1962 – начала 1963 г. картина распределения потоков электронов и протонов указанных энергий. По оси ординат отложены скорости счета различных датчиков в функции геоцентрического расстояния в приэкваториальном районе (значения параметра  $L$  и геомагнитной широты приведены в верхней ча-



**Рис. 18.** Скорость счета детекторов с различными порогами при пролете спутника «Эксплорер-XIV» 6–7 октября 1962 г. Для получения абсолютных величин интенсивностей показания соответствующих детекторов нужно домножить на следующие величины: 213A – на  $5 \cdot 10^3$ , 213B – на  $1,7 \cdot 10^4$ , 213C – на  $3 \cdot 10^1$ , 302 – на  $10^1$

сти рисунка). Истинные значения интенсивностей определяются делением данных рис. 18 на соответствующие геометрические факторы (см. подпись под рисунком).

Электроны с  $E_e > 40$  кэВ распределены почти равномерно вплоть до границы магнитосферы. Электроны же с  $E_e > 230$  кэВ и 1,6 МэВ образуют четкий пик в районе  $L \approx 4,8$ . Значительное различие показаний счетчиков с порогами  $E_e = 230$  кэВ,  $E_p = 500$  кэВ и  $E_e = 230$  кэВ,  $E_p = 4,5$  МэВ в районе зазора обусловлено протонами с энергиями  $> 500$  кэВ.

Как видно из рис. 17, вариации потоков электронов с энергиями  $\sim 200$  кэВ значительно меньше, чем в случае более ( $E_e > 1,6$  МэВ) и менее ( $E_e \sim 40$  кэВ) энергичных частиц, и обычно не превышает трехкратного отклонения от среднего в ту или другую сторону. Эти результаты относятся к максимуму пояса. В зазоре (при  $L \lesssim 3,5$ ) заметные вариации наблюдаются лишь во время сильных бурь. Потоки электронов с энергиями  $E_e > 1,6$  МэВ, по данным [100], испытывают вариации такого же масштаба, что и при  $E_e \sim 40$  кэВ. Однако характер этих вариаций и их связь с магнитной возмущенностью значительно сложнее.

Во время магнитных бурь потоки релятивистских электронов резко убывают до величин  $\sim 10^4 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  в максимуме (см. рис. 17). В некоторых случаях (например, перед бурей 17 декабря 1962 г.) такая интенсивность может установиться

вследствие монотонного спада в предшествовавший буре относительно спокойный период. Во время бури дальнейший спад отсутствует и интенсивность сохраняется на уровне  $\sim 10^4 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

Спустя 2–3 дня после бури интенсивность при  $L \sim 5$  возрастает до величины  $\sim 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Образовавшийся пик продвигается в область малых  $L$  и становится все более и более острым. В трех случаях за время работы спутника «Эксплорер-XIV» после бури в течение нескольких недель сохранялся аномально низкий уровень магнитной активности. При этом удалось в течение длительного времени наблюдать распространение таких диффузионных волн и измерить скорость их фронта в зависимости от  $L$  [109]. Эти результаты имеют большое значение для теории переноса, так как измеренная в [109] скорость волн совпала с теоретически рассчитанными в [11, 12] значениями. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 13. Там же приводятся соответствующие рисунки из [109].

Зарождение диффузионных волн наблюдалось значительно чаще. Так, профиль релятивистских электронов на рис. 18 является типичной волной на ранней стадии. Однако дальнейшее развитие, как правило, перебивалось во время очередной бури. Отметим, что максимальные потоки в волнах почти всегда были  $\sim 5 \cdot 10^5 - 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ , но никогда не превышали величины  $\sim 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

Таким образом, вариации интенсивности электронов с энергиями  $\sim 40 \text{ кэВ}$  и  $\sim 1,5 \text{ МэВ}$  антикоррелируют. Если учесть, что потоки частиц промежуточных энергий ( $\sim 200 \text{ кэВ}$ ) более стабильны, то можно сказать, что во время магнитных возмущений энергетический спектр во внешней зоне как бы качается относительно точки  $E \approx 200 \text{ кэВ}$ . Такие изменения спектра хорошо иллюстрируются рис. 19 (декабрь 1962 г. – январь 1963 г.).

Богатый материал, полученный на спутнике «Эксплорер-XIV», продолжает обрабатываться и публиковаться. Помимо цитированных выше работ [28, 86, 91, 100, 109], укажем статьи [116, 117], в которых рассматривалась динамика энергичных электронов ( $E > 200 \text{ кэВ}$ ) вблизи границы области захваченной радиации.

Много ценной информации о радиационных поясах на больших высотах получено при исследованиях на спутниках серии «Электрон». Эти спутники работали в условиях глубокого минимума солнечной и геомагнитной активности, уровень которой был ниже, чем во время исследований на спутнике «Эксплорер-XIV». Орбиты спутников позволяли проводить измерения в большом диапазоне геоцентрических расстояний и геомагнитных широт (несколько первых восходящих полувитков при-

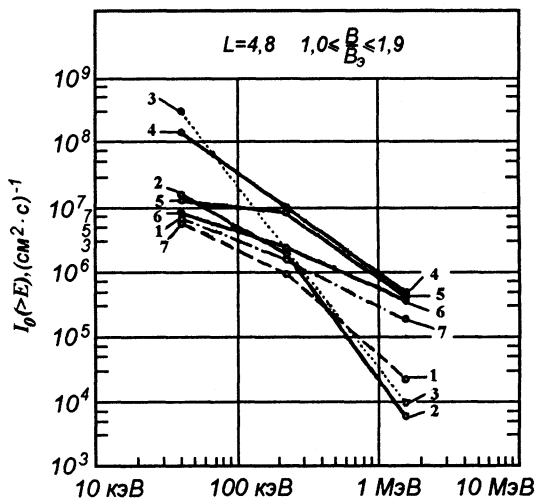


Рис. 19. Вариации спектра электронов во внешней зоне в декабре 1962 г. – январе 1963 г. 1 — 10/XII; 2 — 14/XII; 3 — 17/XII; 4 — 20/XII; 5 — 23/XII; 6 — 29/XII; 7 — 1/1

ведены на рис. 20 [87]), а в ряде случаев получать одновременные показания в двух точках одной и той же силовой линии.

В настоящем обзоре будут в основном рассмотрены результаты, полученные в течение первых двух-трех месяцев полета спутников «Электрон-1» и «Электрон-2». Хотя эти материалы содержат лишь малую часть полученной информации, они позволяют сделать ряд выводов о динамике внешней электронной зоны.

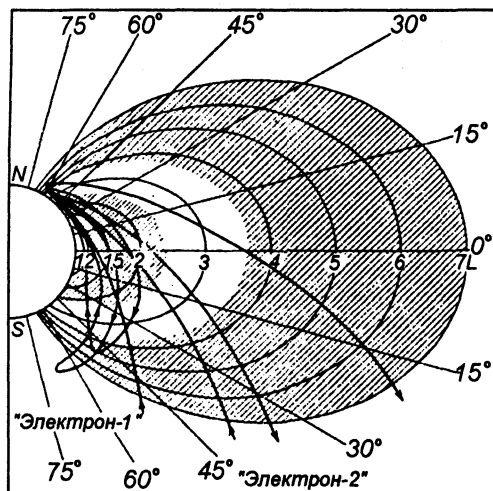


Рис. 20. Примеры траекторий спутников «Электрон-1» и «Электрон-2» в геомагнитных координатах

В интервале энергий от 70 до 600 кэВ интегральный спектр электронов имеет вид  $N_0 E^{-1}$  (интенсивность падает как обратная энергия). Структура и положение максимума, а также абсолютные потоки электронов таких энергий по сравнению с 1962–1963 гг. практически не изменились (см. рис. 17–18).

При энергиях свыше 600 кэВ спектр круто падает, и при  $E > 1,2$  МэВ интенсивность равна  $\approx 10^4 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Эта величина соответствует минимальным потокам электронов с энергиями  $> 1,6$  МэВ, наблюдавшимся в 1962–1963 гг., и почти на два порядка ниже максимальных интенсивностей за этот же период. На спутнике «Космос-41» (1964 г.) был установлен гейгеровский счетчик, аналогичный счетчику электронов с  $E_e > 1,6$  МэВ на американских спутниках. «Космос-41» регулярно пересекал экваториальную плоскость в районе максимума внешней зоны ( $L = 5$ ). За время работы спутника (несколько месяцев) интенсивность электронов с  $E_e > 2$  МэВ, как правило, не превышала  $2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  [107]. Таким образом, во время длительных периодов низкой магнитной активности потоки релятивистских электронов составляют  $\sim 10^4 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ , что на два порядка ниже пиковой интенсивности в диффузионной волне.

В [100] и [109] было показано, что диффузионные волны возникают по окончании магнитных бурь. В период с конца января по начало марта 1964 г. сильных бурь не было, чем, по-видимому, и объясняется отсутствие больших потоков релятивистских электронов. После бури 5 марта 1964 г. интенсивность электронов

В начале 1964 г. уровень магнитной возмущенности был значительно ниже, чем во время полета спутника «Эксплорер-XIV». Внешний электронный пояс в соответствии с этим стал более стационарным. Хотя вариации наблюдались почти при каждом пролете, их амплитуды уменьшались, а иногда в течение трех-четырех суток пояс был стабильным [87].

Типичная картина такого стабильного распределения приведена на рис. 21 [87]. Верхняя кривая (потоки электронов с энергиями 45 кэВ) была получена примерно в тот же период времени на спутнике IMP-1. Расщепление кривых при больших  $L$  отражает различие структуры границы области захваченной радиации на утренней и ночной сторонах. Резкий обрыв на ночной стороне обсуждался в § 5.

с  $E_e > 1,2$  МэВ во внешней зоне возросла и спектр стал более жестким ( $\sim N_0 E^{-1}$ ) при  $E$  вплоть до 1,2 МэВ [87]. Эти результаты подтверждают вывод [100] и [109] о том, что возрастание потоков релятивистских электронов во внешней зоне связано с магнитными бурями.

В работах [88, 89] подробно изучены вариации положения максимума и границы внешней электронной зоны в связи с геомагнитной возмущенностью по данным, полученным в январе–феврале 1964 г. на спутниках «Электрон-1» и «Электрон-2». Положение максимума и границы характеризовалось параметром  $L$ , который рассчитывался по формулам дипольного поля. Как показывают результаты [88], рассчитанные таким образом значения  $L_b$  (на границе) по данным верхнего и нижнего спутников отличаются: нижний спутник фиксирует границу на меньших  $L$ . В то же время ночью граница является очень резкой.

Это обстоятельство показывает, что силовые линии на ночной стороне несколько удаляются от Земли по сравнению с дипольными линиями, проходящими через те же широты вблизи Земли. Отметим, что такой же вывод следует из вида магнитного потенциала в области захваченной радиации, полученного в § 2 при анализе возмущений геомагнитного поля. На полуночном меридиане вблизи плоскости экватора поле внешних токов имеет вид  $h = h_0 + h_1 L$ , где  $h_0 \approx 9\gamma$ , а  $h_1 \approx -4\gamma$ . При  $L > 2$  это поле антипараллельно полю внутренних токов, и поэтому вершины силовых линий расположены дальше от Земли, чем вершины дипольных линий. На геоцентрических расстояниях  $\sim 8a$  смещение составляет несколько десятых  $a$ .

При возрастании магнитной активности внешняя граница пояса, как правило, приближается к Земле. Положение максимума более стабильно, однако во время бури 19 февраля 1964 г. наблюдалось значительное смещение максимума (с  $L \approx 4,8$  на  $L \approx 4$ ).

Часто за границей пояса наблюдались нерегулярные потоки электронов с энергиями  $> 100$  кэВ [89, 117]. Пример такого распределения приведен на рис. 22 [89]. Время существования нерегулярных потоков составляет от  $\sim 1$  суток до  $< 3$  часов. Энергетический спектр довольно крутой: из всех обнаруженных за первый месяц полета спутников «Электрон-1» и «Электрон-2» случаев ( $\sim 10$ ) не было ни одного, в котором наблюдалось бы появление потоков электронов с энергиями свыше 400 кэВ. В то же время интенсивность частиц с  $E > 100$  кэВ достигала  $5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

Зазубренность профиля интенсивности на внешней границе электронного пояса является, по-видимому, важной характеристикой ускорительного механизма,

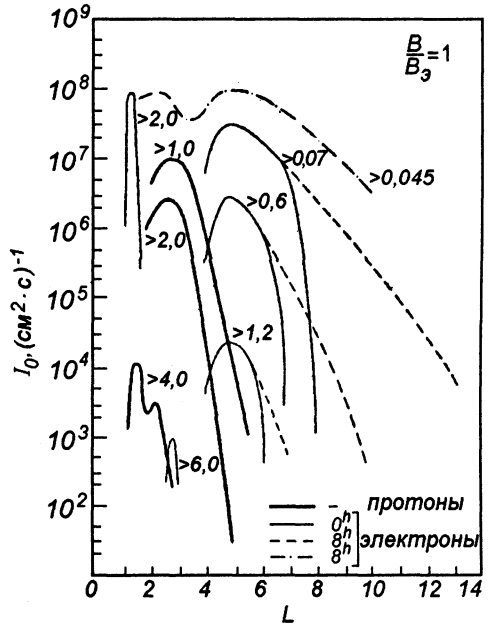
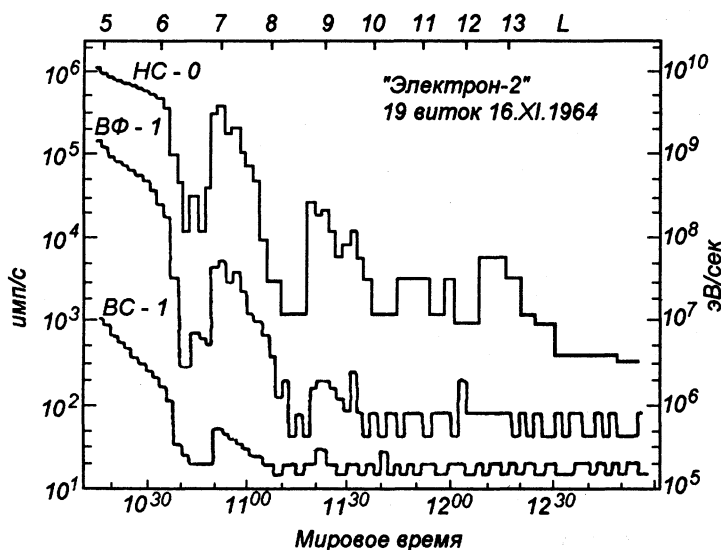


Рис. 21. Распределение электронов и протонов различных энергий (МэВ) в начале 1964 г.



**Рис. 22.** Нерегулярные потоки электронов за пределами области захваченной радиации. *HC-0* — поток энергии, падающей на кристалл наружного сцинтиллятора; *ВФ-1* — скорость счета тормозного излучения; *BC-1* — показания гейгеровского счетчика

и именно с появления нерегулярных потоков начинается формирование поясов. Возможная причина возникновения нерегулярных потоков указана в § 5.

Таким образом, хотя внешний электронный пояс — весьма нестационарное образование, его средние характеристики в 1962–1964 гг. оставались стабильными. Несмотря на резкие отличия динамики электронной и протонной зон, их объединяет одна важнейшая общая черта: возрастание интенсивностей энергичных частиц с уменьшением  $L$  прежде всего связано с изменением жесткости спектра, а не с увеличением плотности частиц всех энергий. В случае электронов мы видим, что по обе стороны границы зоны захваченной радиации имеются с примерно одинаковой плотностью электроны с энергиями  $\sim 1 - 10$  кэВ. На границе происходит скачкообразное ужесточение спектра и резко возрастают потоки электронов с энергиями в несколько десятков кэВ [40]. Однако потоки электронов с энергиями  $> 200$  кэВ еще очень малы (см. рис. 18 и 21). По мере уменьшения  $L$  интенсивность электронов с энергиями в десятки кэВ меняется слабо, но быстро возрастают потоки частиц более высоких энергий.

До недавнего времени систематические исследования спектра электронов в области энергий свыше 2 МэВ не проводились. Между тем, как показано в [87], энергетический спектр электронов в поясах тянется значительно дальше: при  $L = 2,7$  был обнаружен узкий пик электронов с энергией  $> 6$  МэВ, интенсивность которых составляет  $\sim 10^3 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Легко видеть, что и здесь проявляется та же тенденция увеличения энергии частиц с уменьшением  $L$ . Можно предположить, что в районе оболочек  $L \sim 3 - 3,5$  существуют пики электронов с энергиями между 2 и 6 МэВ, причем совокупность кривых распределения таких электронов похожа на аналогичное распределение протонов (см. рис. 12).

Эффект ужесточения спектра с уменьшением  $L$  — характерная особенность адиабатического ускорения при переносе частиц поперек дрейфовых оболочек. Поскольку перенос непосредственно наблюдается на эксперименте (диффузионные волны [100, 109]), есть все основания утверждать, что формирование внешнего пояса электронов с энергиями по крайней мере  $> 200$  кэВ обусловлено переносом.

Однако, в отличие от протонов, утечки электронов во внешней зоне имеют явно некулоновский характер. Действительно, время переноса электронов в области зазора, согласно [100] и [109], порядка 1 месяца. Очевидно, что характерное время потерь должно быть того же порядка величины — иначе бы зазор исчез. Время жизни электронов с энергией  $\sim 2$  МэВ в водородной плазме с плотностью  $\sim 10^3$  см $^{-3}$  составляет  $\sim 100$  лет. Поэтому необходимо предположить, что в районе зазора действует какой-то значительно более мощный механизм потерь. Таким механизмом может быть лишь взаимодействие с нетепловыми колебаниями плазмы, а наиболее вероятной причиной возникновения колебаний является неустойчивость самих радиационных поясов.

Взаимодействие с волнами должно приводить к эффективному рассеянию электронов в плотные слои атмосферы и к установлению почти изотропного углового распределения вблизи плоскости экватора. Как отмечалось в § 4, изотропия углового распределения приводит к исчезновению высотного хода интенсивности вдоль силовых линий. Такое явление имеет место на внутренней границе внешнего пояса [87], что подтверждает гипотезу гибели электронов за счет рассеяния.

Согласно этой точке зрения гибель частиц происходит на малых высотах, и поэтому для понимания природы утечек электронов особый интерес представляет динамика электронной компоненты радиационных поясов на малых высотах.

В районе внутреннего пояса и в зазоре интенсивность электронов на больших высотах стабильна. На малых высотах (1000 км от Земли) в соответствующей области геомагнитных широт ( $L \lesssim 3$  или  $|\lambda_m| \lesssim 55^\circ$ ) основные особенности распределения электронов определяются аномалиями (недипольными членами) геомагнитного поля. На рис. 23 в качестве примера приведена зависимость высоты линий  $H = 0,4$  Э,  $L = 4,1$  от долготы в южном полушарии. Видно, что в районе Атлантического океана линия резко опускается вниз. Частицы, зеркальные точки которых дрейфуют по этой линии, в течение одного дрейфового оборота должны либо погибнуть, либо за счет рассеяния перейти на более высокую орбиту.

Указанная причина вызывает долготный ход электронов — изменение интенсивности на линии  $H = \text{const}$ ,  $L = \text{const}$  в зависимости от долготы. Этот эффект изучался в работах

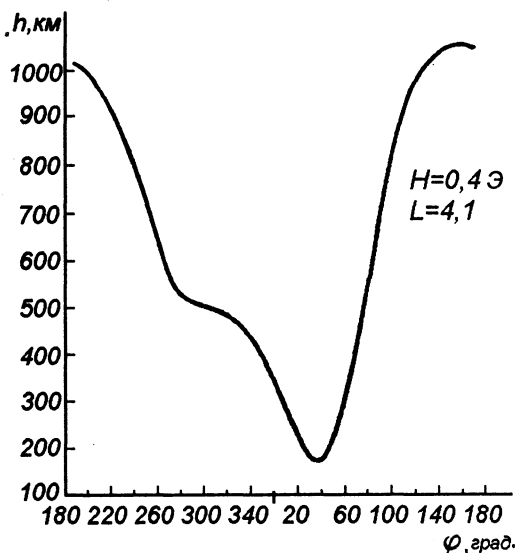


Рис. 23. Зависимость высоты линии  $H = 0,4$  Э,  $L = 4,1$  от долготы в южном полушарии

[118–121]. Долготный ход отчетливо выражен на дрейфовых орбитах зеркальных точек (линиях  $H = \text{const}$ ,  $L = \text{const}$ ), минимальная высота которых над Землей (в районе Атлантического океана) меньше 350 км. На западном крыле аномалии (над Южной Америкой) интенсивность выше, чем в центре и на восточном краю (Африка), что соответствует направлению дрейфа электронов. На высоте  $\approx 350$  км плотность холодных частиц такова, что среднеквадратичный угол рассеяния электрона с энергией порядка нескольких сотен кэВ при прохождении аномалии соответствует смещению зеркальной точки на высоту, равную высоте изменения плотности атмосферы в  $e$  раз. На больших высотах такое рассеяние будет иметь место лишь в течение нескольких дрейфовых оборотов и долготный ход исчезает.

Считая, что разность интенсивностей на входе и выходе аномалии дает величину утечки, можно вычислить средние потери частиц и оценить (по известному запасу электронов во всей силовой трубке) время жизни. Такие оценки [119] показывают, что при  $L \approx 2$  это время  $\sim 10^7$  с.

Во внутреннем поясе при  $L \lesssim 2$  наблюдается резкий высотный ход интенсивности вдоль силовых линий. При  $L \approx 2$  высотный ход начинает убывать, и на  $L \approx 2,5$ –3 интенсивность на высотах  $\approx 1000$  км становится почти такой же, как в плоскости экватора [120, 121]. Этот факт подтверждает малую анизотропию углового распределения частиц в зазоре и, следовательно, наличие эффективного механизма рассеяния. При  $L > 3$  исчезает долготный ход интенсивности.

Поскольку при  $L < 2$  имеется значительный высотный ход интенсивности, в этом районе, по-видимому, некулоновское рассеяние исчезает. Отметим, что к аналогичному выводу приводит анализ устойчивости радиационных поясов [20] (см. § 18).

Распределение электронов при  $L < 2,5$  на малых высотах довольно стабильно, однако и в этом районе наблюдаются вариации. Согласно [122] иногда в узкой области значений  $L$  (шириной порядка нескольких десятых) резко возрастает интенсивность. В [123] описаны вариации при  $L > 2,5$ , коррелирующие с магнитной активностью.

На широтах  $> 50^\circ$  высыпание электронов из поясов наблюдается очень часто, а вблизи зоны полярных сияний — практически постоянно. Эти явления подробно изучались при экспериментах на спутниках «Инджун-I» [85, 124] и «Инджун-III» [125]. Исследования показывают, что в основном высыпаются электроны с энергиями  $< 50$  кэВ, интенсивность которых на высотах  $\sim 1000$  км иногда быстро возрастает до величины порядка максимальных потоков на больших высотах. Интенсивности электронов с энергиями  $> 200$  кэВ на малых высотах по данным [125] изменяются лишь в несколько раз, а при энергиях  $> 1,6$  МэВ вариации практически отсутствуют. В некоторых случаях на спутнике «Инджун-III» наблюдалась очень быстрая изотропизация углового распределения (за 0,1 с).

Потоки сбрасываемых электронов особенно велики у границы области захваченной радиации [85] и могут составлять  $\sim 10^7$  см $^{-2}$ с $^{-1}$ . При таких интенсивностях возникают потоки рентгеновского излучения  $\sim 10^3$  квантов на 1 см $^2$  в 1 с, которые можно легко зарегистрировать с помощью аппаратуры на воздушных шарах-зондах. Такие измерения проводились многими авторами. Статистический анализ показал [126], что иногда всплески рентгеновского излучения периодически повторяются, причем период примерно равен времени колебаний электронов с энергиями



$\gtrsim 50$  кэВ между точками отражения ( $\sim 1$  с). В дальнейшем этот вывод получил многочисленные подтверждения (см., например, [127]).

В зоне полярных сияний высыпания наблюдаются почти всегда. Вероятность появления сбрасываемых потоков максимальна в утренние часы по местному времени. Во время геомагнитных возмущений сброс резко возрастает и наблюдается на всех долготах.

Времена жизни электронов с энергиями в десятки кэВ очень малы, особенно вблизи границы области захваченной радиации. Объем силовой трубки с параметром  $L$  и сечением  $1 \text{ см}^2$  вблизи Земли при  $L \sim 5-7$  есть  $\omega \approx 2aL^4 \text{ см}^3$  (при больших  $L$  поле вблизи Земли в  $2L^3$  раз больше, чем в плоскости экватора, а

$$\int_0^\pi \frac{H_z(L)}{H(L, \theta)} \frac{dz}{d\theta} d\theta = \frac{32}{35} L \approx L;$$

в подынтегральном выражении  $H_z(L)$  — поле у экватора,  $H(L, \theta)$  — поле в произвольной точке силовой линии с параметром  $L$ ,  $dz$  — дифференциал длины дуги силовой линии). При средней интенсивности  $I_0$  запас частиц в такой трубке будет, следовательно,  $N \approx \frac{I_0}{c} \bar{\beta}^{-1} \cdot 2aL^4$ . Если поток сбрасываемых в ионосферу электронов есть  $F$ , то время жизни

$$\tau = \frac{N}{F} = \frac{I_0}{Fc} \bar{\beta}^{-1} \cdot 2aL^4.$$

Типичные значения  $I_0$  и  $F$  при  $L = 7$  в периоды сильной магнитной возмущенности суть соответственно  $10^8-10^9 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  и  $10^6-10^8 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ , а  $\beta = v/c$  — для электронов с энергией  $\approx 50$  кэВ — 0,4. Отсюда,  $\tau \sim 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$  ( $\sim 0,3$  суток). Это время соответствует скорости восстановления поля в начале обратной фазы магнитной бури и на много порядков меньше характерного времени кулоновского рассеяния ( $\sim 1$  года при энергии 40 кэВ и плотности холодной плазмы  $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ ).

Сброс большого числа электронов вызывает повышение ионизации в  $E$ - и  $D$ -слоях ионосферы, что проявляется в росте поглощения космических радиосигналов и радиосигналов, отраженных обратно на Землю от максимума слоя  $F$ . Анализ таких явлений показывает, что на ночной стороне Земли имеется еще один механизм повышения ионизации — вторжение в ионосферу быстрых протонов солнечных вспышек. Однако в этом случае повышение ионизации наблюдается во всей области северной и южной полярных шапок и регулярно изменяется во времени.

При высыпании электронов картина совершенно иная: область повышенной ионизации расположена в зоне максимума частоты появления полярных сияний, а временные характеристики поглощения космических радиосигналов существенно нерегулярны. Поэтому данные наземных станций, измеряющих поглощение радиоволн в  $E$ - и  $D$ -слоях, позволяют однозначно установить причину эффекта. Поскольку данные об ионосферных возмущениях охватывают период в несколько десятилетий, они могут быть использованы для анализа динамики радиационных поясов в связи с изменениями солнечной активности. Оказалось, что частота сбросов электронов в ионосферу антикоррелирует с числом солнечных пятен и частотой сильных вспышек [128]: частота сбросов максимальна в годы минимума солнечной активности. Этот факт, по-видимому, находится в тесной связи с данными о статистике магнитных бурь малой мощности, частота которых также антикоррелирует с числом пятен.

В [128] не проводилось различия между сбросами большой и малой мощности (ионосферное зондирование позволяет лишь установить факт повышения ионизации, но не дает возможности оценить величину эффекта [85]). Поскольку слабые бури всегда происходят значительно чаще, чем сильные, число сбросов по данным ионосферного зондирования характеризует число слабых бурь.

Абсолютная величина сброса может быть оценена по измерению поглощения космических радиосумов [85]. Однако эта методика стала применяться сравнительно недавно, и поэтому данные за большой интервал времени (порядка двух–трех циклов солнечной активности) отсутствуют. Несомненно, что в дальнейшем изучение сбросов по данным о поглощении шумов получит широкое развитие и позволит провести анализ связи сбросов с солнечной активностью, учитывающий абсолютную величину эффекта.

Мы рассмотрели основные экспериментальные данные о физических условиях в магнитосфере Земли и о радиационных поясах. Перейдем теперь к более четкой формулировке теоретических задач, которые должны быть решены для выяснения природы этих явлений.

Одной из важнейших задач теории является проблема формирования хвоста магнитосферы. Ряд качественных соображений о природе нейтрального слоя и о процессах вблизи границы области захваченной радиации был рассмотрен выше. Эти соображения позволяют связать воедино экспериментально установленные факты и, на наш взгляд, достаточно убедительно показывают, что при деформациях границы поясов происходит захват частиц на замкнутые в пределах магнитосферы дрейфовые орбиты. Резкое сокращение силовых линий и рост напряженности поля в экваториальной области при «втягивании» хвоста в ловушку приводит к значительному адиабатическому ускорению захватываемых частиц, пределы которого практически определяются соотношением между характерным временем процесса «втягивания» и периодом дрейфа частиц. Таким образом, эксперимент показывает, что при магнитных возмущениях периферийные области геомагнитной ловушки заполняются частицами с энергиями, значительно превышающими энергии частиц в турбулентной зоне между границей магнитосферы и ударной волной. Протоны с энергиями  $\sim 1\text{--}10$  кэВ и электроны с  $E \sim 100\text{--}1000$  эВ могут проникать в ловушку и в отсутствие возмущений.

Более строгая теория этих явлений должна базироваться на последовательном учете эффектов бесстолкновительной диссипации в плазме. В настоящее время такой подход к сильно асимметричным и нелинейным задачам не представляется возможным.

Эксперимент показывает, однако, что быстрые частицы имеются не только в периферийной области ( $L \gtrsim 5$ ), но и при меньших  $L$ , причем с уменьшением  $L$  средняя энергия частиц растет. Поэтому следующая задача теории состоит в выяснении природы ускорительного механизма, действующего во внутренних областях геомагнитной ловушки, в которых дрейфовые орбиты никогда не входят в контакт с межпланетной средой. Как видно из обзора, пока нет никаких данных в пользу автономности такого механизма. Напротив, множество фактов показывает, что заполнение внутренних областей ловушки связано с дальнейшим переносом частиц поперек дрейфовых оболочек и адиабатическим ускорением при сносе к Земле. Лишь во внутренней электронной зоне, по-видимому, имеется автономный источник (скорее всего, нейтронный распад), а также сохраняются остатки искусственного пояса.

Единственным известным в настоящее время механизмом переноса частиц с энергиями выше 100 кэВ являются внезапные импульсы геомагнитного поля — резкие сжатия или расширения магнитосферы при скачкообразных изменениях мощности солнечного ветра. При меньших энергиях (1–10 кэВ) следует, по-видимому, учитывать ионосферную турбулентность. Однако наши знания о спектре электромагнитных колебаний в магнитосфере пока невелики, и мы не можем на основании чисто эмпирических данных исключить другие механизмы переноса. Поэтому естественный подход к проблеме переноса состоит в теоретической разработке концепции внезапных импульсов и в сопоставлении результатов расчета с экспериментом. Это направление в настоящее время получило широкое развитие, и соответствующие исследования оказались успешными.

Наконец, третья проблема теории поясов — объяснение утечек частиц, благодаря которым формируются внутренние границы зон повышенной радиации. Одна из причин утечек — кулоновские столкновения — тривиальна.

По-видимому, ионизационные потери являются основным механизмом гибели протонов. Однако экспериментальные данные об электронах внешней зоны показывают, что имеется значительно более мощный механизм потерь электронов, приводящий к рассеянию в ионосферу. Экспериментальные данные позволяют утверждать, что время жизни электронов уменьшается с ростом их интенсивности (см. рис. 17). Этот факт однозначно показывает, что причиной гибели электронов является неустойчивость радиационных поясов. Следовательно, необходимо провести теоретическое исследование устойчивости зон повышенной радиации.

Итак, в теории радиационных поясов возникают три основные проблемы: инжекции, переноса и устойчивости. Первая проблема была качественно рассмотрена в § 5. Исследованию двух других задач посвящены дальнейшие главы работы.

### Глава III

## **Перенос захваченных частиц поперек дрейфовых оболочек при внезапных импульсах**

### **§ 8. Электромагнитные возмущения при внезапных импульсах**

Перенос частиц при геомагнитных возмущениях типа внезапных импульсов был впервые рассмотрен Е. Паркером [2]. Временные параметры возмущения сильно асимметричны; скачок происходит за 1–3 мин, а восстановление продолжается  $\sim 1$  час и более. Период долгого дрейфа частицы с энергией  $\sim 1$  МэВ при  $L \sim 4\text{--}5$  составляет  $\sim 10$  мин. Таким образом, время скачка много меньше, а время восстановления — много больше периода долгого дрейфа частиц поясов. Паркер рассмотрел модель плоской идеально проводящей границы магнитосферы и, считая, что во время скачка частица движется вместе с силовой линией, из геометрических соображений нашел величину смещения частиц. Во время второй (медленной) фазы движение определяется сохранением третьего адиабатического инварианта — магнитного потока через дрейфовую орбиту зеркальной точки. Определив результирующее смещение, Паркер вычислил среднеквадратичное смещение частиц и ввел его в уравнение диффузии.

В дальнейших работах [4, 5] было показано, что во втором порядке по амплитуде возмущения возникает среднее смещение частиц, которое также должно быть включено в уравнение переноса. В [4] была рассмотрена та же модель, что и в [2], а в [5] — случай поля с произвольным, но достаточно быстро сходящимся при малых  $L$  потенциалом. Как было показано в [5] из соображений симметрии, наиболее эффективной с точки зрения переноса гармоникой является квадруполь

$$\mathbf{h} = -\frac{h_0(t)}{2} \nabla R^2 \sin 2\theta \cos \varphi \quad (8.1)$$

(здесь и всюду в дальнейшем  $R$  измеряется в земных радиусах, угол  $\theta$  отсчитывается от магнитной оси, а угол  $\varphi$  — от плоскости полуденного меридиана). Члены, описывающие однородное поле, и остальные квадрупольные члены не приводят к переносу, так как либо они соответствуют аксиально-симметричному возмущению, либо вызывают электрические поля, долгопные компоненты которых антисимметричны относительно плоскости экватора. В последнем случае дрейфовые смещения частиц в радиальном направлении в противоположных полушариях имеют различные знаки и взаимно уничтожаются. Члены с более высокой мультипольностью менее эффективны вследствие быстрой сходимости потенциала. Как отмечалось в § 2, современные модели магнитосферы подтверждают и усиливают сделанное в [5] предположение о быстрой сходимости потенциала: оказывается, что член типа (8.1) преобладает над остальными гармониками во всей области захваченной радиации.

Причиной переноса является электрический дрейф в возмущенном поле. Поэтому в [5] было прежде всего найдено электрическое поле  $E$ , возникающее при

внезапном импульсе, и затем решены уравнения движения частицы в таком поле. Для однозначного определения  $E$  было использовано предположение об идеальной проводимости вдоль силовых линий и показано, что это требование эквивалентно использованному в [2] и [4] условию смещения частиц вместе с силовыми линиями. Если при вычислении  $h$  исходить из модели [2] и [4] с плоской границей магнитосферы, то выражения для коэффициента диффузии, полученные в [5], переходят в соответствующий результат [2] и [4]. Среднее смещение, найденное в [5], отличалось от полученного в [4] величиной численного коэффициента. Это различие несущественно с точки зрения анализа экспериментальных данных. Поскольку оба метода расчета эквивалентны, расхождение может возникнуть лишь вследствие арифметической ошибки при довольно громоздких численных расчетах. Как показала проверка, ошибка была допущена в [5] и правильным является результат [4].

В последнее время выяснилось, что большую роль в процессах переноса играют малые положительные и отрицательные импульсы, при которых нестационарное возмущение меньше или порядка статического асимметричного поля  $h^*$ , обусловленного постоянной составляющей солнечного ветра. В работе [129] уравнение переноса было обобщено на случай скачкообразного изменения амплитуды в (8.1) от произвольного значения  $h^* \neq 0$  до некоторого  $h_0$ . Таким образом, в настоящее время уравнение переноса выведено различными методами, приводящими к одинаковым результатам, и показано, что исходные предпосылки достаточно точно соответствуют реальным условиям в магнитосфере. Отметим, что коэффициент диффузии может быть получен также из более общей формулы для произвольной зависимости  $h(t)$ , в которой среднеквадратичное смещение выражается через корреляционную функцию возмущения [14].

Поскольку расчет электрического поля при возмущении представляет самостоятельный интерес, мы частично проведем вывод уравнения методом [5], а для иллюстрации метода [4] вместо непосредственного расчета потока частиц через оболочку  $L = \text{const}$  [5] вычислим  $\overline{\Delta L^2}$  и  $\overline{\Delta L}$  и построим уравнение Фоккера—Планка.

Для определения  $E$  введем векторный потенциал  $A$  возмущения поля  $h$  и положим

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Ищем  $A$  в виде

$$A_0 + \nabla \psi,$$

где  $A_0$  — векторный потенциал поля  $h$ , не имеющий радиальной компоненты, а  $\nabla \psi$  описывает поляризацию плазмы в магнитосфере. Для определения  $\psi$  воспользуемся условием идеальной проводимости вдоль силовых линий:  $(E\mathbf{H}) = 0$ , где  $\mathbf{H}$  — сумма поля диполя  $\mathbf{H}_0$  и возмущения  $h$ .

В сферических координатах  $R, \theta, \varphi$  имеем:

$$\begin{cases} H_{0R} = \frac{2H_e}{R^3} \cos \theta; \\ H_{0\theta} = \frac{H_e}{R^3} \sin \theta; \\ H_{0\varphi} = 0; \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} h_R = -h(t)R \sin 2\theta \cos \varphi; \\ h_\theta = -h(t)R \cos 2\theta \cos \varphi; \\ h_\varphi = h(t)R \cos \theta \cos \varphi; \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} A_{0R} = 0; \\ A_{0\theta} = \frac{ah(t)}{3} R^2 \cos \theta \sin \varphi; \\ A_{0\varphi} = \frac{ah(t)}{3} R^2 \cos 2\theta \cos \varphi, \end{cases} \quad (8.4)$$

где  $H_e \approx 0,3$  Гс — поле у экватора Земли.

Считая, что в рассматриваемой области

$$\eta(t) = \frac{h(t)}{H_e} \ll R^{-4}$$

(т. е. что возмущение много меньше невозмущенного поля диполя), разложим  $\psi$  по степеням  $\eta$ :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots \quad (\psi_n \propto \eta^n). \quad (8.5)$$

Тогда уравнение (ЕН) = 0 переходит в цепочку уравнений

$$\begin{aligned} (H_0 \nabla \psi_1) &= (H_0 A_0); \\ (H_0 \nabla \psi_2) &= -(h A_0) - (h \nabla \psi_1); \\ (H_0 \nabla \psi_3) &= (h \nabla \psi_2) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Для расчета параметров переноса необходимо проводить вычисления с точностью до членов  $\sim \eta^2$  включительно.

В первом приближении имеем:

$$2 \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial R} + \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = -\frac{ah(t)}{3} R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \quad (8.7)$$

откуда

$$\psi_1 = -\frac{aH_e\eta}{21} R^3 \sin \theta \sin \varphi + f\left(\varphi, \frac{\sin^2 \theta}{R}\right). \quad (8.8)$$

Функция  $f$  — общее решение уравнения (8.7) без правой части. В [5] была рассмотрена аналогичная задача с учетом конечных размеров Земли. Ионосфера считалась идеально проводящей, в соответствии с чем были введены магнитное поле скин-токов экранировки и граничное условие  $\psi_{R=1} = 0$ . Расчет показал, что учет конечных размеров Земли представляет интерес лишь при  $L \leq 1,4$ . Одновременно было показано, что в случае точечного диполя следует положить в (8.8), а также в следующих приближениях  $f = 0$ :

$$\psi_1 = -\frac{aH_e\eta}{21} R^3 \sin \theta \sin \varphi. \quad (8.9)$$

В следующем приближении имеем:

$$2 \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial R} + \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = \frac{2a}{21} \frac{\eta^2 H_e}{21} R^6 \sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\varphi, \quad (8.10)$$

откуда

$$\psi_2 = -H_e \frac{a\eta^2}{168} R^7 \sin^2 \theta \sin 2\varphi. \quad (8.11)$$

Во время скачка поля магнитным дрейфом можно пренебречь и считать, что частица движется под действием одного электрического поля:

$$\mathbf{v}_D = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}. \quad (8.12)$$

Домножим (8.12) векторно на  $\mathbf{H}$  и возьмем ротор от результата. Учитывая, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{h}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{E}\mathbf{H}) = 0,$$

получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_D \mathbf{H}], \quad (8.13)$$

т. е. условие вмороженности поля в вещество. Следовательно, частицы движутся вместе с силовыми линиями и для определения изменений параметра  $L$  достаточно рассмотреть движение частиц с нулевой продольной скоростью в плоскости экватора ( $\theta = 0$ ).

Используя предыдущие результаты, получаем следующие выражения для полей при  $\theta = 0$ :

$$\begin{aligned} H_{0R} = H_{0\varphi} = 0; \quad H_{0\theta} &= \frac{H_e}{R^3}; \\ h_R = h_\varphi &= 0; \quad h_\theta = h(t) R \cos \varphi; \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{aH_0}{c} \dot{\eta} \left( \frac{R^2}{7} \sin \varphi + \frac{\eta}{12} R^6 \sin 2\varphi \right); \quad E_\theta = 0; \\ E_\varphi &= \frac{aH_0}{c} \dot{\eta} \left( \frac{8}{21} R^2 \cos \varphi + \frac{\eta}{42} R^6 \cos 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

На основе (8.14)–(8.15) можно исследовать движение частицы во время возмущения.

## § 9. Движение частиц во время внезапного импульса и параметры переноса

В невозмущенном поле движение частицы определяется магнитным дрейфом. При  $L \lesssim 5$  в экваториальной плоскости напряженность поля вдоль силовых линий минимальна, и поэтому частицы с нулевой продольной скоростью дрейфуют в этой плоскости вдоль линий  $H = \text{const}$ . Полярные координаты в плоскости геомагнитного экватора мы будем в дальнейшем обозначать через  $R$  и  $\varphi$ , а через  $L$  обозначим третий адиабатический инвариант. Поскольку в поле диполя магнитный поток выражается через  $L$

$$\Phi = 2\pi \int_L^\infty \frac{H_e a^2}{L^3} L dL = -\frac{2\pi H_e a^2}{L},$$

определим  $L$  следующим соотношением:

$$-\frac{2\pi H_e a^2}{L} = \int_0^{2\pi} \int_{R_L(\varphi)}^{\infty} \frac{H_e a^2}{R^3} dR d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{R_L} h_\theta(R, \varphi) R dR d\varphi. \quad (9.1)$$

Правая часть (9.1) определяет магнитный поток через контур  $R_L(\varphi)$ , вдоль которого  $H = H_0 + h = \text{const}$ . Первый интеграл дает поток дипольного поля через этот контур. Чтобы не усложнять расчеты анализом особенности подынтегрального выражения при  $R \rightarrow 0$ , мы воспользовались обращением в нуль потока через всю плоскость магнитного экватора и заменили поток через внутреннюю область контура потоком через внешнюю часть с обратным знаком. Второй интеграл дает поток поля токов у границы магнитосферы.

Поскольку все расчеты должны проводиться с точностью до членов  $\sim h^2$  включительно, ищем  $R_L(\varphi)$  в виде

$$R_L(\varphi) = L + f_1(L, \varphi)\eta + f_2(L)\eta^2. \quad (9.2)$$

Во втором приближении мы учитываем лишь среднее значение величины  $R_L - L$ , так как добавки вида  $f(L) \sin m\varphi$  или  $f(L) \cos m\varphi$  ( $m \neq 0$ ) дадут лишь малую поправку к среднеквадратичному смещению.

Вид функций  $f_1(L, \varphi)$  и  $f_2(L)$  определяется условиями  $H(R_L(\varphi)) = \text{const}$  и соотношением (9.1). Учитывая, что

$$H = \frac{H_e}{R^3} + hR \cos \varphi, \quad (9.3)$$

можно определить контур  $H = \text{const}$ . Положив

$$R_L(\varphi) = R^{(0)} + \eta R^{(1)}(R^{(0)}\varphi) + \eta^2 R^{(2)}(R^{(0)})$$

и воспользовавшись методом последовательных приближений, получаем:

$$\frac{3H_e}{R^{(0)4}} \eta R^{(1)} + hR^{(0)} \cos \varphi = 0 \quad (9.4)$$

и

$$R^{(1)} = \frac{1}{3} R^{(0)5} \cos \varphi. \quad (9.5)$$

Во втором приближении

$$\frac{3H_e}{R^{(0)4}} \eta^2 R^{(2)}(R^{(0)}) + \frac{6H_e}{R^{(0)5}} \eta^2 R^{(1)2} \overline{\cos^2 \varphi} + h\eta R^{(1)} \overline{\cos^2 \varphi} = 0, \quad (9.6)$$

откуда, учитывая, что  $\overline{\cos^2 \varphi} = 1/2$  получаем:

$$R^{(2)}(R^{(0)}) = \frac{1}{6} R^{(0)10} \quad (9.7)$$

и, окончательно,

$$R_L(R^{(0)}, \varphi) = R^{(0)} + \frac{1}{3} \eta R^{(0)5} \cos \varphi + \frac{1}{6} \eta^2 R^{(0)10}. \quad (9.8)$$



Теперь, подставляя (9.8) и (9.3) в (9.1), установим связь между  $R^{(0)}$  и  $L$ . Вычисление интеграла дает:

$$R^{(0)} = L \left( 1 - \frac{5}{18} \eta^2 \right). \quad (9.9)$$

И, следовательно,

$$R_L(\varphi) = L + \frac{1}{3} \eta L^5 \cos \varphi - \frac{1}{9} \eta^2 L^{10}. \quad (9.10)$$

При медленном изменении параметра  $\eta$  частицы, находившиеся при  $\eta = 0$  на окружности  $R = L$ , будут дрейфовать по контурам, форма которых определяется соотношением (9.10).

Для дальнейшего нам понадобятся также формулы, выражающие  $L$  через  $R$ ,  $\varphi$  и  $\eta$ . Эти формулы легко получить из (9.10). Введем буквенные обозначения

$$R_L(\varphi) = L + a_1 \eta L^5 \cos \varphi + b_1 \eta^2 L^{10} \quad \left( a_1 = \frac{1}{3}; \quad b_1 = -\frac{1}{9} \right). \quad (9.11)$$

Ищем  $L = L(R, \varphi, \eta)$  в виде

$$L = R + a'_1 \eta R^5 \cos \varphi + b'_1 \eta^2 R^{10}. \quad (9.12)$$

Подставляя (9.12) в (9.11) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\eta$ , получаем:

$$a'_1 = -a_1; \quad b'_1 = -b_1 + \frac{5}{2} a_1^2$$

и

$$L = R - a_1 \eta R^5 \cos \varphi + \left( \frac{5}{2} a_1^2 - b_1 \right) \eta^2 R^{10}. \quad (9.13)$$

Последовательность дальнейших расчетов такова: во-первых, мы определим смещение частицы с начальными координатами  $R^*$ ,  $\varphi^*$  при быстром (в сравнении с магнитным дрейфом) изменении амплитуды асимметричной гармоникой внешних токов от  $\eta^*$  до  $\eta$ . Расчеты будут основаны на уравнении электрического дрейфа частицы без учета магнитного дрейфа. Затем мы подставим в качестве начальных координат значения  $R_L(\varphi)$  при  $\eta = \eta^*$  и определим таким образом смещение частиц с одним и тем же  $L$  в зависимости от  $\varphi \equiv \varphi^*$ . Подставляя конечные значения координат в (9.13), найдем зависимость величины  $\delta L$  от  $\varphi^*$  и  $L$  и, наконец, усредняя по всем значениям  $\varphi^*$  от 0 до  $2\pi$ , вычислим  $\Delta \bar{L}^2$  и  $\Delta L$ .

Уравнения электрического дрейфа в поле  $E$ , определенном в § 8, имеют в компонентах вид

$$\dot{R} = -\frac{c}{a} \frac{E_\varphi}{H_{0\theta} + h_\theta} = \eta R^3 \frac{\frac{8}{21} R^2 \cos \varphi + \frac{1}{42} \eta R^6 \cos 2\varphi}{1 + \eta R^4 \cos \varphi}, \quad (9.14)$$

$$R\dot{\varphi} = \frac{c}{a} \frac{E_R}{H_{0\theta}} = \frac{1}{7} \eta R^5 \sin \varphi. \quad (9.15)$$

Поскольку изменение  $\varphi$  в первом приближении не изменяет  $L$  (см. (9.10) и (9.12)), второе уравнение достаточно рассмотреть в линейном приближении. Разделив обе

части уравнений на  $\dot{\eta}$  и разлагая правую часть (9.14) в ряд по  $\eta$  с точностью до среднего значения члена, пропорционального  $\eta$ , получаем:

$$\frac{dR}{d\eta} = -\frac{8}{21}R^5 \cos \varphi + \frac{4}{21}\eta R^9, \quad (9.16)$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{7}R^4 \sin \varphi. \quad (9.17)$$

Ищем решение в виде

$$R(R_0, \varphi_0, \eta) = R_0 + \eta R^{(1)}(R_0, \varphi_0) + \eta^2 R^{(2)}(R_0); \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{7}R_0^4 \sin \varphi_0.$$

Подставляя в (9.16), усредняя по  $\varphi$  члены первого порядка малости по  $\eta$  и приравнявая коэффициенты при равных степенях  $\eta$  нулю, получаем:

$$R = R_0 + a_2 R_0^5 \cos \varphi_0 + b_2 R_0^9; \quad \varphi = \varphi_0 + \gamma \eta R_0^4 \sin \varphi_0, \quad (9.18)$$

где

$$a_2 = -\frac{8}{21}, \quad b_2 = \frac{128}{441}, \quad \gamma = \frac{1}{7}.$$

Перейдем от произвольных постоянных  $R_0, \varphi_0$  при  $\eta = 0$  к  $R^*, \varphi^*$  при  $\eta = \eta^*$ . Поскольку изменение  $\varphi$  достаточно знать лишь в первом приближении,

$$\varphi = \varphi^* + \gamma R^{*4}(\eta - \eta^*) \sin \varphi^*, \quad \varphi_0 = \varphi^* - \gamma R^{*4} \sin \varphi^*. \quad (9.19)$$

Положим  $R_0 = R^* + \alpha_1 \eta R^{*5} \cos \varphi^* + \alpha_2 \eta^2 R^{*9}$ . Подставив  $R_0$  в (9.18) при  $\eta = \eta^*$  и учитывая (9.19), получаем, что

$$\alpha_1 = -a_2, \quad \alpha_2 = \frac{5}{2}a_2^2 - \frac{a_2\gamma}{2} - b_2$$

и

$$R = R^* - a_2 R^{*5} \eta^* \cos \varphi^* + \frac{5}{2} \left( a_2^2 - \frac{a_2\gamma}{2} - b_2 \right) \eta^{*2} R^{*9}. \quad (9.20)$$

Выражая в (9.18) при произвольном  $\eta$  величины  $R_0$  и  $\varphi_0$  через  $R^*$  и  $\varphi^*$ , имеем:

$$R = R^* + a_2(\eta - \eta^*)R^{*5} \cos \varphi^* - \frac{a_2}{2} (5a_2 - \gamma)\eta^*(\eta - \eta^*)R^{*9} + b_2(\eta^2 - \eta^{*2})R^{*9}. \quad (9.21)$$

Соотношения (9.19) и (9.21) дают, таким образом, смещение частиц при быстром изменении амплитуды асимметричной гармоник от произвольного  $\eta^*$  до  $\eta$ .

Рассмотрим теперь частицы, имевшие при  $\eta = \eta^*$  одинаковые значения  $L_0$  параметра  $L$ . Согласно (9.11) следует положить

$$R^* = L_0 + a_1 \eta^* \cos \varphi^* L_0^5 + b_1 \eta^{*2} L_0^9. \quad (9.22)$$

Подставляя (9.22) в (9.21), получаем  $R'(L_0, \varphi^*, \eta)$ :

$$R'(L_0, \varphi^*, \eta) = L_0 + [a_1 \eta^* + a_2(\eta - \eta^*)] \cos \varphi^* L_0^5 + \left\{ b_1 \eta^{*2} + \frac{5}{2} a_1 a_2 \eta^*(\eta - \eta^*) - \frac{a_2}{2} (5a_2 - \gamma) \eta^*(\eta - \eta^*) + b_2(\eta^2 - \eta^{*2}) \right\} L_0^9. \quad (9.23)$$

По найденным значениям  $\varphi(\varphi^*, R^*, \eta)$  (9.19) и  $R'(L_0, \varphi^*, \eta)$  (9.23) из (9.13) определяем изменение  $L$ :  $\Delta L = L' - L_0$ ,

$$\Delta L = (a_2 - a_1)(\eta - \eta^*) \cos \varphi^* L_0^5 + \left\{ (b_2 - b_1)(\eta^2 - \eta^{*2}) - \frac{5}{2} a_1 a_2 (\eta - \eta^*)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2} (\eta - \eta^*)(a_1 \eta + a_2 \eta^*) - \frac{5}{2} (\eta - \eta^*)(a_2^2 \eta^* - a_1^2 \eta) \right\} L_0^9. \quad (9.24)$$

Усредняя  $\Delta L^2$  и  $\Delta L$  по  $\varphi^*$ , найдем параметры переноса. При усреднении в случае  $\eta^* \neq 0$  следует иметь в виду, что различные значения  $\varphi^*$  не являются равновероятными. Вероятность пребывания частицы на дуге  $(\varphi^*, \varphi^* + d\varphi^*)$  кривой (9.22), очевидно, есть

$$dw = \frac{R^*(L_0, \varphi^*)}{v_{\varphi_{\text{md}}}(R^*, \varphi^*)} d\varphi^*, \quad (9.25)$$

где  $v_{\varphi_{\text{md}}}(R^*, \varphi^*) - \varphi$  — компонента скорости магнитного дрейфа. Поскольку величина  $\Delta L \sim \eta$ , возмущение  $v_{\text{md}}$  за счет поля  $h^*$  достаточно учесть лишь в первом по  $\eta$  порядке и в случае частиц, точки отражения которых лежат вблизи плоскости экватора, ограничиться лишь  $\theta$ -компонентой возмущения поля. Средние значения  $\overline{\Delta L^2}$  и  $\overline{\Delta L}$  определяются, таким образом, формулами

$$\overline{\Delta L^2} = \frac{1}{\overline{T}_{\text{md}}} \oint_{R_L(\varphi^*, \eta^*, L)} \Delta L^2(L, \varphi^*, \eta) \frac{R^*(L, \varphi^*)}{v_{\varphi_{\text{md}}}(R^*, \varphi^*)} d\varphi^*, \quad (9.26)$$

$$\overline{\Delta L} = \frac{1}{\overline{T}_{\text{md}}} \oint_{R_L(\varphi^*, \eta^*, L)} \Delta L(L, \varphi^*, \eta) \frac{R^*(L, \varphi^*)}{v_{\varphi_{\text{md}}}(R^*, \varphi^*)} d\varphi^*, \quad (9.27)$$

где

$$\overline{T}_{\text{md}} = \oint_{R_L(\varphi^*, \eta^*, L)} \frac{R^*(L, \varphi^*)}{v_{\varphi_{\text{md}}}(R^*, \varphi^*)} d\varphi^* \quad (9.28)$$

— период магнитного дрейфа. Мы опустили индекс «0» при  $L$ .

Учитывая, что частицы дрейфуют вдоль линии  $H = \text{const}$ , мы можем положить  $v_{\varphi_{\text{md}}} = A \frac{\partial H}{\partial R} \Big|_{R=R_L(\varphi^*, \eta^*)}$ , где множитель  $A$  не зависит от координат. Дифференцируя соотношение

$$H = \frac{H_e}{R^3} + h^* R \cos \varphi^*$$

по  $R$  и подставляя выражение для  $R_L$ , получаем:

$$v_{\varphi_{\text{md}}} = A' \left( 1 - \frac{12a_1 + 1}{3} \eta^* \cos \varphi^* L^4 \right), \quad (9.29)$$

где  $A' = -\frac{3H_e}{L^4} A$ , так же как и  $A$ , не зависит от координат (при  $L = \text{const}$ ).

Подставляя (9.29) и (9.22) в (9.26)–(9.28), находим параметры переноса:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta L^2} &= \frac{1}{2}(a_2 - a_1)^2(\eta - \eta^*)^2 L^{10}; \\ \overline{\Delta L} &= \left\{ (b_2 - b_1)(\eta^2 - \eta^{*2}) - \frac{5}{2}a_1 a_2(\eta - \eta^*)^2 + \frac{\gamma}{2}(\eta - \eta^*)(a_1 \eta + a_2 \eta^*) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2}(\eta - \eta^*)(a_2^2 \eta^* - a_1^2 \eta) + \frac{15a_1 + 1}{6}(a_2 - a_1)\eta^*(\eta - \eta^*) \right\} L_0^9. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Численные значения констант суть:

$$a_1 = \frac{1}{3}; \quad a_2 = -\frac{8}{21}; \quad b_1 = -\frac{1}{9}; \quad b_2 = \frac{128}{441}; \quad \gamma = \frac{1}{7}.$$

Отсюда, полагая  $(\eta - \eta^*) = \Delta\eta$ , имеем:

$$\overline{\Delta L^2} = \frac{25}{98}(\Delta\eta)^2 L^{10}, \quad (9.31)$$

$$\overline{\Delta L} = \frac{50}{49}(\Delta\eta)^2 L^9. \quad (9.32)$$

Соотношения (9.31)–(9.32) определяют среднее и среднеквадратичное смещения частиц при данном импульсе. Коэффициенты переноса  $D = \frac{d}{dt}\overline{\Delta L^2}$  и  $U = \frac{d}{dt}\overline{\Delta L}$  даются соотношениями

$$D = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{T} \overline{\Delta L^2} \right\rangle, \quad U = \left\langle \frac{1}{T} \overline{\Delta L} \right\rangle, \quad (9.33)$$

где  $T$  — время между двумя последовательными импульсами, а угловые скобки обозначают усреднение по многим импульсам.

В § 4 была введена функция распределения  $\Theta = \Theta(J, L, t)$ , дающая число частиц с  $J = PL^{3/2}$  в единичном интервале значений инварианта  $J$  и в единичном интервале значений  $L$ . Изменение этой функции во времени за счет переноса описывается уравнением Фоккера—Планка

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial L^2} D \Theta - \frac{\partial}{\partial L} U \Theta + \text{члены, характеризующие другие процессы}. \quad (9.34)$$

К этому же уравнению приводит другой метод — непосредственное вычисление потока частиц  $F$  через оболочку с заданным  $L$  [8]. Поток имеет вид

$$F = - \left\{ D \frac{\partial \Theta}{\partial L} + \left( \frac{\partial D}{\partial L} - U \right) \Theta \right\}, \quad (9.35)$$

что легко получить из (9.34).

Если ввести обозначение

$$D_0 = \frac{25}{196} \left\langle \frac{1}{T} (\Delta\eta)^2 \right\rangle, \quad (9.36)$$

то (9.35) принимает вид

$$F = -D_0 L^{10} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial L} + \frac{2}{L} \Theta \right). \quad (9.37)$$

Первый член в (9.37) имеет форму диффузионного потока и пропорционален градиенту  $\Theta$ , второй член описывает регулярный поток. Как видно из (9.37), регулярный поток направлен к Земле. Функция  $\Theta$  пропорциональна  $nL^2$ , где  $n$  — плотность частиц. В стационарном состоянии, когда поток отсутствует, плотность частиц с данным  $J$  не постоянна (как в случае диффузионного равновесия), а растет с уменьшением  $L$  как  $L^{-4}$ . Перенос под действием внезапных импульсов приводит, следовательно, к концентрации частиц вблизи Земли.

Рассмотрим более подробно физический смысл полученных результатов. Как видно из формул (9.18) и (9.21), во время быстрой фазы цикла частицы, находившиеся на дневной стороне (малые  $\varphi$ ), смещаются по направлению к Земле при сжатии магнитосферы или, наоборот, удаляются при расширении (коэффициент  $a_2 = -8/21$  отрицателен). На ночной стороне ( $\varphi \sim 180^\circ$ ) имеет место обратная картина. В то же время линии  $L = \text{const}$  движутся как бы навстречу частицам (см. (9.10)). В результате при сжатии частицы, первоначально находившиеся на дневной стороне, попадают на траектории с меньшими, а на ночной — с большими  $L$  по сравнению с исходным.

Поскольку после скачка возмущение поля меняется медленно в сравнении с периодом долгого дрейфа частиц, значения  $L$  «замораживаются» и частицы расходятся по новым дрейфовым орбитам. Протоны или электроны, первоначально дрейфовавшие по бесконечно узкой оболочке, распределяются по некоторому слою конечной толщины. В первом приближении половина частиц удаляется от Земли, а половина — приближается к ней. В результате возникает диффузия. Амплитуда смещения  $\delta L$  пропорциональна  $E/H$  и, поскольку  $E \propto L^2$ , а  $H \propto L^{-3}$ ,  $\delta L \propto L^5$ , а коэффициент диффузии  $D \propto \delta L^2 \propto L^{10}$ .

Очевидно, что чем дальше от Земли находилась в начале возмущения частица с данным  $\varphi$ , тем больше будет ее смещение. Частицы, входящие в некоторую дрейфовую оболочку, стартуют с больших расстояний, чем выходящие из нее. Поэтому регулярный поток направлен к Земле: область, из которой частицы перейдут внутрь данной оболочки, больше, чем область, занятая уходящими из оболочки частицами. Порядок величины регулярного потока определяется изменением  $\delta L$  на расстоянии  $\sim \delta L$ , т. е.  $\frac{\partial \delta L}{\partial L} \delta L$ . Учитывая, что  $\delta L$  в первом приближении  $\propto L^5$ , получаем, что средний поток  $\propto L^9$ .

Во многих задачах, приводящих к уравнению Фоккера—Планка, нет необходимости проводить расчеты с точностью до квадратичных членов включительно, и среднее изменение  $\delta x$  независимой переменной  $x$  оказывается связанным со среднеквадратичным изменением  $\overline{\delta x^2}$  простым соотношением

$$\frac{\overline{\delta x}}{\delta T} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overline{\delta x^2}}{\delta T}. \quad (9.38)$$

Уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\overline{\delta x^2}}{\delta T} f(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overline{\delta x}}{\delta T} f(x, t) \quad (9.39)$$

сводится при этом к уравнению диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\overline{\delta x^2}}{\delta T} \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (9.40)$$

В работе Паркера [2] предполагалось, в частности, что перенос под действием внезапных импульсов описывается уравнением вида (9.40).

Однако в данном случае такое заключение неверно. Соотношение (9.38) имеет место, когда вероятности прямого и обратного процессов равны. В нашей задаче для этого необходимо, чтобы вероятность перехода из слоя  $(L, L + dL)$  в  $(L', L' + dL')$  равнялась вероятности перехода из  $(L', L' + dL')$  в  $(L, L + dL)$ . Между тем никаких оснований для такого утверждения нет. Прямым и обратным процессами являются два события, при последовательном протекании которых система возвращается к исходному состоянию. В магнитном поле, как известно, обратная картина движения реализуется лишь при изменении знака поля. Так, если бы после внезапного импульса геомагнитное поле изменило знак, то частицы стали бы дрейфовать в противоположном направлении; в случае точного повторения в обратной последовательности и с противоположным знаком временного возмущения к моменту скачка частицы оказались бы в тех точках пространства, в которые они перешли при скачке во время «прямого» процесса. При скачкообразном изменении в «обратном» процессе они возвращаются на исходные орбиты.

Поскольку, однако, в течение времени, представляющего интерес для теории радиационных поясов, геомагнитное поле сохраняет знак, детальное равновесие отсутствует, и задача о переносе должна рассматриваться не в диффузионном, а в фоккер-планковском приближении. Движение частиц при этом следует рассмотреть с точностью до квадратичных членов включительно.

Как видно из полученных результатов, коэффициенты переноса не зависят от инварианта  $J$ . Этот вывод связан с своеобразной временной зависимостью возмущения поля и ограничен определенным интервалом периодов дрейфа частиц  $\tau_\varphi$ . Как уже отмечалось, рассмотренный эффект имеет место в том случае, когда  $\tau_\varphi$  много больше времени скачка ( $\sim 1$  мин) и много меньше периода восстановления поля ( $\sim 1$  час). При этом во время скачка движение обусловлено электрическим дрейфом, а на последующих стадиях — сохранением третьего адиабатического инварианта. И в том, и в другом случае движение не зависит от энергии частиц. На рис. 24 приведена зависимость энергии протонов  $E_p$  от  $L$  при постоянных  $J$  (сплош-

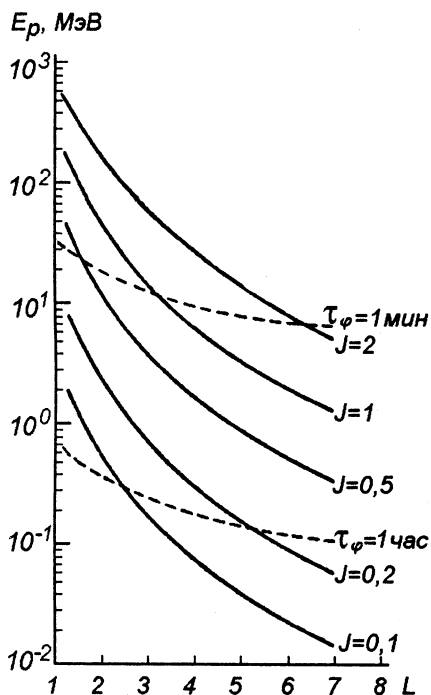


Рис. 24. Зависимость энергии протонов от  $L$  при постоянных  $J$

ные кривые) и значения  $E_{p,1,2}$  энергии, при которых период дрейфа равен одной минуте и одному часу (пунктир). Аналогичные зависимости для электронов приведены на рис. 25. Видно, что в энергетических интервалах, допускающих рассмотренное выше приближение, расположена основная масса частиц поясов.

В § 3 отмечалось, что наземные станции почти всегда регистрируют низшие гармоники собственных гидромагнитных колебаний магнитосферы в диапазоне частот от  $\sim 10^{-2}$  до  $10^{-1}$  Гц, причем в зависимости от положения границы магнитосферы частоты изменяются. Поэтому спектр возмущений содержит с заметной амплитудой гармоники вплоть до 0,1 Гц, и можно ожидать, что перенос происходит с высокой эффективностью вплоть до энергий, соответствующих  $\tau_\varphi \sim 10$  с (100 МэВ при  $L \approx 2$ ). Столь малые  $\tau_\varphi$  характерны лишь для протонов внутренней зоны, где возмущения и при собственных колебаниях практически потенциальны (время распространения гидромагнитной волны с оболочки  $L \approx 2$  до Земли порядка одной секунды, и при частотах  $\sim 0,1$ – $0,01$  Гц инерцией холодной плазмы в этом районе можно пренебречь). Поэтому при колебаниях с квадрупольной симметрией зависимость коэффициентов переноса от  $L$  будет иметь тот же вид, что и в случае более низких частот ( $\Delta L^2 \propto L^{10}$ ,  $\Delta L \propto L^9$ ). Однако величина  $D_0$  может, вообще говоря, зависеть от энергии. В настоящее время данные о спектре собственных колебаний, необходимые для определения этой зависимости, отсутствуют. Однако при изучении радиационных поясов был обнаружен эффект, качественно предсказанный теоретически, — движение второго пика протонов с энергиями  $\sim 50$  МэВ [109]. Скорость движения соответствует значению  $D_0$ , характерному для менее энергичных частиц. Поэтому появились некоторые основания считать, что величина  $D_0$  не зависит от энергии вплоть до значений  $\tau_\varphi \approx 0,5$  мин (период дрейфа протонов с энергиями  $\sim 50$  МэВ при  $L \approx 2$ ). Подробнее этот эффект будет рассмотрен в § 13.

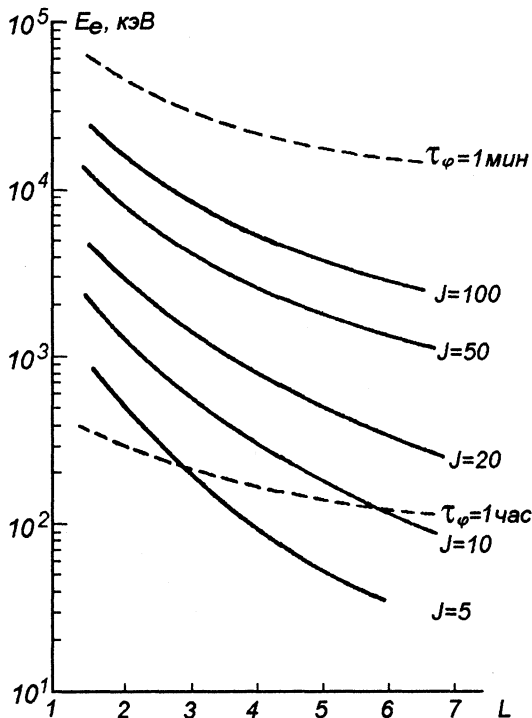


Рис. 25. Зависимость энергии электронов от  $L$  при постоянных  $J$

## § 10. Оценка параметра $D_0$ по данным о внезапных импульсах

Как видно из соотношения (9.36), для вычисления константы  $D_0$  по данным о внезапных импульсах необходимо знать частоту появления импульсов в зависимости от амплитуды и степень асимметрии возмущения поля. До недавнего времени такие данные отсутствовали, поскольку с точки зрения теории геомагнитных возмущений более важным предметом анализа представлялись ионосферные токи и токи, возникающие во время главных фаз бурь. Из-за отсутствия необходимой информации в ранних работах по переносу внезапные импульсы отождествлялись

Таблица 3

$\bar{h}, \gamma$	Число событий в год
> 100	0,5
60–100	1,8
40–60	2,3
20–40	21
5–20	61
2	720

с внезапными началами магнитных бурь, которые в действительности происходят значительно реже. Поэтому величина  $D_0$ , оцененная в [2] и [6], оказалась сильно заниженной, несмотря на то, что в [2] была использована модель Чепмена—Ферраро (плоская граница магнитосферы), дающая сильную асимметрию, а смещение границы принималось очень большим (до пяти радиусов Земли от ее центра).

За последние годы изучение внезапных импульсов значительно продвинулось вперед, особенно после того, как выяснилась их важная роль в динамике зон радиации. Как было показано в § 2, по данным об импульсах можно, кроме того, определить потенциал магнитного поля токов, текущих у границы магнитосферы.

В работе [27], подробно рассмотренной в § 2, была найдена степень асимметрии возмущения у экватора Земли:

$$\Delta h = \bar{h}(1 + 0,45 \cos \varphi).$$

Отсюда, за вычетом поля скин-токов (см. § 2), получается следующее соотношение между средним наблюдаемым возмущением  $\bar{h}$  и величиной  $\Delta h_0$  в (9.36):

$$\Delta h_0 = 0,27\bar{h}.$$

В [27] указывалось, что положительные импульсы наблюдаются ежедневно, а частота отрицательных импульсов примерно в 2 раза ниже. Однако данных о частоте в зависимости от амплитуды в [27] нет. Такие данные приведены в [15]. Табл. 3 взята из этой работы. Данные получены при усреднении за период с 1958 по 1961 гг. и включают только положительные импульсы (в том числе внезапные начала магнитных бурь).

Для вычисления  $D_0$  по данным табл. 3 положим:

$$D_0 = \frac{25}{196 T} \frac{(0,27)^2}{H_e^2} \sum \nu_i (\bar{h}_i)^2,$$

где  $T = 1$  год  $= 3,1 \cdot 10^7$  с,  $H_e = 3,1 \cdot 10^4 \gamma$  — дипольное поле у экватора Земли,  $\nu_i$  — число импульсов с амплитудой  $\bar{h}_i$ , в год. В результате получаем  $D_0 \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ .

Расчет величины  $D_0$  по тем же данным, но на основе другой модели магнитосферы [15] дает значение  $D_0$ , в 10 раз меньшее полученного нами. Это объясняется низкой асимметрией возмущения поля, принятой в [15]: согласно этой модели  $\bar{h}_0/\bar{h} \approx 0,08$ , а не 0,27. Модель [15] соответствует расчетам [31], описанным в § 2. Как отмечают авторы [15], в действительности асимметрия значительно выше.

Отметим, что в нашей работе [11] из данных о структуре протонного пояса было найдено значение  $D_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ . Этот метод позволяет определить отношение  $D_0/N$ , где  $N$  — плотность холодных электронов на больших высотах. Указанное



значение  $D_0$  соответствует  $N = 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Таким образом, оценки по магнитным данным и по структуре протонного пояса очень близки и различаются лишь в 2,5 раза. Можно было бы предположить, что  $N = 400 \text{ см}^{-3}$ , и тогда обе оценки совпадут. Однако в последнее время появились экспериментальные данные, позволяющие получить  $D_0$  в чистом виде из скорости распространения диффузионных волн [109]. Эти данные, как будет показано в § 14, лучше согласуются с величиной  $D_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ . По-видимому, исследование переноса протонов дает возможность оценить, таким образом, распределение холодной плазмы на больших высотах. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в § 21.

Расхождение оценок  $D_0$  по данным магнитных измерений и по исследованию радиационных поясов не столь велико, чтобы придавать ему особое значение, тем более, что параметры, использованные для расчетов  $D_0$ , не известны с достаточной точностью. Так, в табл. 3 отсутствуют импульсы с амплитудами от 2 до  $5\gamma$ . Не учтены также отрицательные импульсы. Следует, кроме того, принять во внимание, что  $D_0$  зависит от  $\bar{h}$  квадратично. В то же время табл. 3 указывает на возможность значительных флуктуаций  $D_0$ . Легко видеть, что средняя амплитуда  $\bar{h}$ , соответствующая  $D_0 \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$  и 800 импульсам в год, порядка  $10\gamma$ . Поэтому импульс с амплитудой в  $40\gamma$  эквивалентен возрастанию  $D_0$  в 16 раз, а при  $\bar{h} = 100\gamma$  — на два порядка. Мощные импульсы появляются относительно редко. В достаточно глубоких районах магнитосферы, где характерные времена переноса (см. следующий параграф) больше или порядка одного года, флуктуации  $D_0$  в значительной мере усредняются. Однако на более удаленных оболочках эффект флуктуаций  $D_0$  должен играть большую роль.

Первые три интервала амплитуд в табл. 3 соответствуют сильным магнитным бурям, и появление таких импульсов коррелирует с уровнем солнечной активности. Вклад мощных импульсов (с амплитудами  $> 40\gamma$ )  $\approx 40\%$ . Поэтому можно ожидать, что с 11-летним циклом коэффициент  $D_0$  будет испытывать модуляцию с амплитудой  $\sim 25\%$  среднего значения. Однако, как уже отмечалось в §§ 2 и 7, слабые возмущения антикоррелируют с сильными, и поэтому глубина модуляции должна быть ниже. Судя по данным о протонном поясе, глубина модуляции невелика и не сказывается на распределении интенсивности в пределах точности эксперимента (см. § 13).

Поэтому солнечный цикл должен проявляться, прежде всего, в изменении вероятности больших флуктуаций  $D_0$ . Среднее же значение  $D_0$  можно считать стабильным.

## § 11. Основные решения уравнения переноса

Рассмотрим теперь основные решения уравнения переноса

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = D_0 \frac{\partial}{\partial L} L^{10} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial L} + \frac{2}{L} \Theta \right). \quad (11.1)$$

В конце данного параграфа будут исследованы также некоторые задачи с учетом источников.

Уравнение (11.1) описывает чистый перенос: предполагается, что в рассматриваемой области источники частиц, потери и процессы, приводящие к изменению величины инварианта  $J$ , отсутствуют. В стационарном случае  $\partial \Theta / \partial t = 0$  имеем:

$$\Theta = A(J)L^{-2} + B(J)L^{-9}, \quad (11.2)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные функции инварианта  $J$ .

Первый член (11.2) соответствует нулевому потоку частиц (см. (9.37)), второй — постоянному (не зависящему от  $L$ ) потоку, направленному от Земли при  $B > 0$ . Второй член отличен от нуля в том случае, когда в области малых (меньших, чем в рассматриваемой области)  $L$  имеются источники частиц. Первый член описывает равновесное состояние, устанавливающееся при наличии некоторой стационарной интенсивности на внешней границе области. Учитывая, что интенсивность  $I_0$  пропорциональна  $\Theta L^{-2}$  (см. (4.16)), получаем, что в этом случае наблюдается значительная концентрация плотности частиц ( $n \sim L^{-4}$ ). Концентрация связана с регулярным потоком: стационарное состояние устанавливается в том случае, когда диффузия наружу компенсирует этот поток.

Рассмотрим теперь нестационарные процессы. Предположим, что при некотором граничном  $L = L_b$  поддерживается распределение вида

$$\Theta(L_b, t) = \Theta(J) + \theta(J)e^{i\omega t},$$

где  $|\theta| \leq |\Theta|$  и  $\omega > 0$ . Решение состоит из двух членов, первый из которых связан со средним значением  $\Theta(L_b)$  и сводится к рассмотренному выше стационарному решению

$$\bar{\Theta} = \Theta_0(J) \left( \frac{L_b}{L} \right)^2.$$

Второй член описывает вариации. Наибольший интерес представляют решения, соответствующие достаточно низким частотам, при которых вблизи границы устанавливается равновесие ( $\Theta \propto L^{-2}$ ). В этом случае задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} = D_0 \frac{\partial}{\partial L} L^{10} \left( \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial L} + \frac{2}{L} \tilde{\Theta} \right)$$

с предельными условиями

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}_{L \rightarrow \infty} \rightarrow \theta(J) \left( \frac{L_b}{L} \right)^2 e^{i\omega t}, \\ \Theta_{L \rightarrow 0} \text{ ограничено.} \end{cases} \quad (11.3)$$

Ищем решение в виде  $\Theta = \theta_0(J) \left( \frac{L_b}{L} \right)^2 e^{i\omega t} \psi(L)$ . Функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{i\omega}{D_0} \psi = L^2 \frac{d}{dL} L^8 \frac{d\psi}{dL} \quad (11.4)$$

с условиями:  $\psi_{L \rightarrow \infty} = 1,1$  и  $\psi_{L \rightarrow 0}$  ограничен. Запишем (11.4) в виде

$$\frac{d^2 \psi}{dL^2} + \frac{8}{L} \frac{d\psi}{dL} - \frac{i\omega}{D_0} L^{-10} \psi = 0 \quad (11.5)$$

и положим  $\xi = L^{-4}$ ,  $\psi = \xi^{7/8} Z(\xi)$ . Уравнение (11.5) сводится к уравнению Бесселя порядка  $7/8$ :

$$Z'' + \frac{1}{\xi} Z' + \left( -\frac{i\omega}{16D_0} - \frac{49}{64\xi^2} \right) Z = 0, \quad (11.6)$$

и решениями его являются цилиндрические функции аргумента

$$x = \sqrt{\frac{-i\omega}{16D_0}} \xi = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D_0}} \xi. \quad (11.7)$$

Из условия ограниченности при  $L \rightarrow 0$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ) следует, что искомым решением является функция Ганкеля второго рода. При  $x \rightarrow 0$

$$H_\nu^{(2)} \approx -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{i}{\Gamma(1-\nu)}.$$

Учитывая, что при  $L \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow 0$ )  $\psi \rightarrow 1$ , получаем:

$$\psi = i \left(-\frac{i\omega}{64D_0}\right)^{7/16} \Gamma\left(\frac{1}{8}\right) L^{-7/2} H_{7/8}^{(2)} \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{16D_0 L^8}}\right) \quad (11.8)$$

и

$$\tilde{\Theta} = i \left(-\frac{i\omega}{64D_0}\right)^{7/16} \Gamma\left(\frac{1}{8}\right) L_b^{-7/2} \theta(J) \times \left(\frac{L_b}{L}\right)^{11/2} H_{7/8}^{(2)} \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{16D_0 L^8}}\right). \quad (11.9)$$

Представляет интерес оценить «глубину проникновения» осциллирующего возмущения интенсивности у границы в магнитосферу. Грубая оценка (аргумент функции Ганкеля порядка единицы) показывает, что «глубина проникновения» изменяется как  $\omega^{1/8}$ . Чем выше частота, тем дальше от Земли расположены оболочки, на которых имеются заметные вариации.

При более детальном анализе следует учесть спектр частиц. Очевидно, что эффект бетатронного ускорения сдвигает область заметных возмущений к Земле. Рассмотрим, например, степенной спектр  $\theta \propto J^{-n}$ . Тогда поток частиц с импульсом  $> P$  будет пропорционален

$$\int_{PL^{3/2}}^{\infty} v(J, L) \theta(J) dJ.$$

В релятивистском случае ( $v = c = \text{const}$ ) при  $\theta \propto J^{-n}$  этот интеграл пропорционален  $L^{-3(n-1)/2}$ . Учитывая, что плотность частиц  $n \propto L^{-2}\Theta$  (см. § 4), получаем, что вариация интенсивности частиц с импульсом больше  $P$  есть

$$I_0(>P) = C(P) L^{-(15+3(n-1))/2} H_{7/8}^{(2)} \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{16D_0 L^8}}\right) e^{i\omega t} \quad (11.10)$$

( $C$  — множитель, не зависящий от  $L$  и  $t$ ).

Функция  $I_0(>P)$  осциллирует при изменении  $L$ , причем амплитуда имеет максимум при некотором конечном  $L$  (при  $L \rightarrow \infty$  и  $L \rightarrow 0$  функция  $I_0(>P)$  обращается в нуль). Найдём положение этого максимума. Очевидно, что, поскольку множитель  $L^{-(15+3(n-1))/2}$  быстро растет с уменьшением  $L$ , максимум амплитуды будет расположен в области больших значений аргумента функции Ганкеля, где можно пользоваться асимптотическим разложением. Поэтому

$$I_0(>P) \approx C(P) L^{-(7+3n)/2} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\omega}{32D_0 L^8}} \right\} \sin \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{32D_0 L^8}} + \delta \right), \quad (11.11)$$

где  $\delta$  — фаза волны. Максимум амплитуды

$$L^{-(7+3n)/2} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\omega}{32D_0L^8}} \right\}$$

расположен при

$$L_m = \left( \frac{\omega}{2D_0} \right)^{1/8} \left( \frac{2}{7+3n} \right)^{1/4}. \quad (11.12)$$

Как видно из (11.12), положение максимума слабо зависит от энергетического спектра. В области  $L_m$  наблюдаются наиболее сильные вариации интенсивности.

Характер вариаций (см. (11.11)) таков. Сначала на оболочках с  $L$ , несколько большими  $L_m$ , возникает пик интенсивности, который движется к  $L_m$ , увеличиваясь по амплитуде, проходит через оболочку  $L_m$  и затем начинает уменьшаться. Спустя время  $\pi/\omega$  картина повторяется с противоположным знаком. Фазовая скорость волны в районе  $L_m$  определяется дифференцированием аргумента синуса в (11.11):

$$\omega dt + \frac{1}{L^5} \sqrt{\frac{\omega}{2D_0}} dL = 0,$$

откуда

$$V = \frac{dL}{dt} = \sqrt{2D_0\omega} L^5 \quad (11.13)$$

и

$$V(L_m) = - \left( \frac{\omega}{2D_0} \right)^{5/8} \sqrt{2D_0\omega} \left( \frac{2}{7+3n} \right)^{5/4}. \quad (11.14)$$

В качестве примера рассмотрим периоды в 11 лет и в 1 месяц. Первый период соответствует 11-летнему циклу, второй — качественно характеризует среднюю частоту повторения сильных магнитных бурь в годы максимума солнечной активности. Примем, что  $D_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ . В первом случае  $\omega \approx 2 \cdot 10^{-8}$ . При  $n \sim 3$  имеем  $L_m \approx 2,7$  и  $V(L_m) \approx 3 \cdot 10^{-3}$  а/сутки. Во втором случае соответственно  $L_m \approx 5$ , а  $V(L_m) \approx 0,7$  а/сутки. Эти примеры характеризуют временные масштабы изменения интенсивности за счет переноса на различных  $L$ -оболочках.

Однако периодические изменения условий на границе не столь характерны для поясов, как скачкообразные иррегулярные изменения с широким частотным спектром. Представляет интерес выяснить, в частности, как будет изменяться стационарное распределение при скачкообразном изменении условий на границе.

Если рассматривать эффекты, сопровождающие такой скачок, в районе внешней зоны и ближе к Земле ( $L \leq 5$ ), то без особой погрешности можно считать границу бесконечно удаленной. В этом случае задача не содержит (ни в уравнениях, ни в граничных и начальных условиях) констант с размерностью длины<sup>1)</sup>, и поэтому должно существовать автомодельное решение, зависящее от одной переменной  $\xi = \xi(L, t)$ . Можно, в частности, положить  $\xi = D_0 t f(L)$ . Функция  $f$  выбирается из соображений автомодельности; при подстановке в уравнение (11.1) переменной  $\xi$  коэффициенты должны быть также функциями  $\xi$ .

<sup>1)</sup> Радиус Земли  $a$  выбран в качестве единицы длины чисто условно — как масштабная единица, соизмеримая с размерами области захваченной радиации.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\xi)}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = D_0 f(L) \frac{dF}{d\xi}; \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial L} = D_0 t \frac{df}{dL} \frac{dF}{d\xi}; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} &= \frac{\partial}{\partial L} D_0 t \frac{df}{dL} \cdot \frac{dF}{d\xi} = D_0^2 t^2 \left( \frac{df}{dL} \right)^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} + D_0 t \frac{d^2 f}{dL^2} \frac{dF}{d\xi},\end{aligned}$$

где  $F$  — любая функция  $\xi$ .

Искомое решение, очевидно, имеет вид

$$\Theta = \theta(J) L^{-2} F(\xi), \quad (11.15)$$

где  $F(\xi) \rightarrow 1$  при  $\xi \rightarrow \infty$  и  $F(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow 0$ : на достаточно удаленных оболочках установилось стационарное состояние, соответствующее новым граничным условиям, а до малых возмущений еще не успело дойти. Подставляя (11.15) в (11.1), получаем следующее уравнение:

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{D_0^2 t^2 \left( \frac{df}{dL} \right)^2 L^{10}}{f(L)} \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{D_0 t \left( L^{10} \frac{d^2 f}{dL^2} + 8L^9 \frac{df}{dL} \right)}{f(L)} \frac{dF}{d\xi}. \quad (11.16)$$

Из вида зависимости коэффициентов правой части (11.16) от  $t$  следует, что первый пропорционален  $\xi^2$ , а второй —  $\xi$ , или

$$\left( \frac{df}{dL} \right)^2 L^{10} = \alpha f^3(L), \quad (11.17)$$

$$L^{10} \frac{d^2 f}{dL^2} + 8L^9 \frac{df}{dL} = \beta f^2(L). \quad (11.18)$$

Единственное общее решение (11.17) и (11.18), не содержащее констант с размерностью длины, есть  $f(L) = kL^8$ , причем без ущерба для общности можно положить, что  $k = 1$ . Таким образом,

$$\xi = D_0 t L^8 \quad (11.19)$$

и

$$64\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} + (120\xi - 1) \frac{dF}{d\xi} = 0. \quad (11.20)$$

Решение, удовлетворяющее условиям:  $F_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1$ ,  $F_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow 0$ , есть

$$F = (8)^{-7/4} \cdot \frac{1}{\Gamma(7/8)} \int_0^\xi \eta^{-15/8} e^{-1/(64\eta)} d\eta. \quad (11.21)$$

Функция  $\Theta$  имеет вид одиночной диффузионной волны, распространяющейся к Земле. Фронт волны очень крутой: при малых  $\xi$  функция  $F$  убывает как  $e^{-1/(64D_0 t L^8)}$ . Положение фронта волны определяется точкой перегиба профиля. Как видно из (11.20),

при этом  $(d^2F/d\xi^2 = 0)$   $\xi = 1/120$ , или, с учетом (11.19),

$$L_f = \left( \frac{1}{120D_0t} \right)^{1/8}. \quad (11.22)$$

Соотношение (11.22) можно рассматривать также как характеристику времени распространения возмущения от границы магнитосферы на оболочку  $L$  за счет переноса:

$$\tau_D(L) = \frac{1}{120D_0L^8}. \quad (11.23)$$

В работах [5, 12] было использовано округленное значение  $\tau_D = 10^{-2}(D_0L^8)^{-1}$ . Разница в 20 % при нынешнем уровне знаний о поясах пренебрежимо мала.

Скорость фронта автомодельной диффузионной волны, согласно (11.22), есть

$$\dot{L}_f = 15D_0L^9 \quad (11.24)$$

и пропорциональна  $L^9$ . Отметим, что аналогичная зависимость скорости волны от  $L$  ( $\dot{L} \propto L^9$ ) имеет место и в рассмотренном выше случае периодического граничного условия. Если в (11.14) выразить  $\omega$  через  $L_m$  (из (11.12)), то мы приходим к закону вида (11.24).

Формулы для  $L_f$ ,  $\tau_D$  и  $\dot{L}_f(L)$  справедливы для волн, содержащих частицы с одинаковыми  $J$ . На практике всегда регистрируются частицы с заданными энергиями, и поэтому при анализе наблюдаемых на эксперименте волн следует, вообще говоря, принимать во внимание спектр частиц. При мягких спектрах скорость волн несколько возрастает вследствие бетатронного эффекта, который дает дополнительное увеличение числа энергичных частиц с уменьшением  $L$ .

Однако анализ конкретных примеров показывает, что зависимость  $L_f$ ,  $\tau_D$  и  $\dot{L}_f(L)$  от спектра невелика (как и в случае периодических возмущений). Исходя из сопоставления различных расчетов структуры протонного пояса, можно утверждать, что если некоторый радиационный пояс формируется за счет переноса и источник у границы стационарен, то максимум интенсивности частиц с энергией больше  $E$  будет расположен на оболочке, время переноса на которую  $\tau_D(L)$  (см. (11.23)) равно времени утечек частиц с данной энергией. Качественно такой вывод очевиден, однако расчеты показывают, что ошибка в определении  $L_m$  при такой оценке составляет лишь несколько процентов (см. § 12). Поэтому соотношения (11.22)–(11.24) являются основой качественного анализа радиационных поясов с точки зрения теории переноса.

В табл. 4 приведены значения  $\tau_D(L)$ , рассчитанные согласно (11.23), при  $D_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ .

При  $L = 1,5$  время переноса составляет почти 200 лет и убывает до немногих суток в районе внешнего пояса ( $L = 5$ ). Как отмечалось в § 10, примерно раз в месяц возникают флуктуации  $D_0$  на порядок и более. При 20-кратном возрастании  $D_0$  (что соответствует импульсу с амплитудой  $\sim 40\gamma$ ) фронт диффузии сместится за сутки на  $L \approx 4$ . Поэтому флуктуации  $D_0$  играют существенную роль вплоть до таких  $L$ . Изредка наблюдаются еще более мощные импульсы. При амплитуде в  $100\gamma$  один импульс эквивалентен 100 дням со средним уровнем возмущенности и фронт смешается непосредственно в область зазора.

Таблица 4

$L$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\tau_D(L), \text{с}$	$6,5 \cdot 10^9$	$6,5 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^8$	$2,5 \cdot 10^7$	$7,5 \cdot 10^6$	$2,6 \cdot 10^6$
$L$	4,5	5,0	5,5	6,0	7,0	
$\tau_D(L), \text{с}$	$1,0 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^4$	

Отметим, однако, что флуктуации величины  $D_0$  не всегда вызывают вариации интенсивности. Если имеется равновесное распределение вида (11.2), то изменение абсолютной величины  $D_0$  не искажает его. Вариации наблюдаются в том случае, когда имеются отклонения от закона (11.2) (например, на фронте диффузионной волны или в области, где основную роль играют потери частиц).

Заканчивая анализ автомодельных решений, отметим, что автомодельность сохраняется и в том случае, когда граничная интенсивность изменяется во времени по произвольному степенному закону  $t^n$  ( $n > 0$ ). При этом решение следует искать в виде

$$\Theta = \theta(J)L^2 t^n F(\xi)$$

с тем же  $\xi$  (11.19). Уравнение для  $F(\xi)$  сводится к вырожденному гипергеометрическому. Для  $n \lesssim 3$  и области изменения  $L$  в 2–3 раза решение очень близко к (11.21). Поэтому форма диффузионной автомодельной волны оказывается довольно стабильной относительно вариаций закона изменения граничной интенсивности во времени.

Рассмотренные частные решения показывают, что процессы переноса в магнитосфере характеризуются определенным соотношением между временем и параметром  $L$ : при нестационарных процессах существенные изменения интенсивности на оболочке происходят за время  $t \propto (D_0 L^8)^{-1}$ . Коэффициент пропорциональности  $\sim 10^{-2}$  и довольно слабо зависит от конкретной постановки задачи и спектра частиц. Эти выводы подтверждаются и общим решением задачи с начальными условиями, которое приводится ниже.

Найдем функцию Грина уравнения (11.1) [2, 11]. Для этого сделаем предварительно ту же замену переменных, что и при решении задачи с периодическими условиями на границе

$$\Theta = L^{-2}\psi, \quad x = \frac{1}{4}L^{-4}, \quad \psi = x^{7/8}Z,$$

и положим  $D_0 t = \tau$ . Уравнение сводится к

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Z}{\partial x} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 \frac{1}{x^2} Z, \quad (11.25)$$

общее решение которого можно представить в виде

$$Z = \int_0^\infty e^{-\sigma^2 \tau} I_{7/8}(\sigma x) A(\sigma) d\sigma \quad (11.26)$$

(положительный знак порядка функции Бесселя обеспечивает сходимость при  $L \rightarrow \infty$ ). При  $\tau = 0$  (11.26) должно переходить в начальное условие  $Z_0(x)$ :

$$Z_0(x) = \int_0^{\infty} I_{7/8}(\sigma x) A(\sigma) d\sigma. \quad (11.27)$$

Из теоремы Фурье—Бесселя следует, что

$$A(\sigma) = \int_0^{\infty} I_{7/8}(\sigma x') Z_0(x') x' dx' \quad (11.28)$$

и, далее,

$$Z(x, \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Z_0(x') e^{-\sigma^2 \tau} I_{7/8}(\sigma x) I_{7/8}(\sigma x') x' \sigma d\sigma dx'. \quad (11.29)$$

Интегрируя (11.29) по  $\sigma$ , получаем:

$$Z(x, \tau) = \int_0^{\infty} Z_0(x') g(x, x', \tau) dx', \quad (11.30)$$

где

$$g(x, x', \tau) = \frac{x'}{2\tau} \exp \left\{ -\frac{x^2 + x'^2}{4\tau} \right\} I_{7/8} \left( \frac{xx'}{2\tau} \right) \quad (11.31)$$

(см. [130] 6.633.2);  $I_{7/8}$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

Учитывая, что

$$x = \frac{1}{4L^4}, \quad x' = \frac{1}{4L'^4}, \quad \Theta = (2)^{-7/4} L^{-11/2} Z \quad \text{и} \quad Z_0 = \Theta_0 2^{7/4} L'^{11/2},$$

получаем:

$$\Theta = \int_0^{\infty} \Theta(L') G(L, L', \tau) dL', \quad (11.32)$$

где функция Грина есть

$$G(L, L', \tau) = \frac{L^{-11/2} L'^{-7/2}}{2^{13/8} \tau} \exp \left\{ -\frac{1}{64\tau} \left( \frac{1}{L^8} + \frac{1}{L'^8} \right) \right\} I_{7/8} \left( \frac{1}{32\tau L^4 L'^4} \right). \quad (11.33)$$

Заменяя в (11.33)  $\tau$  на  $\tau - \tau'$ , можно построить решение задачи с источником  $Q(L', \tau')$ :

$$\Theta = \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} Q(L', \tau') G(L, L', \tau - \tau') dL' d\tau'. \quad (11.34)$$

Плотность источников  $Q$  определяется аналогично  $\Theta$ : величина  $dQ = Q dL dJ$  дает число частиц с инвариантом  $J$  в интервале  $J, J + dJ$ , рождающихся в единицу времени между оболочкой с параметрами  $L$  и  $L + dL$ .



Рассмотрим задачу с  $\delta$ -образным начальным условием:  $\Theta_0 \propto \delta(L-L_0)$ . Из (11.32) и (11.33) получаем:

$$\Theta(L, \tau) = \frac{CL_0^{-7/2}}{2^{13/8}} L^{-11/2} \exp \left\{ -\frac{1}{64\tau} \left( \frac{1}{L^8} + \frac{1}{L_0^2} \right) \right\} I_{7/8} \left( \frac{1}{32\tau L^4 L_0^4} \right). \quad (11.35)$$

При  $L^4 \ll L_0^4$  и  $\tau \gtrsim \frac{1}{32L_0^8}$  аргумент функции Бесселя мал, так что  $I_{7/8}(\xi) \approx \alpha \xi^{7/8}$  ( $\alpha$  — константа, не зависящая от  $L$  и  $\tau$ ). Поэтому

$$\Theta \approx C^* \tau^{-15/8} L^{-9} \exp \left\{ -\frac{1}{64\tau L^8} \right\}, \quad (11.36)$$

где  $C^*$  зависит только от  $J$ .

Такой же вид имеет асимптотическое решение при  $\tau \rightarrow \infty$  задачи с произвольным начальным условием, локализованным в области  $L \geq L_0$ .

Перейдем теперь к интенсивности частиц с импульсом  $> P$ . Будем считать, для простоты, что  $C^*(J) \propto J^{-n}$ , и рассмотрим релятивистский участок спектра ( $v = c$ ). В этом случае интенсивность в плоскости экватора  $I_0(> P)$  пропорциональна

величине  $L^{-2} \int_{PL^{3/2}}^{\infty} \Theta dJ$ , или

$$I_0(> P) = S_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{-(n-1)} \tau^{-15/8} L^{-\gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{64\tau L^8} \right\}, \quad (11.37)$$

где  $S_0$  и  $P_0$  — постоянные величины и

$$\gamma = \frac{3}{2}(n-1) + 11 = \frac{3n+19}{2}. \quad (11.38)$$

Решение (11.37) описывает одиночную диффузионную волну. Дифференцируя (11.37) по  $L$  и приравнявая нулю первую и вторую производные, находим координаты максимума  $L_m$  и переднего и заднего фронтов волны  $L_{f,1,2}$ :

$$-\gamma L_m^{-(\gamma+1)} + \frac{1}{8\tau} L_m^{-(\gamma+9)} = 0, \quad (11.39)$$

$$\gamma(\gamma+1) L_{f,1,2}^{-(\gamma+2)} - \frac{2\gamma+9}{8\tau} L_{f,1,2}^{-(\gamma+10)} + \frac{1}{64\tau^2} L_{f,1,2}^{-(\gamma+18)} = 0 \quad (11.40)$$

и

$$L_m = \left( \frac{1}{8\gamma\tau} \right)^{1/8}, \quad (11.41)$$

$$L_{f,1} = \left( \frac{1}{\alpha_1\tau} \right)^{1/8}, \quad (11.42)$$

$$L_{f,2} = \left( \frac{1}{\alpha_2\tau} \right)^{1/8}, \quad (11.43)$$

где

$$\alpha_1 = 4(2\gamma + 9 + \sqrt{32\gamma + 81}), \quad (11.44)$$

$$\alpha_2 = 4(2\gamma + 9 - \sqrt{32\gamma + 81}). \quad (11.45)$$

И в данном случае зависимость параметров  $L_m$ ,  $L_{f_1}$  и  $L_{f_2}$  от спектра является очень слабой. Например, при  $n = 2$  величина  $L_m$  (при данном  $\xi$ ) лишь на 7 % меньше, чем при  $n = 8$ , хотя различие в спектре колоссально.

Как будет показано в следующей главе, волны данного типа неоднократно наблюдались в релятивистской области спектра электронов внешней зоны. Величина  $n$  в этом участке спектра, по-видимому, близка к 2–3 и, следовательно,  $\gamma \approx 14$ , а  $\alpha_1 \approx 240$  и  $L_{f_1} \approx \left(\frac{1}{240D_0t}\right)^{1/8}$ .

Таким образом, диффузионная волна, обусловленная импульсной инжекцией частиц на больших  $L$ , распространяется несколько быстрее, чем в случае скачкообразного изменения граничного условия ( $L_f \approx \left(\frac{1}{120D_0t}\right)^{1/8}$ , см. (11.22)). Дело в том, что при импульсной инжекции происходит размытие заднего фронта волны, что приводит к дополнительному смещению максимума и переднего фронта в область малых  $L$ .

Из (11.42) легко получить, что при  $n \sim 3-5$

$$\dot{L}_{f_1} \approx 30D_0L^9. \quad (11.46)$$

Подставляя (11.41) в (11.37), получим, что интенсивность в максимуме изменяется как  $\tau^{-\frac{7-15}{8}}$  и, следовательно, при  $n > 11/3$  — монотонно растет. Это связано с бетатронным ускорением частиц, идущих к Земле. В то же время полное количество частиц, определяемое интегралом

$$\int_0^\infty \Theta dL \propto \int_0^\infty \tau^{-15/8} d(L^{-8}) \cdot e^{-1/(64\tau)L^{-8}},$$

убывает как  $\tau^{-7/8}$ .

Рассмотренные примеры показывают, что в областях, где отсутствуют источники частиц, можно ввести характерное время переноса  $\tau_D(L) \approx 0,01(D_0L^8)^{-1}$ . Это время соответствует распространению возмущений на оболочку с параметром  $L$  и является основной характеристикой переноса.

Рассмотрим теперь стационарную задачу с источниками. Поскольку такая задача с современной точки зрения представляет наибольший интерес для динамики протонов нейтронного распада, мы ограничимся специальным видом плотности источников  $Q = Q_0L^{-\mu}J^{-\nu}$ . Такая зависимость имеет место в случае степенного энергетического спектра и степенной зависимости полного числа рождающихся в единице объема частиц от  $L$ . Согласно расчетам [131] протоны от распада нейтронов альbedo космических лучей удовлетворяют этим условиям.

Уравнение переноса имеет вид

$$D_0 \frac{\partial}{\partial L} L^{10} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial L} + \frac{2}{L} \Theta \right) = -Q_0 L^{-\mu} J^{-\nu}. \quad (11.47)$$

Очевидно, что при достаточно больших  $L$ , на которых время переноса много меньше времени кулоновских и других, не связанных с переносом, потерь, уравнение (11.47) является точным и дает, таким образом, асимптотику распределения на больших  $L$ . Влияние потерь при малых  $L$  можно качественно учесть с помощью граничного условия, потребовав обращения  $\Theta$  в нуль при некотором  $L_i$ . Конечность размеров магнитосферы учтем с помощью аналогичного условия при некотором  $L_e > L_i$ . Следует иметь в виду, что в реальных условиях параметры  $L_e$  и  $L_i$  могут зависеть от энергии частиц. Так,  $L_i$  будет тем меньше, чем выше энергия, поскольку с ростом энергии растет время жизни. Однако в случае протонов с энергиями в несколько десятков МэВ время ионизационных потерь сравнивается с временем переноса лишь на границе ионосферы ( $L \approx 1,3$ ), и поэтому в качестве  $L_i$  можно для всех энергий такого порядка величины принять  $L_i = 1,3$ , так как при дальнейшем уменьшении  $L$  время ионизационных потерь быстро убывает вследствие резкого возрастания плотности холодных частиц.

Параметр  $L_e$  определяется условием удержания частицы с данной энергией и малой продольной скоростью в магнитосфере. В грубом приближении это условие сводится к равенству порядков величины ларморовского радиуса

$$\frac{mc^2 P}{eH} = \frac{mc^2 P}{eH_e} L^3$$

и масштаба неоднородности поля  $aL$ :

$$L_e(P) \approx \left( \frac{eH_e a^3}{3mc^2 P} \right)^{1/2} \quad (11.48)$$

(напомним, что в данной работе  $P$  измеряется в единицах  $mc$ , где  $m$  — масса покоя частицы).

Если положить  $P = JL^{-3/2}$ , то легко получить аналогичную оценку  $L_e(J)$ :

$$L_e(J) \approx \left( \frac{eH_e a}{3mc^2 J} \right)^2. \quad (11.49)$$

Однако даже для протонов с энергиями  $\sim 50$ – $100$  МэВ ( $P \approx 1/3$ ) соответствующие значения  $L_e$  очень велики ( $\sim 6$ – $10$ ). Поэтому в качестве  $L_e$  можно принять эффективное значение на границе области захваченной радиации ( $L_e \approx 7$ ). Как будет видно из дальнейшего, при жестком спектре источников величина  $L_e$  не играет особой роли. Общее решение (11.47) имеет вид

$$\Theta = C_1(J)L^{-2} + C_2(J)L^{-9} - \frac{1}{(\mu+6)(\mu-1)} \frac{Q_0}{D_0} J^{-\nu} L^{-(\mu+8)}. \quad (11.50)$$

Поскольку граничные значения  $L = L_e$  и  $L_i$  предполагаются одинаковыми для всех  $J$ , зависимость  $C_1$  и  $C_2$  от  $J$  должна иметь вид  $J^{-\nu}$ . Определяя коэффициенты из граничных условий, получаем:

$$\Theta = \frac{Q_0}{D_0} \frac{1}{(\mu+6)(\mu-1)} J^{-\nu} \times \\ \times \left\{ \frac{[L_e^7 L_i^{-(\mu-1)} - L_i^7 L_e^{-(\mu-1)}] L^{-9} - [L_i^{-(\mu-1)} - L_e^{-(\mu-1)}] L^{-2}}{L_e^7 - L_i^7} - L^{-(\mu+8)} \right\}. \quad (11.51)$$

Интегральный спектр частиц в плоскости экватора получаем из (11.51) по формуле (4.16). Считая скорости нерелятивистскими ( $v = cP = cJL^{-3/2}$ ) и полагая  $\hat{\alpha} = 1,5$ , имеем ( $\nu > 2$ ):

$$I_0(>P) = \frac{1,5Q_0c}{2\pi D_0(\mu+6)(\mu-1)W_0(\nu-2)} P^{-(\nu-2)} L^{-(3\nu-1)/2} \times \\ \times \left\{ \frac{[L_e^7 L_i^{-(\mu-1)} - L_i^7 L_e^{-(\mu-1)}] L^{-9} - [L_i^{-(\mu-1)} - L_e^{-(\mu-1)}] L^{-2}}{L_e^7 - L_i^7} - L^{-(\mu+8)} \right\}. \quad (11.52)$$

Параметры  $\mu$  и  $\nu$  связаны с показателем степени в энергетическом спектре источников. По определению  $Q$  имеем:

$$dN = QL^{-\mu} J^{-\nu} dL dJ, \quad (11.53)$$

где  $dN$  — число частиц, рождающихся в 1 секунду в слое  $(L, L+dL)$  с  $J$  в интервале  $(J, J+dJ)$ . Перейдем теперь к числу частиц, рождающихся в объеме  $dW$  и в энергетическом интервале  $d\epsilon$ . Объем слоя  $(L, L+dL)$  есть  $W_0 L^2 dL$ . Полагая в (11.53)  $J = \sqrt{2\epsilon} L^{3/2}$  (кинетическая энергия измеряется в единицах  $Mc^2$ ), получаем, что

$$dN = W_0 L^2 q(L, \epsilon) dL d\epsilon = Q_0 L^{-\mu} (2\epsilon)^{-\nu/2} L^{-3\nu/2} \sqrt{2} L^{3/2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon dL$$

и

$$q = \frac{Q_0}{W_0} 2^{-(\nu+1)/2} L^{-\mu-(3\nu+1)/2} \epsilon^{-(\nu+1)/2}. \quad (11.54)$$

Положим

$$q = q_0 L^{-\mu'} \epsilon^{-\nu'}. \quad (11.55)$$

Плотность источников частиц обычно представляют в виде (11.55). Из сравнения (11.54) и (11.55) следует, что

$$Q_0 = q_0 W_0 2^{(\nu-1)/2}; \quad \nu = 2\nu' - 1; \quad \mu = \mu' - 3\nu' + 1. \quad (11.56)$$

Из (11.52) видно, что если  $\nu > 2$ , то численный множитель положителен при  $\mu > 1$  и  $\mu < -6$ , а при  $-6 < \mu < 1$  он отрицателен. Случаю  $\mu > 1$  соответствует  $\mu' > 3\nu'$ . Учитывая, что  $L_e \gg L_i$ , получаем, что вдали от границ интенсивность зависит от  $L$  как  $L^{-(3\nu+1)/2-9} = L^{-(3\nu'+8)}$ . Физический смысл этого решения легко понять из рассмотрения предельного случая  $\mu' \gg 3\nu'$ . При этом плотность источников очень быстро убывает с ростом  $L$ . Очевидно, что интенсивность частиц с данным  $P$  на данном  $L$  формируется за счет трех процессов: рождения частиц с данным  $P$  на данном  $L$ , диффузии частиц с большими начальными  $P$  из области меньших  $L$  и диффузии частиц с меньшими исходными  $P$  с более удаленных оболочек. При  $\mu' > 3\nu'$  основную роль играет второй процесс.

При  $\mu < -6$  (т. е. при  $\mu' < 3\nu' - 7$ ) интенсивность вдали от границ убывает как  $L^{-(3\nu+5)/2} = L^{-3\nu'+1}$ . В этом случае интенсивность на данной оболочке определяется в основном диффузией из более удаленных областей.

Наконец, промежуточный случай  $3\nu' - 7 < \mu' < 3\nu'$  приводит к асимптотическому закону спада интенсивности

$$I_0(>P) = \frac{1,5Q_0cP^{-(2\nu'+3)}}{2\pi D_0 W_0 (2\nu' - 3)(\mu' + 7 - 3\nu')(3\nu - \mu')} \cdot L^{-(\mu'+8)} \quad (11.57)$$

В этом случае появление протонов с данной энергией обусловлено в основном распадом нейтронов той же энергии на данной оболочке, а диффузия с больших и меньших  $L$  дает малый вклад в интенсивность. В указанных пределах изменения  $\mu'$  закон спада не зависит от спектра. Физический смысл (11.57) тривиален: интенсивность пропорциональна плотности источников  $q \propto L^{-\mu'}$  и характерному времени переноса, которое зависит от  $L$  как  $L^{-8}$ . В задаче о распаде нейтронов  $\mu' \approx 2-3$ , а  $\nu' \approx 2,5$  [131]. При этом  $3\nu' - 7 = 0,5 < \mu'$ ,  $3\nu' = 7,5 > \mu'$  и, следовательно, решение имеет вид (11.57). Интенсивность убывает как  $L^{-10}-L^{-11}$ . Роль нейтронного механизма в формировании радиационных поясов будет рассмотрена также в § 13 (протоны) и § 14 (электроны).

В данном параграфе были рассмотрены основные решения уравнения переноса в областях пространства, где можно пренебречь потерями частиц. Рассмотрим теперь задачи с учетом потерь.

## § 12. Перенос частиц с границы магнитосферы с учетом ионизационных потерь

Помимо переноса и сопровождающих его бетатронных эффектов, в формировании радиационных поясов играют роль утечки частиц иной природы. Причиной утечек могут быть кулоновские столкновения, приводящие к замедлению частиц до тепловых энергий, а в случае электронов — и к рассеянию в плотные слои атмосферы. Другой возможный механизм утечек — рассеяние на различных типах гидромагнитных и плазменных волн.

Рассмотрим влияние ионизационных потерь на формирование протонного пояса. Характерное время торможения протона за счет кулоновских соударений пропорционально кубу импульса. Поэтому при сносе в глубь магнитосферы протона с данным  $J = PL^{3/2}$  время жизни при постоянной плотности холодной плазмы увеличивается как  $L^{-9/2}$ . Время переноса растет значительно быстрее — как  $L^{-8}$ . Следовательно, начиная с некоторого  $L$ , где время переноса сравнивается со временем торможения, рост интенсивности должен приостановиться, а при меньших  $L$  интенсивность начнет убывать.

Допустим, что нам известен спектр протонов на границе области, в пределах которой асимметрия поля мала ( $L \approx 5-6$ ). Используя решение стационарной задачи без источников и потерь (см. (11.2)), мы можем сформулировать следующее предельное условие:

$$\Theta_{L \rightarrow \infty} = F(J)L^{-2}, \quad (12.1)$$

где вид функции  $F$  определяется данным спектром.

Стационарное распределение должно удовлетворять уравнению

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)_i = D_0 \frac{\partial}{\partial L} L^{10} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial L} + \frac{2}{L} \Theta \right), \quad (12.2)$$

где  $(\partial \Theta / \partial t)_i$  — скорость изменения  $\Theta$  за счет ионизационных потерь (рассеянием быстрых протонов при столкновениях с холодными частицами можно пренебречь). Очевидно, что

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)_i = \frac{\partial}{\partial J} J \Theta. \quad (12.3)$$

Производная  $\dot{J}$  вычисляется при постоянном  $L$  и, следовательно, есть  $\dot{P}L^{3/2}$ . В нерелятивистском случае величина

$$\dot{P} = \frac{\dot{v}}{c} = -\frac{1}{\tau_c} \frac{1}{P^2},$$

где

$$\tau_c = \frac{mMc^3}{4\pi e^4 N \ln \Lambda}, \quad (12.4)$$

$e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $M$  — масса протона,  $c$  — скорость света,  $N$  — плотность холодных электронов в единицах  $\text{см}^{-3}$ ,  $\ln \Lambda$  — логарифм дебаевской экранировки. В условиях магнитосферы ( $N \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 1 \text{ эВ}$ )  $\ln \Lambda \approx 20$ . Таким образом,

$$\dot{J} = \dot{P}L^{3/2} = -\frac{L^{9/2}}{\tau_c} \frac{1}{J^2},$$

и (12.2) принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial L} L^{10} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial L} + \frac{2}{L} \Theta \right) + \frac{L^{9/2}}{D_0 \tau_c} \frac{\partial}{\partial J} \frac{\Theta}{J^2} = 0. \quad (12.5)$$

Легко видеть, что (12.5) имеет частные решения вида

$$\Theta_\sigma = \psi_\sigma(L) J^2 e^{-\sigma J^3}, \quad (12.6)$$

из которых можно построить общее решение задачи с произвольным спектром при больших  $L$ :

$$\Theta(J, L) = J^2 \int_0^\infty \psi_\sigma(L) e^{-\sigma J^3} f(\sigma) d\sigma. \quad (12.7)$$

Функция  $\psi_\sigma(L)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dL} L^{10} \left( \frac{d\psi_\sigma}{dL} + \frac{2}{L} \psi_\sigma \right) - \frac{3\sigma L^{9/2}}{D_0 \tau_c} \psi_\sigma = 0. \quad (12.8)$$

Если плотность холодных электронов и, следовательно, время  $\tau_c$ , зависят от  $L$  по степенному закону, то (12.8) сводится к уравнению Бесселя. В дальнейшем будет рассмотрен случай  $N = \text{const}$  [11, 12]. В работе [15] исследована модель  $N \sim L^{-4}$ , а также учтена перезарядка. Сопоставление и анализ результатов [11, 12, 15] см. в § 13.

Подстановками  $\xi = L^{-7/4}$ ,  $\psi_\sigma = \xi^{22/7} \varphi$  (12.8) приводится к уравнению Бесселя второго порядка для мнимого аргумента. Решение, ограниченное при  $L \rightarrow 0$  (соответствующее переносу с границы), является функцией Макдональда:

$$\psi_\sigma = L^{-11/2} K_2 \left( L^{-7/4} \sqrt{\frac{48}{49} \frac{\sigma}{D_0 \tau_c}} \right). \quad (12.9)$$

Таким образом,

$$\Theta_\sigma = J^2 e^{-\sigma J^3} L^{-11/2} K_2 \left( L^{-7/4} \sqrt{\frac{48}{49} \frac{\sigma}{D_0 \tau_c}} \right). \quad (12.10)$$

При  $x \rightarrow 0$  функция  $K_2(x) \approx 2/x^2$  и

$$\Theta_{\sigma L \rightarrow \infty} = \frac{49}{24} \frac{D_0 \tau_c}{\sigma} J^2 e^{-\sigma J^3} L^{-2}. \quad (12.11)$$

Из (12.11) и (12.1) можно найти функцию  $f(\sigma)$  в (12.7). Имеем:

$$\frac{49}{24} D_0 \tau_c J^2 \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} f(\sigma) e^{-\sigma J^3} = F(J),$$

и, следовательно, функция  $\frac{24}{49} \frac{1}{D_0 \tau_c} \frac{F(J)}{J^2}$  является преобразованием Лапласа  $\frac{1}{\sigma} f(\sigma)$  по переменной  $J^3$ . Функция  $f(\sigma)$  определяется по формуле обращения или по таблицам преобразований Лапласа. Пусть, например,  $F(J) = cJ^{-\nu}$ . Учитывая, что

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-xy} dx = \frac{1}{y^{\mu+1}} \Gamma(\mu+1),$$

легко получить, что

$$f(\sigma) = \frac{24}{49} \frac{c}{D_0 \tau_c \Gamma\left(\frac{\nu+2}{3}\right)} \sigma^{(\nu+2)/3}.$$

Отсюда

$$\Theta(J, L) = \frac{24}{49} \frac{c J^2 L^{-11/2}}{D_0 \tau_c \Gamma\left(\frac{\nu+2}{3}\right)} \cdot \int_0^\infty \sigma^{(\nu+2)/3} e^{-\sigma J^3} K_2\left(L^{-7/4} \sqrt{\frac{48}{49} \frac{\sigma}{D_0 \tau_c}}\right) d\sigma. \quad (12.12)$$

Интеграл в (12.12) можно выразить через функцию Уиттекера ([130], 6.643.3):

$$\begin{aligned} \Theta(L, J) &= \frac{7}{4} \Gamma\left(\frac{\nu+8}{3}\right) \frac{c}{\sqrt{3} D_0 \tau_c} L^{-15/4} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{6}{49} \frac{1}{D_0 \tau_c L^{7/2} J^3}\right\} W_{-\frac{2\nu+7}{6}, 1}\left(\frac{12}{49} \frac{1}{D_0 \tau_c L^{7/2} J^3}\right). \end{aligned} \quad (12.13)$$

При больших  $L$ , когда аргумент функции Уиттекера стремится к нулю, функция  $W_{k,m}(x)$  расходится как  $x^{-m+1/2}$  (при целом или полуцелом  $m$  возможна также логарифмическая расходимость, однако член вида  $x^{-m+1/2}$  растет быстрее) ([132], т. 2, гл. 16). Отсюда видно, что при  $L \rightarrow \infty$  решение принимает асимптотическую форму (11.2):  $\Theta \propto L^{-9} J^{-\nu}$ .

При  $L \rightarrow 0$  (большие значения аргумента) можно воспользоваться асимптотическим разложением  $W$  [132]. Функция  $\Theta$  при этом имеет вид

$$\Theta \propto J^2 L^{(7\nu+2)/6}. \quad (12.14)$$

При этом величина

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)_c = \frac{\partial}{\partial J} J \Theta = 0,$$

так как  $\dot{J} \propto J^{-2}$ . Результат (12.14) показывает, что при больших значениях аргумента частицы с данным  $J$  возникают в основном за счет торможения более энергичных частиц.

Численное исследование, основанное на интегральном представлении  $W$ , показывает, что положение максимума интенсивности частиц с импульсом больше  $P$  определяется переменной

$$x_m = \frac{6}{49} \frac{1}{D_0 \tau_c L^{7/2} J^3(L, P)}, \quad (12.15)$$

причем величина  $x_m$  очень слабо зависит от спектра. Так, при  $\nu = 3$   $x_m \approx 4$ , а при  $\nu = 10$   $x_m \approx 6$ . Таким образом, с возможной ошибкой в несколько процентов можно утверждать (учитывая, что  $J = PL^{3/2}$ ), что

$$L_m(P) = \left( \frac{1}{40 D_0 \tau_c P^3} \right)^{1/8}. \quad (12.16)$$

Поскольку время переноса на оболочку  $L$  есть  $\tau_D(L) = \frac{1}{120 D_0 L^8}$ , а время полного торможения частицы с начальным импульсом  $P$  равно  $\tau_P = \frac{1}{3} \tau_c P^3$ , соотношение (12.16) означает, что в максимуме имеет место приближенное равенство

$$\tau_D(L_m) \approx \tau_P. \quad (12.17)$$

Соотношение (12.17) является более общим, чем (12.16), и применимо к случаю произвольной зависимости  $\tau_c$  (т. е. плотности холодной атмосферы) от  $L$ . Этот вывод будет обоснован в следующем параграфе при сопоставлении расчетов с разными моделями атмосферы [11, 12, 15].

На этом мы заканчиваем анализ основных решений уравнения переноса и переходим к интерпретации свойств радиационных поясов.



## Глава IV

### **Роль переноса в формировании радиационных поясов Земли**

#### **§ 13. Протонный пояс**

Судя по экспериментальным данным, в магнитосфере имеется три источника быстрых протонов: захват вблизи границы поясов протонов солнечного ветра с энергиями 1–10 кэВ, захват более жестких протонов (с энергиями  $\sim 100$  кэВ) во время магнитных бурь и распад нейтронов альбеда космических лучей. Под действием двух первых источников на границе формируется определенный спектр протонов, а в более глубоких областях магнитосферы интенсивность обусловлена переносом с границы. Нейтронный источник действует во всей магнитосфере.

Солнечный ветер можно считать стационарным источником протонов, так как интенсивность ветра большую часть времени соответствует среднему уровню.

После прохождения через фронт ударной волны протоны нагреваются до температуры порядка нескольких кэВ. При переносе из области между фронтом ударной волны и границей магнитосферы, где напряженность магнитного поля  $\sim 10\gamma$ , в область  $L \sim 6$  (поле  $\sim 150\gamma$ ) протоны могут ускориться до энергий в несколько десятков кэВ. При дальнейшем уменьшении  $L$  справедливо дипольное приближение, и средняя энергия частиц вблизи плоскости экватора должна расти как  $L^{-3}$ .

Используя соотношение (12.16), можно оценить положение максимумов интенсивности протонов различных энергий (в предположении постоянной плотности холодной атмосферы). Положение максимума  $L_m$  связано с энергией простым соотношением  $L_m \propto \epsilon^{-3/16}$ .

Более детальная информация о структуре протонной зоны может быть получена, если известен спектр протонов на удаленных оболочках. При измерениях на спутнике «Эксплорер-ХII» был определен спектр протонов с энергиями от 0,1 до 1,7 МэВ на оболочках  $L = 5$  и  $L = 6,1$  вблизи экваториальной плоскости [99]. Полученный спектр имел экспоненциальную форму ( $I_0(> E) = Ae^{-E/E_0}$ ); причем средняя энергия  $E_0$  при  $L = 5$  и  $L = 6,1$  составляла соответственно 120 кэВ и 64 кэВ. Более детальный анализ данных, полученных в указанном эксперименте, позволил определить спектры протонов этих энергий в широкой области пространства [52]. Оказалось, что асимптотика спектра при больших энергиях всюду имеет экспоненциальный вид, а средняя энергия  $E_0$  при различных  $L$  и геомагнитных широтах соответствует сохранению магнитного момента и продольного действия [13]. В частности, вблизи плоскости экватора  $E_0 \propto L^{-3}$ .

В работах [11, 12] был проведен расчет структуры протонного пояса на основе спектра [99] при  $L = 5$ :

$$\frac{dI_0}{dE} = Ae^{-E/E_0}, \quad (13.1)$$

где  $E_0 = 120$  кэВ,  $A = 10^5 (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{стер} \cdot \text{кэВ})^{-1}$  при  $100 \text{ кэВ} \leq E \leq 1 \text{ МэВ}$ . Протоны с энергией  $\sim 1$  МэВ с  $L = 5$  при сносе на оболочки с  $L \approx 1,5$  (в центр внутренней зоны) ускоряются до энергий  $\sim 40$  МэВ. Поэтому представляло интерес исследовать распределение протонов вплоть до таких энергий. В связи с этим отметим, что потоки протонов с энергиями  $\sim 10$  МэВ во внутренней зоне намного превышают возможности нейтронного механизма, и необходимы поиски новых источников таких протонов.

При расчетах коэффициент  $D_0$  был определен по положению максимума протонов с энергиями свыше 500 кэВ. Плотность холодной атмосферы считалась постоянной. Экспериментальные данные, большая часть которых была опубликована после проведения расчетов [11–13], практически полностью совпали с теоретическими кривыми.

В работе [15] были проведены аналогичные расчеты для протонов с энергиями от 100 кэВ до 1,7 МэВ. Коэффициент определялся на основе теоретической модели [31], дающей сильно заниженную степень асимметрии возмущенного поля. Плотность холодных электронов в [15] на больших расстояниях принималась равной  $50 \text{ см}^{-3}$ , а при  $L \sim 1,5$ –3 убывала (от  $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$  при  $L \sim 1,5$ ) как  $L^{-4}$ . Помимо ионизационных потерь, учитывалась перезарядка, роль которой при энергиях протонов в 100–200 кэВ может быть сравнимой с потерями на ионизацию. На больших расстояниях, где потери незначительны, результаты [15] совпадают с [11] и с экспериментом. Однако положения максимумов существенно отличаются от наблюдаемых.

Результаты [15] представляют тем не менее большой методический интерес, так как позволяют оценить зависимость структуры протонного пояса от модели атмосферы.

Рассмотрим результаты [11, 12]. Приводимые ниже кривые получены несколько более точным численным методом, чем в [11, 12]. При расчетах спектр (13.1) аппроксимировался суммой четырех выражений вида

$$E \cdot \exp \left\{ \left( -\frac{E}{E_n} \right)^{3/2} \right\} \quad \text{с} \quad E_n = 100, 200, 400, 800 \text{ кэВ}.$$

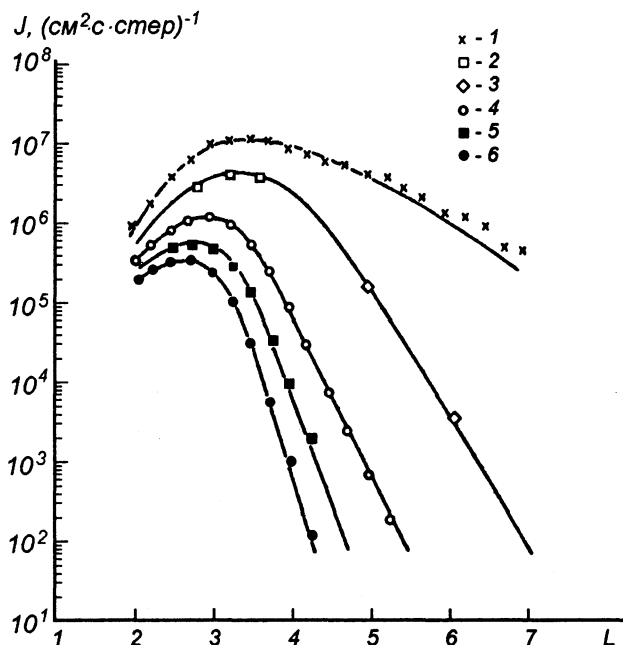
Соответствующим выбором численных коэффициентов можно аппроксимировать, таким образом, (13.1) с ошибкой, не превышающей в интервале энергий от 100 кэВ до 1 МэВ нескольких процентов. При этом спектр по  $J$  имеет вид суммы выражений  $J^2 \exp \{ -(J/J_n)^3 \}$ , для которых имеется сравнительно простое решение (12.10). Однако эти результаты почти полностью совпадают с полученными в [11, 12].

Для уточнения величины  $D_0$  воспользуемся известным по ряду работ положением максимума протонов с  $E > 500$  кэВ:  $L_m(500 \text{ кэВ}) = 3,2$ . Подставляя в (12.16) численные значения, получаем:

$$D_0 = 4 \cdot 10^{-17} N \quad (13.2)$$

( $D_0$  — в  $\text{с}^{-1}$ ,  $N$  — в  $\text{см}^{-3}$ ). При  $N = 10^3 \text{ см}^{-3}$   $D_0 = 4 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ . Этот результат, как уже отмечалось в § 10, близок к оценке по магнитным данным ( $2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ ).

На рис. 26 приведены теоретические и экспериментальные данные о структуре протонной зоны в интервале энергий от 100 кэВ до 2 МэВ. Сплошные кривые получены расчетным путем, а различными значками нанесены данные измерений.



**Рис. 26.** Теоретические и экспериментальные данные о потоках протонов с энергиями от 100 кэВ до 2 МэВ в плоскости экватора. 1 —  $j(> 100 \text{ кэВ})$  [99]; 2–3 —  $j(> 500 \text{ кэВ})$  [100]; 3 —  $j(> 500 \text{ кэВ})$  [99]; 4 —  $j(> 1 \text{ МэВ})$  [101]; 5 —  $j(> 1,7 \text{ МэВ})$  [15]; 6 —  $j(> 2 \text{ МэВ})$  [101]

Экспериментальные данные получены с применением разнородной аппаратуры, а условия измерения различались ориентационными эффектами. Поэтому абсолютные величины, приводимые различными авторами, могут отличаться на множитель от 1 до 2. Однако относительные величины должны иметь одинаковую зависимость от  $L$  вследствие высокой стабильности протонной зоны. В большинстве экспериментов, результаты которых приведены на рисунке, период накопления данных был больше или порядка периодов вращения спутника вокруг его геометрических осей. Поэтому показания направленных датчиков в значительной степени усреднялись, и фактически измерялась средняя интенсивность со всех направлений. Исключение составляет лишь работа [99], где имелись данные об ориентации и приводились значения интенсивности по перпендикуляру к силовой линии и угловое распределение. Средняя интенсивность, соответствующая этим данным, равна половине интенсивности по перпендикуляру к силовой линии.

Для сравнения относительного хода интенсивности экспериментальные данные домножались на нормировочные множители, выбранные так, чтобы в максимуме экспериментально измеренные интенсивности были равны теоретическим. Для кривых  $E > 100 \text{ кэВ}$ ,  $E > 500 \text{ кэВ}$  и  $E > 1,7 \text{ МэВ}$  [99] и  $E > 1 \text{ МэВ}$  и  $2 \text{ МэВ}$  [101] множители близки к единице, а для  $E > 500 \text{ кэВ}$  [100] — теоретическое значение примерно в 3 раза выше экспериментального. Следует иметь в виду, что в экспериментах [99] и [100] интенсивность измерялась люминесцентными счетчиками и полупроводниковыми датчиками. Энергетические пороги определялись по величине импульса и были весьма резкими. В [100] регистрация осуществлялась счетчиком

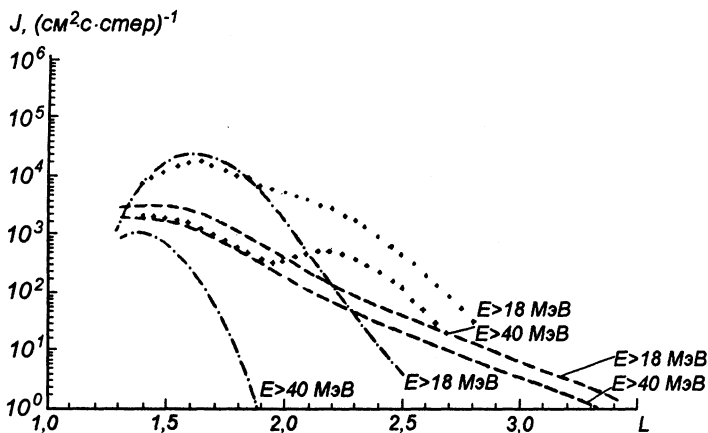


Рис. 27. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных о потоках протонов с энергиями свыше 18 и 40 МэВ

Гейгера и порог определялся толщиной окошка. Эффективность регистрации принималась равной единице. По-видимому, в действительности эффективность была значительно ниже, так как при  $L \sim 3$  средняя энергия протонов порядка 500 кэВ, так что основная масса падающих на счетчик протонов имела энергии вблизи порога. Обычно в таких условиях эффективность счетчика Гейгера составляет несколько десятков процентов.

Таким образом, экспериментальные данные в пределах точности измерений совпадают с результатами теоретических расчетов. Измерения потоков протонов с энергиями свыше 5 и 9 МэВ также подтверждают теорию.

Рассмотрим теперь область больших энергий. На рис. 27. представлены результаты расчета потоков протонов с энергиями свыше 18 и 40 МэВ [11, 12]. Пунктиром нанесены распределения интенсивностей, которые должны установиться за счет распада нейтронов альbedo космических лучей с учетом переноса (см. § 11). Штрихпунктирные кривые соответствуют переносу с границы магнитосферы. Для сравнения нанесены экспериментальные данные [104]. Сопоставление с измерениями на спутниках серии «Электрон» проведено на рис. 28.

Видно, что в районе основного максимума ( $L < 2$ ) измеренные потоки протонов с энергиями в 18 и 30 МэВ близки к расчетным значениям, соответствующим переносу с границы. Лишь при энергиях свыше 40 МэВ начинает преобладать нейтронный распад.

Сопоставление теории с экспериментом позволяет заключить, что основным источником протонов вплоть до энергий 30 МэВ является перенос с границы магнитосферы. Протоны, первоначально имевшие энергии  $\lesssim 100$  кэВ, при переносе в область более сильного поля ускоряются до энергий в десятки МэВ. Тем самым автоматически снимается трудность, с которой столкнулась нейтронная теория при объяснении больших потоков протонов с  $E \sim 10$  МэВ.

Из рис. 27 и 28 видно, что при  $2,5 > L > 2$  ни нейтронный механизм, ни стационарный перенос не согласуются с экспериментом. В этой области пространства имеется дополнительный максимум протонов с энергиями 20–70 МэВ. Спектр

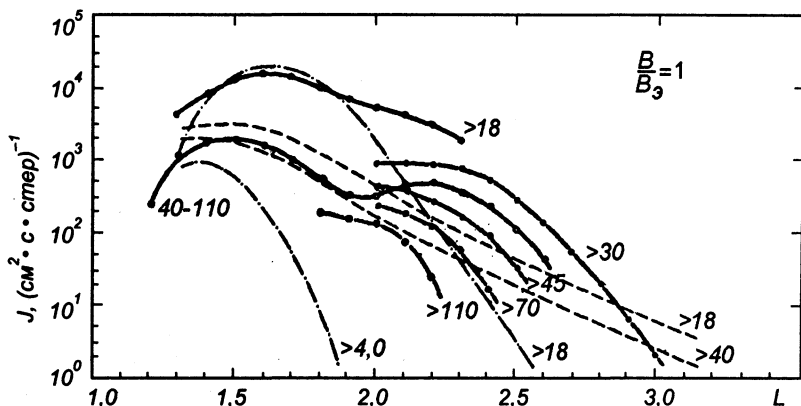


Рис. 28. Сопоставление теоретических результатов с данными измерений жестких протонов на спутниках серии «Электрон»

протонов в этом районе значительно жестче, чем спектр идущих с границы частиц, но мягче, чем спектр протонов нейтронного распада.

Дополнительный максимум характеризуется резким высотным ходом вдоль силовой линии. Так, при энергиях свыше 40 МэВ уже на геомагнитной широте  $25^\circ$  максимум исчезает и интенсивность убывает с  $L$  как  $L^{-10}$ , что характерно для нейтронного механизма (см. § 11).

В [11, 12] было высказано предположение, что дополнительный максимум нестационарен и связан со вспышками интенсивности протонов с энергиями в сотни кэВ во время магнитных бурь. Экспериментальные данные о таких вспышках изложены в конце § 6, и показано, что есть основания считать, что в 1956–1960 гг. количество и мощность таких вспышек были уникально большими. В соответствии с выдвинутой в [11, 12] гипотезой с течением времени можно обнаружить смещение второго максимума к Земле. Скорость такого смещения определить затруднительно, так как период дрейфа протонов с энергиями в десятки МэВ при  $L \approx 2$  порядка одной минуты и численное значение  $D_0$  может отличаться от полученной выше величины. Эксперимент показывает, что и в данном диапазоне дрейфовых периодов скорость переноса имеет почти ту же величину, что и при  $\tau_\phi \sim 10$  мин. В [109] сообщалось, что максимум протонов с  $E > 40$  МэВ сместился с  $L = 2,25$  в конце 1962 г. на  $L = 2,15$  к концу 1964 г., т. е. скорость движения максимума при  $L = 2,2$  составляла  $\approx 0,05$  а/год ( $1,7 \cdot 10^{-9}$  а/с). Согласно (11.41) скорость максимума диффузионной волны ( $\gamma \approx 14$ ) есть  $14D_0L^9$  и при  $D_0 = 5 \cdot 10^{-14}$  с $^{-1}$ ,  $L = 2,2$  величина  $\dot{L}_m \approx 10^{-9}$  а/с. Эксперимент подтверждает, таким образом, приведенную в [11, 12] интерпретацию дополнительного максимума протонов как диффузионной волны. Кроме того, данные [109] позволяют найти скорость переноса в области малых периодов дрейфа, где частотный спектр электрических полей неизвестен.

Теория переноса с учетом ионизационных потерь дает полное количественное объяснение структуры и динамики пояса протонов с энергиями свыше 100 кэВ. Точное совпадение теоретических и экспериментальных результатов позволяет уточнить вопрос о распределении холодной плазмы на больших высотах.

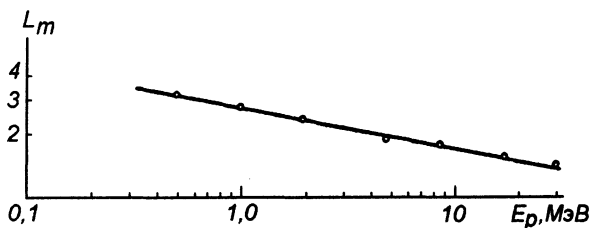


Рис. 29. Зависимость положения максимумов протонов различных энергий от  $E_p$  в плоскости экватора

На рис. 29 приведена теоретическая зависимость положения максимумов протонов различной энергии, вычисленная в предположении постоянной плотности холодной атмосферы ( $L_m \propto E^{-3/16}$ ). Экспериментальные данные, соответствующие энергиям 0,5; 1; 1,7; 2; 5; 9; 10; 18 и 30 МэВ, точно ложатся на теоретическую прямую. Экспериментальные данные [104] приводят к аналогичной зависимости  $L_m$  от  $E$ .

Расстояние между соседними максимумами довольно сильно зависит от модели атмосферы. Так, в [15] максимумы протонов с энергиями 0,5; 1 и 1,7 МэВ удовлетворяют соотношению  $L_m \propto E^{-1/8}$ . Поскольку в модели [15] при  $L \leq 3,5$  плотность атмосферы изменяется как  $L^{-4}$ , время жизни  $\tau_p \propto P^3 L^4$ . Приравнявая  $\tau_p$  по порядку величины  $\tau_D(L_m) \propto L^{-8}$ , получаем, что  $L_m \propto P^{-1/4} \propto E^{-1/8}$ . Различие в законах  $L_m \propto E^{-3/16}$  и  $L_m \propto E^{-1/8}$  достаточно велико, чтобы проявиться в экспериментальных данных о положении максимумов.

Более детальный анализ данных рис. 29 и [104] показывает, что экспериментальные данные о положении максимумов протонов можно совместить с изменением плотности от полутора до трех с половиной земных радиусов не более чем в 2–3 раза.

Что же касается абсолютной величины плотности, то по данным о протонах она может быть определена лишь в комбинации с константой  $D_0$ . В следующем параграфе будут рассмотрены экспериментальные данные, позволяющие независимо определить  $D_0$  с точностью до множителя  $\leq 2$ . Это значение  $D_0$  близко к  $5 \cdot 10^{-14}$ , что приводит к величине  $N \approx 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Данные оценки величины  $N$  и зависимости  $N$  от  $L$  согласуются с большим количеством экспериментальных данных.

Изучение протонного пояса дает, таким образом, ценную информацию о природе физических процессов в магнитосфере Земли и убедительно подтверждает важную роль переноса под действием внезапных импульсов в формировании зон радиации.

Область повышенной интенсивности быстрых протонов формируется, по существу, единым механизмом, и поэтому не имеет смысла разделять внутренний и внешний протонные пояса.

В заключение рассмотрим вопрос о существовании пояса быстрых  $\alpha$ -частиц. Весьма вероятно, что солнечный ветер содержит, помимо протонов, ядра гелия и более тяжелых элементов. Поэтому перенос и ионизационные потери должны формировать также пояса соответствующих ядер. В [12] на основе этих соображений были предсказаны некоторые особенности пояса  $\alpha$ -частиц. Из формулы ионизационных потерь нерелятивистской частицы с зарядом  $Z$  и атомным весом  $A$  легко получить, что при заданной энергии  $E$  время торможения  $\tau_c(E)$  пропорционально  $A^{-1/2} \cdot Z^{-2}$ . В случае гелия ( $A = 4$ ,  $Z = 2$ ) время торможения, следовательно, в 8 раз

меньше, чем для протона той же энергии. Поэтому, согласно (12.16), максимумы  $\alpha$ -частиц с энергией  $E$  будут лежать на расстояниях, в  $(8)^{1/8} \approx 1,3$  раза больших, чем для соответствующих протонов. Обнаружение и исследование пояса  $\alpha$ -частиц позволяют, таким образом, провести независимую проверку предположения о гибели тяжелых частиц в поясах за счет ионизационных потерь.

Сравнение спектров протонов и  $\alpha$ -частиц в магнитосфере представляет также большой интерес с точки зрения теории ускорительного механизма, разогревающего частицы солнечного ветра за ударной волной. Так, если ускорение обусловлено механизмом Ферми, то спектры инжекции протонов и  $\alpha$ -частиц с одинаковыми скоростями подобны. В этом случае [12] были бы полностью подобны и распределения этих частиц в магнитосфере. В частности, в центре внутреннего пояса наблюдались бы интенсивные потоки  $\alpha$ -частиц с энергиями  $\sim 100$  МэВ. При других ускорительных механизмах (например, при ускорении на циклотронном резонансе) закон подобия спектров частиц с различными  $Z$  и  $A$  существенно зависит от формы спектра турбулентных пульсаций с различными масштабами, и может оказаться, что спектр  $\alpha$ -частиц будет значительно мягче.

На Белградской конференции по солнечно-земным связям (август 1966 г.) Ван-Аллен сообщил об обнаружении пояса  $\alpha$ -частиц с энергиями 2–4 МэВ при исследованиях на спутнике «Инджун-III». Высота апогея этого спутника (2500 км) была достаточно велика, чтобы при оценке плотности холодной плазмы пользоваться приэкваториальным значением. Максимум обнаруженного пояса был расположен между  $L = 3$  и  $L = 3,5$  (цитируется по тезисам доклада Ван-Аллена и Франка). Согласно изложенным выше результатам максимум протонов с энергией 2 МэВ лежит на  $L = 2,6$  (примерно в 1,3 раза ближе, чем для  $\alpha$ -частиц). Следовательно, положение пика  $\alpha$ -частиц с энергиями больше 2 МэВ хорошо согласуется с предположением о гибели тяжелых частиц за счет ионизационных потерь. Представляет большой интерес провести детальные измерения потоков  $\alpha$ -частиц различных энергий на больших высотах<sup>1)</sup>.

## § 14. Внешний электронный пояс

Экспериментальные данные (§§ 6–7) показывают, что структура и динамика протонных и электронных поясов существенно различны. В отличие от протонной зоны, электроны с энергиями  $\geq 100$  кэВ образуют два отчетливых пояса, разделенных зазором. Внешний пояс, максимум которого лежит при  $L = 4,5$ – $4,8$ , является весьма нестационарным образованием и испытывает большие вариации, характер которых различен в разных участках спектра.

С другой стороны, поскольку периоды долготного дрейфа электронов внешней зоны имеют тот же порядок величины, что и у протонов, ясно, что перенос должен играть большую роль и в динамике электронного пояса.

Из эксперимента известно, что у границы области захваченной радиации средняя интенсивность электронов с энергиями в десятки кэВ составляет  $\sim 10^7$  частиц  $\cdot$   $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , а средняя энергия  $\sim 25$  кэВ [90]. Если предположить, что, как

<sup>1)</sup> Более поздние измерения альфа-частиц на больших высотах полностью подтвердили предсказания теории Б. А. Тверского. — *Прим. сост.*

и в случае протонов, основным механизмом потерь является ионизационное торможение, то можно показать, что перенос должен привести к формированию мощного пика релятивистских электронов при  $L < 2$ . Учитывая, что поле у границы 50–70γ и 4000–8000γ при  $L \sim 1,5-2$  (т. е. в 100 раз больше), получаем, что средняя энергия в районе максимума возросла бы до 1 МэВ. Интенсивность же, которая с уменьшением  $L$  растет как  $L^{-4}$ , должна была бы достигнуть величины  $\sim 10^9 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

Поскольку перенос, несомненно, имеет место, наблюдаемое в действительности распределение интенсивностей электронов можно объяснить лишь наличием некулоновского механизма потерь, существенно снижающего время жизни частиц. Таким механизмом может быть лишь статистическое взаимодействие с электромагнитными колебаниями, приводящее к диффузии частиц в импульсном пространстве и, в частности, к их рассеянию в плотные слои атмосферы.

При обсуждении экспериментальных данных о спектре высокочастотных электрических и магнитных полей в магнитосфере (§ 3) было показано, что наиболее вероятным механизмом утечек электронов является «магнитное рассеяние», не сопровождающееся сколько-нибудь существенными изменениями энергии частиц. Источником волн, приводящих к рассеянию, могут быть либо различные процессы в нижних слоях атмосферы (грозовые разряды, акустические колебания, мелкомасштабная турбулентность и т. д.), либо неустойчивость самих радиационных поясов. В последнем случае рассеяние будет весьма эффективным, так как неустойчивые колебания автоматически имеют те частоты, при которых взаимодействие с частицами наиболее существенно.

В зависимости от природы источников волн можно по-разному интерпретировать структуру электронных поясов. Если считать, что причиной утечек являются волны, идущие из ионосферы, и, следовательно, время жизни электронов есть некоторая заданная функция  $L$  и энергии  $E$ , то максимум внешнего пояса следует рассматривать как область, в которой характерное время переноса по порядку величины соответствует времени жизни частиц.

В этом случае электронная интенсивность во внутренней зоне уже не может рассматриваться как результат переноса, и необходимо предположить какой-либо иной механизм генерации частиц в данном районе. Можно было бы, правда, допустить, что во внутреннем поясе время жизни резко возрастает, однако данные о распаде искусственных радиационных поясов опровергают такую гипотезу.

Если, с другой стороны, предположить, что утечки электронов обусловлены неустойчивостью поясов, то наблюдаемый профиль интенсивности должен соответствовать границе устойчивости. Исследование устойчивости радиационных поясов (см. гл. V) показывает, что эта точка зрения согласуется с большим числом экспериментальных данных, и есть основания считать, что данный механизм потерь играет, наряду с переносом, основную роль в формировании электронных поясов. Возможный эффект волн от внешних по отношению к поясам источников пока не поддается оценке, так как данные о спектре таких волн практически отсутствуют.

Отметим, что два указанных подхода к интерпретации утечек электронов из поясов не являются взаимоисключающими. Так, может оказаться, что возникновение неустойчивости связано лишь со сравнительно узким участком спектра, содержащим основную массу электронов, а интенсивность в области более высоких энергий недостаточна для раскачки соответствующих им волн (см. § 19). При этом, однако, будут рассеиваться и высокоэнергичные электроны, так как по мере распространения



ния волн вдоль силовых линий от плоскости экватора к Земле изменяются условия резонанса (возрастают длина волны и циклотронная частота, а продольная скорость частицы падает). Время жизни быстрых частиц в этом случае будет определяться интенсивностью электронов более низких энергий.

В § 4 отмечалось, что в районе внешнего электронного пояса можно выделить три группы частиц с существенно различными свойствами: электроны с энергиями в несколько десятков кэВ, несколько сотен кэВ и  $\gtrsim 1$  МэВ.

Динамика электронов первой группы, вообще говоря, может и не укладываться в рамки излагаемой теории, так как соответствующие энергиям  $\sim 10$  кэВ дрейфовые периоды составляют несколько часов. При исследовании переноса таких электронов, возможно, следует учитывать электрические поля, связанные с ионосферными ветрами [57].

Что же касается электронов с энергиями в сотни кэВ и выше, то, хотя в вопросе о природе их утечек имеются некоторые неясные моменты, все же можно утверждать, что причиной их ускорения является перенос под действием внезапных импульсов.

Электроны с энергиями в несколько сотен кэВ можно рассматривать как аналог протонного пояса. Их источником являются электроны с энергиями в десятки кэВ у границы магнитосферы, интенсивность и спектр которых относительно стабильны. На рис. 30 приведено типичное распределение электронов с энергиями от 40 кэВ до  $\sim 1$  МэВ, снятое на спутниках «Электрон-2» и «Эксплорер-XVIII» ( $E_e > 40$  кэВ) [89]. Данный виток проходил через утреннюю часть магнитосферы, где реальное геомагнитное поле близко к дипольному. Анализ данных, полученных при ряде таких пролетов, показывает, что на внешней стороне пояса средняя энергия электронов меняется в соответствии с адиабатическим соотношением (примерно как  $L^{-3}$ ). На ночной стороне, где на больших расстояниях поле убывает значительно быстрее

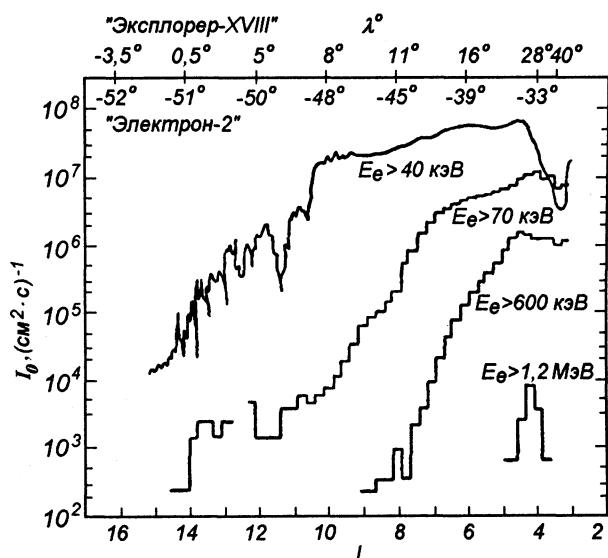


Рис. 30. Электроны во внешней зоне

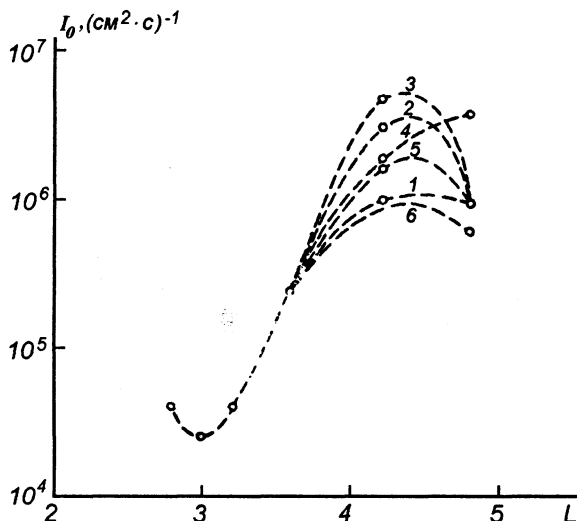


Рис. 31. Динамика пояса электронов с энергиями  $> 200$  кэВ в период умеренной магнитной активности. 1 — 28/I; 2 — 1/II; 3 — 7/II; 4 — 14/II; 5 — 21/II; 6 — 28/II 1963 г.

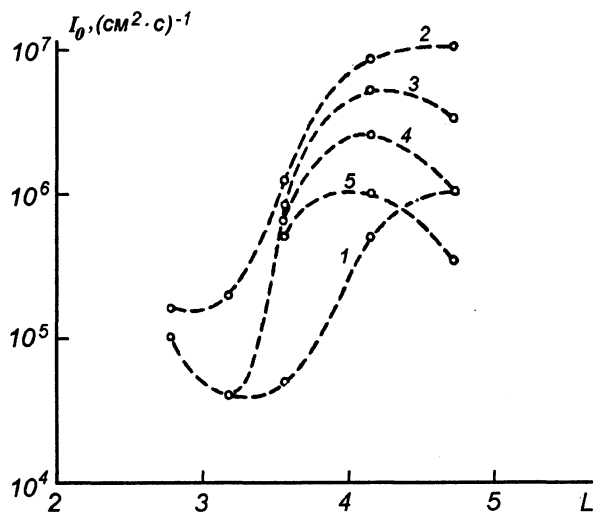
дипольного, средняя энергия растет с уменьшением радиального расстояния также быстрее, чем  $L^{-3}$  [133].

Динамика пояса электронов с энергиями  $> 200$  кэВ в период умеренной магнитной активности иллюстрируется рис. 31. Этот рисунок построен по данным [100]. Соответствующие значения индекса  $K_p$  см. на рис. 15. Видно, что вариации интенсивности относительно невелики. Среднее значение потока электронов в максимуме  $\bar{I}_0 \approx 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  изменяется в пределах от  $0,5\bar{I}_0$  до  $2\bar{I}_0$ . Сам максимум, как правило, расположен между  $L = 4,2$  и  $4,8$ .

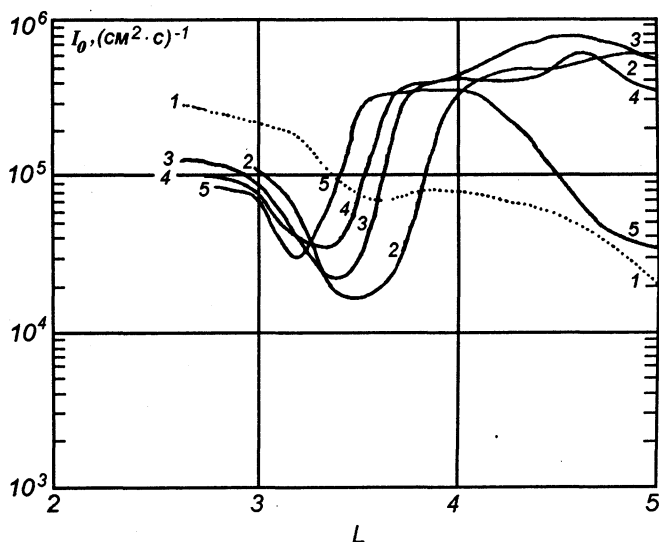
Вариации в период между 28 января и 7 февраля 1963 г. можно объяснить флуктуациями параметра  $D_0$ : при возрастании  $D_0$  без изменения времени жизни и условий на границе внешняя часть пояса должна оставаться неизменной, максимум же сдвигается к Земле, а интенсивность в максимуме возрастает. Аналогичная вариация будет иметь место при увеличении времени жизни без изменения  $D_0$  и условий на границе. Согласно полученным выше оценкам  $D_0 \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ , характерное время переноса при  $L \approx 4,5$  составляет  $(100D_0L^8)^{-1} \approx 10^6 \text{ с} \approx 10$  суток и соответствует времени, в течение которого наблюдалась данная вариация.

Изменения интенсивности с 14 по 28 февраля 1963 г. можно интерпретировать как следствие возрастания мощности источников во время умеренной бури 14 февраля (кривая 4) и возвращения к обычным условиям по окончании бури.

Вариация, происходившая во время сильной бури 17 декабря 1962 г. и в последующий период, представлена на рис. 32 (рисунок построен также по данным [100]). До бури (кривая 1) интенсивность в максимуме составляла  $10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Во время бури произошло резкое возрастание интенсивности на всех  $L \geq 3$ . Очертание внутренней границы возникшего при этом пояса соответствует профилю диффузионной волны (11.21) (см. рис. 33), причем фронт волны расположен при  $L \approx 4$ .



**Рис. 32.** Вариации пояса электронов с энергиями  $> 200$  кэВ во время сильной магнитной бури. 1 — 14/XII; 2 — 21/XII; 3 — 28/XII 1962 г.; 4 — 1/I; 5 — 7/I 1963 г.



**Рис. 33.** Пример диффузионной волны релятивистских электронов во внешней зоне. 1 — 7/XII; 2 — 20/XII; 3 — 23/XII; 4 — 29/XII 1962 г.; 5 — 8/I 1963 г.

Чтобы в течение двух суток (продолжительность бури) фронт распространялся до  $L = 4$ , коэффициент  $D_0$ , согласно (11.23), должен составлять

$$\frac{1}{120L_f^8 t_D(L)} \approx 6 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, резкий всплеск интенсивности электронов во внешней зоне можно объяснить возрастанием  $D_0$  во время бури на порядок и одновременным увеличением потоков электронов с энергиями в десятки кэВ у границы. Последний эффект был обнаружен экспериментально при тех же пролетах спутника «Эксплорер-ХIV» через внешнюю зону [100]. Что же касается десятикратного увеличения  $D_0$ , то для этого необходим либо один внезапный импульс с амплитудой  $\sim 40\gamma$ , либо несколько импульсов  $\sim 20\gamma$  в течение бури.

В дальнейшем происходил спад интенсивности. На внутренней границе ( $L < 3,6$ ) в течение недели сформировался профиль интенсивности, близкий к изображенному на рис. 31 профилю при умеренной магнитной активности. Движения фронта к Земле не наблюдалось, и естественно предположить, что избыточные электроны в этой области высыпались в ионосферу. Порядок величины времени жизни электронов с энергиями  $\sim 200$  кэВ при  $L < 3,6$ , согласно этим данным, составляет около 10 суток.

Эволюцию пояса при  $L > 3,6$  можно объяснить переносом. После бури интенсивность источников у границы упала, и перенос привел к вымыванию избыточных электронов из пояса. Как видно из рисунка, фронт такой диффузионной волны разрежения за 20 суток достиг оболочки  $L \approx 4$ . Соответствующее этим параметрам значение  $D_0 \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$  равно среднему значению  $D_0$ , найденному ранее по ряду других данных.

Таким образом, экспериментальные данные об электронах внешней зоны с энергиями порядка сотен кэВ хорошо согласуются с концепцией переноса. Во всяком случае, до настоящего времени не было получено ни одного результата, который мог бы привести к принципиальным затруднениям.

Рассмотрим теперь данные о релятивистских электронах. Наибольшее количество результатов, полученных в этом участке спектра, относится к энергиям свыше 1,6 МэВ. По-видимому, интенсивность электронов с энергиями  $> 5$  МэВ во внешнем поясе не превышает фон от космических лучей ( $\sim 10 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ). В то же время потоки электронов с энергиями  $> 1,6$  МэВ при  $L = 4-5$  часто достигают величин  $\sim 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Поэтому наблюдаемые во внешней зоне релятивистские электроны имеют очень мягкий спектр (при экстраполяции экспоненциальным законом  $e^{-E/E_0}$  средняя энергия  $E_0 \leq 300$  кэВ). Если считать, что и эти электроны возникают вследствие переноса с границы области захваченной радиации (где поле  $\sim 50\gamma$ ), то начальная энергия частиц должна составлять 300–500 кэВ. Как правило, интенсивность электронов таких энергий у границы поясов не превышает космический фон. Однако такие электроны часто наблюдаются во время магнитных бурь [116].

Это обстоятельство проявляется в особенностях динамики релятивистских электронов внешней зоны. Во время продолжительных периодов низкой магнитной активности (например, в первые месяцы полета спутников «Электрон-1» и «Электрон-2») потоки электронов с энергиями свыше 1 МэВ малы ( $\sim 10^4 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  в максимуме внешней зоны). После сильных магнитных бурь возникают мощные пики релятивистских электронов, интенсивность которых при  $L \sim 5$  достигает  $10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Если бури следуют одна за другой с интервалом  $\lesssim 10$  дней, то картина оказывается очень сложной. По-видимому, во время бури пик исчезает, а по окончании бури формируется новый максимум.

Если же после бури магнитная активность в течение одного месяца невелика, то удастся наблюдать диффузионную волну. Одно из таких явлений описано в [100]. На рис. 33 [100] представлены профили интенсивности электронов с  $E > 1,6$  МэВ

в плоскости экватора за декабрь 1962 – январь 1963 гг. Две другие диффузионные волны, зарегистрированные на спутнике «Эксплорер-XIV», проанализированы в [109]. Аналогичное явление наблюдалось на высоких геомагнитных широтах при исследованиях на советском спутнике «Космос-41» [134].

Поскольку инжекция электронов субрелятивистских энергий у границы поясов имеет импульсный характер, эти диффузионные волны относятся к типу (11.37). Основное отличие экспериментальных результатов от соотношения (11.37) состоит в том, что в реальной волне интенсивность в максимуме является убывающей функцией времени. При наличии потерь с характерным временем  $\tau_s \sim 10$  суток этот факт представляется совершенно естественным.

Есть основания предположить, что время жизни релятивистских электронов  $\tau_s$  во внешней зоне слабо зависит от  $L$  (во всяком случае при  $L < 4$ ). В этом случае диффузионная волна с учетом потерь приближенно описывается выражением (11.37), умноженным на  $e^{-t/\tau_s}$ , а движение максимума и переднего и заднего фронтов волны по-прежнему определяется соотношениями (11.41)–(11.45).

Согласно (11.46) скорость переднего фронта при  $D_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$  есть  $V_f = \dot{L}_f \approx 1,5 \cdot 10^{-7} L^9 \text{ (а/сутки)}$ . На рис. 34 приведена эта зависимость (сплошная кривая),

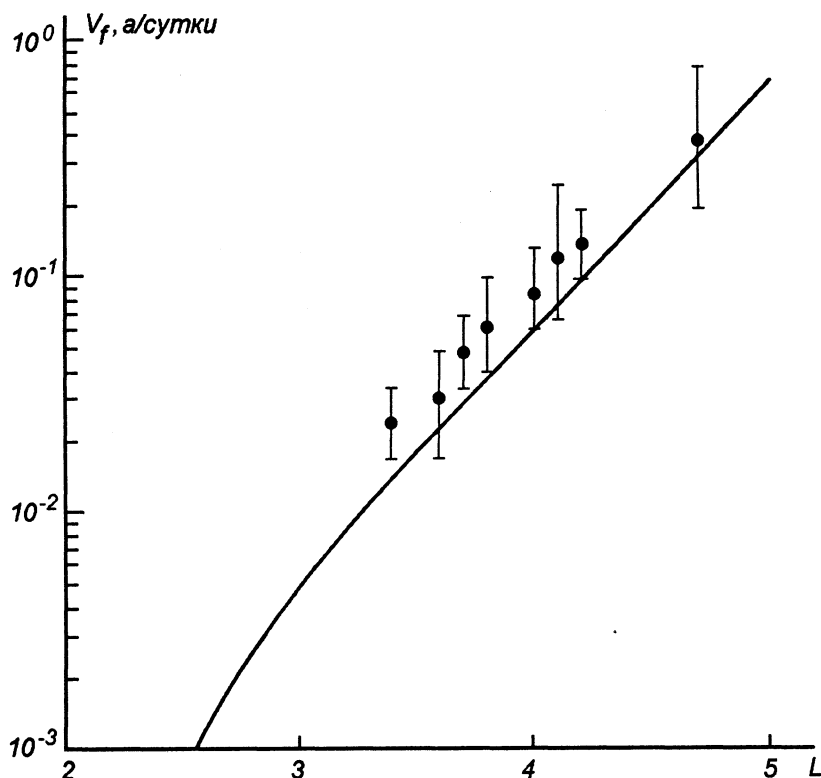


Рис. 34. Теоретические и экспериментальные данные о зависимости скорости переднего фронта диффузионной волны от  $L$

а также нанесены экспериментальные данные из работы [109]. Точки при  $L > 3$  соответствуют диффузионным волнам, наблюдавшимся на спутнике «Эксплорер-XIV», а точка при  $L \approx 2$  — скорости смещения второго максимума высокоэнергичных протонов (см. § 13). Из рисунка видно, что как закон изменения  $\dot{L}_f(L)$ , так и абсолютная величина скорости хорошо соответствуют теоретическому результату.

Рассмотрим теперь данные [134]. Спустя двое суток после бури 7–8 сентября 1964 г. при  $L = 5,5$  возник максимум электронов с энергиями  $> 2$  МэВ. Спустя 10 суток он сместился на  $L \approx 5$ , а спустя 20 суток — на  $L = 4,3$ . Положение максимума, согласно (11.41) ( $\gamma \approx 15$ ), определяется соотношением  $L_m = \left( \frac{1}{120D_0t} \right)^{1/8}$ , откуда

$$D_0 = \frac{1}{120L_m^8 t}.$$

Подставляя сюда численные значения  $L_m$  и  $t$  получаем, что  $D_0 \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$  (по точкам 2 и 20 суток) и  $D_0 \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$  ( $t = 10$  суток).

Таким образом, данные [134] подтверждают наши оценки константы  $D_0$  и показывают, что в конце 1964 г. эта величина имела то же значение, что и в конце 1962 — начале 1963 г. [109].

Исследование диффузионных волн позволяет определить  $D_0$  непосредственно. Поскольку эти результаты приводят к той же величине  $D_0$ , что и анализ структуры протонного пояса, подтверждается оценка средней плотности холодной атмосферы ( $N = 10^3 \text{ см}^{-3}$ ), приведенная в § 10.

Близкое совпадение значений  $D_0$ , найденных по различным экспериментальным данным в области  $1,5 \leq L \leq 6$ , показывает, что внезапные импульсы действительно являются основным механизмом ускорения частиц в радиационных поясах Земли. Вместе с тем экспериментальные данные показывают, что утечки электронов не связаны с кулоновскими столкновениями и происходят значительно быстрее. Изучению природы утечек посвящена следующая глава.

## Глава V

### **Устойчивость радиационных поясов**

#### **§ 15. Современное состояние проблемы устойчивости радиационных поясов**

Многочисленные исследования показывают, что неограниченная горячая плазма в магнитном поле является устойчивой лишь при соблюдении очень жестких условий. Практически надежно гарантировать устойчивость можно лишь в случае, когда функции распределения ионов и электронов зависят только от энергии частиц. Небольшая пространственная неоднородность плазмы или анизотропия углового распределения частиц приводят к возникновению нарастающих во времени электрических и магнитных полей.

Развитие неустойчивости обычно характеризуют инкрементом  $\gamma$  — обратным временем нарастания амплитуды в  $e$  раз. В зависимости от причины возникновения неустойчивости величина  $\gamma$  может определяться самыми различными характеристиками плазмы.

К числу сравнительно медленных и крупномасштабных неустойчивостей относятся гидромагнитная и дрейфовая неустойчивости. Гидромагнитная неустойчивость (подробный обзор см. в [59]) является аналогом тепловой конвекции. Роль силы тяжести играют здесь диамагнитные силы, стремящиеся вытолкнуть горячую плазму в область более слабого поля. Физический механизм развития конвективной неустойчивости заключается в возникновении нарастающей во времени электрической поляризации неоднородной плазмы. Электрическое поле в случае неустойчивости вызывает дрейф частиц в область более слабого поля.

Согласно [59] в поле диполя конвективная неустойчивость возникает в том случае, когда давление плазмы убывает с  $L$  быстрее, чем  $L^{-8}$ . Если геомагнитная ловушка заполняется частицами вследствие переноса с границы под действием внезапных импульсов, то плотность частиц убывает как  $L^{-4}$ , а их средняя энергия — как  $L^{-3}$  (см. § 11). Следовательно, давление  $P$  изменяется как  $L^{-7}$ , и сформированная посредством данного механизма плазма конвективно-устойчива.

Помимо конвективной неустойчивости, пространственная неоднородность приводит к развитию так называемых дрейфовых неустойчивостей, при которых раскачиваются волны с фазовыми скоростями, равными токовой скорости какой-либо группы захваченных в ловушку частиц. Этот тип неустойчивости подробно изучен в случае слабо неоднородного поля. Оказывается, что дрейфовые неустойчивости развиваются при гораздо меньших градиентах давления, чем конвективные [136].

Значительно более быстрые неустойчивости возникают при некоторых особенностях функции распределения частиц. Так, если в электронной компоненте имеются две или более групп частиц, движущихся в целом друг относительно друга (т. е. имеются электронные пучки), то начинают раскачиваться ленгмюровские

колебания с инкрементом порядка электронной плазменной частоты. При относительном движении электронов и ионов со скоростью, превышающей скорость электронного звука, также раскачиваются электростатические колебания с инкрементом порядка ионной плазменной частоты. Существует ряд других вариантов пучковой неустойчивости, обзор которых можно найти в [137] и [138].

Анизотропия углового распределения частиц также приводит к возникновению неустойчивости. При наличии магнитного поля генерируются электромагнитные волны, частота и поляризация которых определяются характером анизотропии и спектром скоростей частиц.

Все неустойчивости, кроме конвективной, имеют резонансный характер: в раскачке волн участвуют либо те частицы, скорость которых близка к фазовой скорости волны (черенковский резонанс), либо частицы, которые при наличии внешнего магнитного поля находятся в циклотронном резонансе с волной.

В ограниченных системах всегда имеются потери энергии волн, связанные с излучением, диссипацией у границ и т. д. Поэтому развитие неустойчивости до некоторой степени стабилизируется. Именно, существуют некоторые критические значения полного числа горячих частиц, ниже которых (при заданной конфигурации поля и плазмы) потери волновой энергии превышают скорость передачи энергии от плазмы к волнам.

В настоящее время в теории плазменной неустойчивости достигнут значительный прогресс, и современные методы физики плазмы позволяют не только определять границу устойчивости, но и исследовать динамику развития неустойчивостей при сверхкритической концентрации плазмы с учетом обратного влияния волн на частицы и нелинейного взаимодействия волн друг с другом [83, 140, 141]. Такой подход возможен в том случае, когда в линейном приближении существует определенная связь между частотой и волновым вектором, а инкремент неустойчивости мал в сравнении с частотой. В случае гидродинамической турбулентности, однако, данное приближение неприменимо, так как здесь закон дисперсии определяется существенно нелинейными процессами.

Плазма радиационных поясов существенно неоднородна и анизотропна. Поэтому можно ожидать, что она окажется неустойчивой. За последние годы изучение устойчивости поясов начинает привлекать все большее внимание. Наибольший интерес представляет исследование дрейфовой неустойчивости протонного пояса и циклотронных (связанных с анизотропией углового распределения) неустойчивостей. Пучковые неустойчивости могут играть известную роль на малых высотах, где во время сильных сбросов электронов падающие на ионосферу потоки электронов значительно превышают отраженные. Однако на больших высотах пучки отсутствуют.

Дрейфовая неустойчивость протонной зоны была подробно изучена Чангом, Перлстайном и Розенблютом [139]. В этой работе была исследована раскачка крупномасштабных электростатических колебаний магнитосферы. Принималось, что на больших высотах вследствие высокой проводимости вдоль силовых линий электрическое поле перпендикулярно магнитному, и учитывалась диссипация токов в ионосфере. При получении критерия устойчивости было взято распределение давления протонов, близкое к истинному (давление  $P \propto L^{-6}$ ). Окончательный результат имеет вид

$$n_{\text{кр}} \approx N_{\text{ион}} \frac{\Delta a}{2\pi a} L^{-1/2} \frac{m}{\sqrt{(L-1)(4L-3)}}, \quad (15.1)$$



где  $n_{кр}$  — критическая плотность быстрых протонов,  $a$  — радиус Земли,  $\Delta a \approx 5 \cdot 10^6$  см — толщина слоя ионосферы, в котором происходит диссипация,  $N_{ион}$  — плотность холодных электронов в этом слое,  $m > 1$  — номер гармоники (решение искалось в виде  $\propto e^{im\varphi}$ , где  $\varphi$  — долгота).

На освещенной стороне Земли  $N_{ион} \approx 2 \cdot 10^5$  см $^{-3}$ , и в районе максимума протонной зоны ( $L \approx 4$ )  $n_{кр} \approx 15$  см $^{-3}$ , что на два порядка выше наблюдаемой концентрации. При параметрах ночной ионосферы ( $N_{ион} \approx 5 \cdot 10^3$  см $^{-3}$ ) критическая концентрация существенно снижается. Однако при оценке устойчивости крупномасштабных возмущений ( $m \sim 1$ ), очевидно, нужно брать среднее по долготе значение  $N_{ион} \approx 10^5$  см $^{-3}$ .

Таким образом, анализ дрейфовой неустойчивости протонного пояса [139] приводит к выводу, что наблюдаемые в этом районе потоки быстрых протонов значительно ниже критических. Возникающие при возмущениях дрейфа электрические поля быстро рассасываются через ионосферу. Это заключение хорошо согласуется с результатами § 13, из которых следует, что утечки протонов связаны в основном с ионизационными потерями.

Циклотронная неустойчивость, связанная с анизотропией углового распределения скоростей частиц плазмы в магнитном поле, была предсказана теоретически Р. З. Сагдеевым и В. Д. Шафрановым [142] и затем была обнаружена экспериментально в опытах с магнитными ловушками [143, 144]. В применении к радиационным поясам эта неустойчивость была рассмотрена в [17–20]. В работах [17, 18] исследована модель с однородным полем. Утечки частиц в ионосферу моделировались введением запрещенного конуса. Предполагалось, что падающие на ионосферу волны полностью поглощаются. Задача о сбросе электронов была решена в квазилинейном приближении (т. е. с учетом обратного влияния волн на частицы). Результаты [18] показывают, что при наблюдаемых в поясах максимальных потоках электронов с энергиями порядка нескольких кэВ неустойчивость очень эффективна. За время пробега волны вдоль силовой линии ее амплитуда возрастает от уровня тепловых шумов до величины, достаточной для рассеяния электрона с энергией  $\sim 10$  кэВ на угол  $\sim \pi$ . Отсюда следует, что циклотронная неустойчивость может играть важную роль в динамике радиационных поясов Земли.

В работах [19, 20] была исследована граница циклотронной неустойчивости реальных радиационных поясов с учетом неоднородности поля и ионосферного поглощения. Оказалось, что распределение критической интенсивности в функции от  $L$  довольно точно соответствует истинному профилю электронных поясов. В частности, зазор между внешним и внутренним поясами соответствует минимуму ионосферного поглощения волн, раскачиваемых быстрыми электронами.

Ниже излагаются основные результаты [19, 20].

## § 16. Основные уравнения

Циклотронные неустойчивости обусловлены резонансом между волнами и частицами на ларморовской частоте с учетом эффекта Доплера. При этом в случае мягких спектров частиц наиболее легко раскачиваются волны, у которых волновой вектор  $\mathbf{k}$  и групповая скорость  $\mathbf{u}_g$  параллельны силовой линии (см., например,

[138, с. 75]). Условие резонанса при такой геометрии имеет вид

$$ckP_{\parallel} - \omega = \Omega, \quad (16.1)$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  — волновой вектор и частота волны,  $\Omega = qH/(\mu c)$  — циклотронная частота нерелятивистской частицы,  $\mu$  и  $q$  — ее масса и заряд,  $c$  — скорость света, а  $P_{\parallel}$  — параллельная полю составляющая импульса. Здесь и всюду в дальнейшем мы будем считать, что импульс измеряется в единицах  $\mu c$  и  $P$  является, таким образом, безразмерной величиной.

При изотропном угловом распределении частиц их резонансное взаимодействие с волной сводится к поглощению. Если же угловое распределение анизотропно, то в бесконечной плазме при наличии сколь угодно быстрых частиц развивается неустойчивость. Согласно [142] неустойчивые волны имеют круговую поляризацию, и механизм их раскачки зависит от направления вращения вектора электрического поля и характера анизотропии. Если  $\bar{\varepsilon}_{\perp} > \bar{\varepsilon}_{\parallel}$  ( $\bar{\varepsilon}_{\perp}$  и  $\bar{\varepsilon}_{\parallel}$  — средние энергии продольного и поперечного движений), что имеет место в поясах, то протоны раскачивают альвеновскую волну, вектор  $\mathbf{E}$  которой вращается в сторону ларморова вращения протонов, а электроны — быструю магнитно-звуковую волну, у которой направление вращения  $\mathbf{E}$  противоположно. Если одновременно имеются и протоны, и электроны, удовлетворяющие условию резонанса (16.1), то при  $\bar{\varepsilon}_{\perp} > \bar{\varepsilon}_{\parallel}$  электроны будут препятствовать раскачке альвеновской, а протоны — быстрой магнитно-звуковой волны, так что результирующий эффект определяется в этом случае учетом обеих компонент плазмы.

Поскольку соотношение между циклотронным поглощением и скоростью раскачки при  $(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})/\varepsilon_{\perp} \sim 1$  определяется величиной  $\omega/(\Omega - \omega)$ , с точки зрения неустойчивости наибольший интерес представляют частоты  $\omega \ll \Omega$ . Практически уже при  $\omega < \Omega/3$  в условии резонанса можно опустить  $\omega$  и провести существенные упрощения в дисперсионных уравнениях для волн. Для альвеновских волн получаем ( $\omega \ll \Omega_H$ )

$$\omega = ku_a, \quad (16.2)$$

где  $u_a = H/\sqrt{4\pi\rho}$  — альвеновская скорость. Для быстрой магнитно-звуковой волны в диапазоне  $\omega_H \gg \omega \gg \Omega_H$

$$\omega = \omega_H \frac{c^2 k^2}{\omega_0^2}, \quad (16.3)$$

а при  $\omega \lesssim \Omega_H$

$$\omega = ku_a. \quad (16.4)$$

Здесь через  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  обозначены ларморовские частоты электронов и ионов (точнее, абсолютные величины этих частот), а через  $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$  — плазменная частота. Величины  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $N$  — число холодных электронов в  $1 \text{ см}^3$ .

В случае мягких спектров основной вклад в раскачку волны с заданной частотой дает приэкваториальная область, в которой напряженность поля на силовой линии минимальна: как видно из (16.1), при этом возможен резонанс с частицами наименьших энергий. Поэтому, не прибегая к детальному анализу, можно сделать ряд оценок порядка величины частот и длин волн, наиболее опасных с точки зрения неустойчивости. При оценках используем следующие численные значения: магнитное поле

у экватора Земли  $H_e \approx 0,3$  Гс, ларморовские частоты ионов и электронов в плоскости экватора  $\Omega_H = \Omega_{H_0} L^{-3} \approx 3 \cdot 10^3 L^{-3}$ ,  $\omega_H = \omega_{H_0} L^{-3}$ ,  $\omega_0^2 = \text{const} = 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-2}$ ,  $u_a = u_0 L^{-3} = 2 \cdot 10^3 L^{-3}$ . Значения  $\omega_0^2$  и  $u_a$  соответствуют плотности холодной плазмы  $N = 10^3 \text{ см}^{-3}$ .

Рассмотрим внешнюю протонную зону. В максимуме ( $L \sim 3-4$ )  $c\bar{P} \sim 10^9 \text{ см} \times \text{с}^{-1} \gg u_a \approx 5 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , так что резонансная частота  $\omega = \Omega_H \frac{u_a}{c\bar{P}}$  (см. (16.1) и (16.2)) много меньше  $\Omega_H$  и по порядку величины составляет несколько радиан в секунду. Во внутренней зоне ( $L \lesssim 2,5$ ) имеются электроны с  $\bar{P} \sim 1$ . Из (16.1) и (16.3) получаем, что при этом  $\omega \approx 4 \cdot 10^7 L^{-9} \text{ с}^{-1}$  всюду лежит в интервале  $\omega_H \gg \omega \gg \Omega_H$ , так что использование соотношения (16.3) оправдано. Однако во внешней зоне ( $L \sim 4$ ) релятивистские электроны ( $P \sim 4$ ) раскачивают значительно более низкие частоты ( $\sim 20 \text{ рад/с}$ ), меньшие  $\Omega_H$ . Можно показать, что для всех представляющих интерес частот всюду, кроме нижних слоев ионосферы, с высокой точностью применимо приближение геометрической оптики.

В данной работе рассматриваются волны, у которых волновой вектор  $\mathbf{k}$  и групповая скорость  $\mathbf{u}_g$  направлены вдоль магнитных силовых линий (лишь в ионосфере вследствие резкого возрастания показателя преломления вектор  $\mathbf{k}$  отклоняется от направления поля и приближается к вертикали). Существование таких волн в системах с искривленными силовыми линиями не является тривиальным фактом. Однако в случае магнитосферы волны данного типа существуют, так как в сопряженных точках (на противоположных концах силовой линии) часто наблюдаются многократные радиозоо грозовых разрядов (так называемые свистящие атмосферерики), диапазоны частот которых (1–10 кГц) соответствуют быстрым магнитно-звуковым волнам. Из уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}; \quad \mathbf{k} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}; \quad \omega = \frac{e}{mc} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{H})}{\omega_0^2}$$

следует, что если  $\mathbf{u}_g$  направлено по силовой линии, то и вектор  $\mathbf{k}$  должен иметь то же направление. По-видимому, на больших высотах существуют неоднородности плотности, создающие своеобразные волноводы, в которых показатель преломления зависит только от координаты вдоль силовой линии [145]. При таком расслоении могут существовать волноводы, в которых волновой вектор альвеновских волн также направлен по силовым линиям ( $\mathbf{u}_g$  в случае альвеновских волн всегда ориентировано вдоль  $\mathbf{H}$ ).

Введем ортогональную систему координат  $x, y, z$ , в которой линии  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  совпадают с лучевыми траекториями, а  $z$  есть длина дуги этих линий, отсчитываемая от плоскости экватора. Поскольку лучевые траектории всюду выше ионосферы совпадают с силовыми линиями, параметры Ляме  $h_x, h_y, h_z = 1$  удовлетворяют очевидному соотношению  $h_x h_y = \eta^{-1}(z)$ , где  $\eta(z)$  — отношение напряженности магнитного поля  $H(z)$  в данной точке силовой линии к полю  $H_0$  при  $z = 0$ . Отметим, что в поле диполя  $\eta(z)$  выражается через полярный угол  $\theta$ , отсчитываемый от магнитной оси, и не зависит от  $L$ :

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{\sin^6 \theta}. \quad (16.5)$$

Уравнения Максвелла для поперечных волн, параметры которых зависят только от  $z$  и от  $t$  (как  $e^{i\omega t}$ ), сводятся к

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{4i\pi\omega}{c^2}(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}), \quad (16.6)$$

где  $\mathbf{j}_0$  — плотность тока холодных, а  $\mathbf{j}$  — быстрых частиц (током смещения пренебрегаем). В компонентах (16.6) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial z} h_y \frac{\partial}{\partial z} h_x E_x &= \frac{4i\pi\omega}{c^2} \{ \sigma_0 E_x + \sigma_H E_y + \hat{\sigma}_0 E_x + \hat{\sigma}_H E_y \}, \\ \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial z} h_x \frac{\partial}{\partial z} h_y E_y &= \frac{4i\pi\omega}{c^2} \{ -\sigma_H E_x + \sigma_0 E_y - \hat{\sigma}_H E_x + \hat{\sigma}_0 E_y \}, \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

где  $h_x, h_y$  — параметры Лямэ,  $\sigma_0$  и  $\sigma_H$  — диагональная и холловская компоненты тензора проводимости,  $\hat{\sigma}_0$  и  $\hat{\sigma}_H$  соответствующие операторы, описывающие ток быстрых частиц. Будем считать, что в приближении геометрической оптики операторы  $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_H$  действуют только на фазу волны. Сделаем подстановку

$$\mathbf{E} = \sqrt{\eta} \psi \equiv \frac{\psi}{\sqrt{h_x h_y}}$$

и сохраним члены только нулевого и первого порядка малости в «квазиклассическом» разложении (16.7) (т. е. члены с  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  и  $\partial \psi / \partial z$ ). В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} &= \frac{4i\pi\omega}{c^2} \{ \sigma_0 \psi_x + \sigma_H \psi_y + \hat{\sigma}_0 \psi_x + \hat{\sigma}_H \psi_y \}, \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} &= \frac{4i\pi\omega}{c^2} \{ -\sigma_H \psi_x + \sigma_0 \psi_y - \hat{\sigma}_H \psi_x + \hat{\sigma}_0 \psi_y \}, \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

откуда видно, что система (16.8) имеет решения типа волн с круговой поляризацией  $\psi_x = \psi$ ;  $\psi_y = \pm i\psi$ , причем функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{4i\pi\omega}{c^2} \{ (\sigma_0 \pm i\sigma_H) \psi + (\hat{\sigma}_0 \pm i\hat{\sigma}_H) \psi \}. \quad (16.9)$$

Следует иметь в виду, что коэффициенты  $\sigma_0$  и  $\sigma_H$  зависят от направления вращения плоскости поляризации, так что оба знака перед  $\psi_y$  допустимы лишь при  $\omega < \Omega_H$ . При  $\omega > \Omega_H$  существуют только волны с  $\psi_y = -i\psi_x$ , в которых вращение соответствует ларморовскому вращению электронов. (Подробный анализ свойств волн, бегущих вдоль магнитного поля, см. в [146, с. 28].)

В диапазонах частот  $\omega \ll \Omega_H$  и  $\Omega_H \ll \omega \ll \omega_H$  уравнение (16.9) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 q^2(z) \psi = \frac{4i\pi\omega}{c^2} (\hat{\sigma}_0 \pm i\hat{\sigma}_H) \psi, \quad (16.10)$$

где  $k_0^2(\omega)$  — волновое число, соответствующее частоте  $\omega$  в экваториальной плоскости, а безразмерный множитель  $q(z)$  описывает изменение показателя преломления с  $z$ .

Поскольку концентрация быстрых частиц в поясах мала, а их давление много меньше  $H^2/(8\pi)$ , они не приводят к существенным изменениям соотношения между

$\omega$  и  $k$ . Поэтому ток быстрых частиц можно рассматривать как малое возмущение. В нулевом приближении имеем:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 q^2(z) \psi_0 = 0. \quad (16.11)$$

Приближение геометрической оптики справедливо всюду, кроме нижних областей ионосферы, и решение (16.11) имеет вид

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{q}} \left( A \exp \left\{ ik_0 \int_0^z q(\zeta) d\zeta \right\} + B \exp \left\{ -ik_0 \int_0^z q(\zeta) d\zeta \right\} \right). \quad (16.12)$$

Если обозначить через  $\pm l$  координаты эффективных границ областей нарушения условий применимости геометрической оптики, то вблизи этих границ решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_0|_{z \rightarrow l} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left( A \exp \left\{ ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta - ik_0 q(l)(l-z) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + B \exp \left\{ -ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta + ik_0 q(l)(l-z) \right\} \right), \\ \psi_0|_{z \rightarrow -l} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left( A \exp \left\{ -ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta + ik_0 q(l)(l-z) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + B \exp \left\{ ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta - ik_0 q(l)(l-z') \right\} \right), \end{aligned} \quad (16.13)$$

(во втором равенстве мы положили, что  $z' = -z$ , и учли четность функции  $q(\zeta)$ ).

Допустим, что нам известно точное решение задачи об отражении плоской волны, которая бежит из области с показателем преломления  $N = \text{const}$ , соответствующим  $q(l)$ , от нижних слоев ионосферы, нейтральной атмосферы и поверхности Земли. Тогда коэффициенты  $A$  и  $B$  в (16.13) можно выразить друг через друга с помощью изменения фазы  $\Phi(\omega)$  и коэффициента отражения  $R(\omega)$ . Поскольку решение ищется в виде  $\propto e^{i\omega t}$ , член с  $A$  в первом уравнении (16.13) описывает отраженную, а во втором — падающую волну.

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} A \exp \left\{ ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right\} &= \sqrt{R} e^{i\Phi} B \exp \left\{ -ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right\}, \\ B \exp \left\{ ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right\} &= \sqrt{R} e^{i\Phi} A \exp \left\{ -ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right\}, \end{aligned}$$

откуда вытекает следующее «правило квантования»:

$$\exp \left\{ 2ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right\} = Re^{2i\Phi} \exp \left\{ -2ik_0 \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right\},$$

или

$$k_{0n} = \left( \frac{n\pi + \Phi(\omega)}{2} - \frac{i}{4} \ln R(\omega) \right) \cdot \left( \int_0^l q(\zeta) d\zeta \right)^{-1}. \quad (16.14)$$

Собственные функции  $\psi_{0n}$  имеют, таким образом, вид

$$\psi_{0n} = \frac{A_n}{\sqrt{q}} \begin{cases} \cos \left( k_{0n} \int_0^z q(\zeta) d\zeta \right), \\ \sin \left( k_{0n} \int_0^z q(\zeta) d\zeta \right). \end{cases} \quad (16.15)$$

Декремент

$$\sigma_n = \frac{\partial \omega}{\partial k} \operatorname{Im} k_n = \frac{1}{2T_n} \ln \frac{1}{R}, \quad (16.16)$$

где

$$T_n = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_n}^{-1} \int_{-l}^l q(z) dz \quad (16.17)$$

— время движения волнового пакета со средней частотой  $\omega_n$  между точками отражения ( $\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{1}{q(z)}$  — групповая скорость пакета). Результат (16.16) имеет ясный физический смысл: после  $m$  отражений амплитуда волны уменьшается в  $(\sqrt{R})^{-m} \approx \exp \left\{ \frac{t}{2T} \ln \frac{1}{R} \right\}$  раз. В случае  $\partial \omega / \partial k < 0$  также имеет место затухание, поскольку  $R > 1$ .

Дело в том, что при определении  $R$  падающая и отраженная волны характеризовались знаком  $k$ . При  $\partial \omega / \partial k < 0$  поток энергии направлен против  $k$ , и поэтому падающая волна является отраженной с точки зрения переноса энергии и, следовательно, имеет меньшую амплитуду.

Функции  $\psi_{0n}$  дают приближенные значения точных функций в области над нижней границей ионосферы. В рассматриваемых условиях точные функции удовлетворяют тому же уравнению (16.11) (напомним, что при выводе (16.11) из (16.1) мы пренебрегли вторыми производными  $\eta$ ; ясно, что учет неоднородности поля в области между поверхностью Земли и ионосферой даст лишь пренебрежимо малые поправки). Точные функции  $\psi_n$  обращаются в нуль при  $z = \pm z_0$ , т. е. у поверхности Земли. Используя это граничное условие и уравнение (16.11), легко показать, что  $\psi_n$  ортогональны с весом  $q^2(z)$ . Поэтому при расчете инкрементов можно применять теорию возмущений. В то же время при конкретных вычислениях матричных элементов достаточно воспользоваться приближенными функциями  $\psi_{0n}$ , так как токи быстрых частиц текут на больших высотах.

Таким образом, из (16.10) получаем:

$$\delta k^2 = \frac{4i\pi\omega}{c^2} \frac{\int_0^l \psi_{n0}(z)(\hat{\sigma}_0 \pm i\sigma_H)\psi_{n0}(z) dz}{\int_0^l \psi_{n0}^2(z)q^2(z) dz} \quad (16.18)$$

и

$$\delta\omega = \frac{1}{2k} \frac{\partial\omega}{\partial k} \delta k^2, \quad (16.19)$$

так что для расчета инкрементов необходимо определить операторы тензора проводимости, обусловленной быстрыми частицами. Рассмотрим эту задачу в релятивистском случае.

Заряд и массу частицы, как и выше, будем обозначать через  $Q$  и  $\mu$ , не делая различия между ионами и электронами. Поскольку ось  $z$  выбирается в направлении поля,  $H > 0$  и циклотронная частота  $\Omega$  имеет тот же знак, что и  $Q$ . Функции распределения зависят от импульсов, которые измеряются в единицах  $\mu c$ . Невозмущенная функция  $F(P_z, P_\perp, z)$  считается четной по  $P_z$ .

Кинетическое уравнение для возмущенной функции  $f$  в цилиндрических координатах  $P_z, P_\perp, \varphi$  в пространстве импульсов имеет вид

$$i\omega\epsilon f + cP_z \frac{\partial f}{\partial z} - \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{Q}{\mu c} \left\{ \epsilon \left[ (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) - \frac{icP_z}{\omega} (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial F}{\partial P_\perp} + \frac{icP_\perp}{\omega} \frac{\partial F}{\partial P_z} \frac{d}{dz} (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) \right\} \quad (16.20)$$

(здесь мы воспользовались соотношением  $\mathbf{h} = -\frac{ic}{\omega} \text{rot } \mathbf{E}$  и положили  $\epsilon = \sqrt{P^2 + 1}$ ). При круговой поляризации ( $E_x = E, E_y = \pm iE$ ) получаем:

$$i\omega\epsilon f + cP_z \frac{\partial f}{\partial z} - \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{Q}{\mu c} \left\{ \left( \epsilon E - \frac{icP_z}{\omega} \frac{dE}{dz} \right) \frac{\partial F}{\partial P_\perp} + \frac{icP_\perp}{\omega} \frac{dE}{dz} \frac{\partial F}{\partial P_z} \right\} e^{\pm i\varphi}, \quad (16.21)$$

откуда следует, что функция  $f = f_0 e^{\pm i\varphi}$ , а  $f_0$  удовлетворяет уравнению

$$cP_z \frac{\partial f_0}{\partial z} + i(\epsilon\omega \pm \Omega)f_0 = -\frac{Q}{\mu c} \left\{ \left( \epsilon E - \frac{icP_z}{\omega} \frac{dE}{dz} \right) \frac{\partial F}{\partial P_\perp} + \frac{icP_\perp}{\omega} \frac{dE}{dz} \frac{\partial F}{\partial P_z} \right\}. \quad (16.22)$$

Компоненты плотности тока  $\mathbf{j} = Q \int \mathbf{v} f d^3\mathbf{P}$  при этом выражаются через величину

$$j = Qc\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_0 \frac{P_\perp^2}{\epsilon} dP_z dP_\perp. \quad (16.23)$$

Именно,  $j_x = j$ ,  $j_y = \pm ij$ . В приближении геометрической оптики

$$E = \mathcal{E}(z) \exp \left\{ ik_0 \int_0^z q(\zeta) d\zeta \right\}$$

имеем:

$$j = \frac{i\pi Q^2}{\mu} E \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} + \frac{ckP_z}{\omega\epsilon} \left( \frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} - \frac{\partial F}{\partial P_z^2} \right)}{ckP_z + \omega\epsilon \pm \Omega} P_\perp^2 dP_z dP_\perp^2. \quad (16.24)$$

Для вычисления инкремента следует найти вещественную часть (16.24), которая определяется обходом особой точки знаменателя. Полагая

$$E = \frac{A_n}{\sqrt{q}} \cos k_n \int_0^z q(z) dz,$$

получаем:

$$\text{Im } j_n = -\frac{\pi^2 Q^2}{\mu ck} \frac{A_n}{\sqrt{q^3}} \cos k_n \int_0^z q(\zeta) d\zeta \int_0^\infty \left[ \frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} \pm \frac{\Omega}{\omega_n \epsilon} \left( \frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} - \frac{\partial F}{\partial P_z^2} \right) \right] P_\perp^2 dP_\perp^2,$$

$$P_z = \frac{\Omega}{ckq(\zeta)}$$

(мы положили для простоты, что  $\omega \ll \Omega$ ). Аналогичный результат получается и в случае нечетных функций. Отсюда легко найти матричный элемент величины

$$\frac{4i\pi\omega}{c^2} (\hat{\sigma}_0 + i\hat{\sigma}_H) \psi = \frac{4i\pi\omega}{c^2} \sqrt{\eta} j$$

и

$$\text{Im } \delta k^2 = \frac{4\pi^3 Q^2 \omega}{\mu c^3 \Lambda k} \int_0^l \int_0^\infty \left[ F \pm \frac{\Omega P_\perp^2}{\omega \epsilon} \left( \frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} \right)_\epsilon \right] dP_\perp^2 \frac{d\zeta}{q^2(\zeta)}, \quad (16.25)$$

$$P_z^2 = \frac{\Omega^2}{c^2 k^2 q(\zeta)}.$$

Здесь мы опустили индексы  $n$  у  $k$  и  $\omega$  и несколько преобразовали выражение с  $F$  (проинтегрировали по частям первый член и использовали тождество

$$\frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} - \frac{\partial F}{\partial P_z^2} \equiv \left( \frac{\partial F}{\partial P_\perp^2} \right)_\epsilon,$$

знак  $\left( \right)_\epsilon$  показывает, что частная производная берется при постоянном  $\epsilon$  или, что то же,  $(P)$  и положили

$$\Lambda = \int_0^l q(\zeta) d\zeta.$$



В (16.25) верхний знак соответствует альвеновской, а нижний — ускоренной магнитно-звуковой волне. Поскольку при неустойчивости  $\text{Im } \delta k^2 > 0$ , альвеновские волны могут раскачиваться либо протонами ( $\Omega > 0$ ) с  $\bar{P}_\perp^2 > \bar{P}_\parallel^2$ , либо электронами с противоположным типом анизотропии. Ускоренные магнитно-звуковые волны, напротив, раскачиваются протонами с  $\bar{P}_\perp^2 < \bar{P}_\parallel^2$  или электронами с  $\bar{P}_\perp^2 > \bar{P}_\parallel^2$ . В случае однородного поля и постоянной плотности холодной плазмы результат (16.25) переходит в нерелятивистском случае в соответствующие формулы [142]. Выражение  $\frac{\partial \omega}{\partial k^2} \delta k^2$  является отношением работы частиц над полем в некоторой силовой трубке в единицу времени к энергии поля в этой же трубке. Условие неустойчивости определяется из сравнения инкремента  $\gamma(\omega)$  с соответствующим декрементом  $\delta(\omega)$ .

Прежде чем переходить к анализу устойчивости различных районов радиационных поясов Земли, отметим два важных частных случая формулы (16.25). Известно, что угловое распределение частиц вблизи плоскости экватора хорошо аппроксимируется законом  $\sin^{2\nu} \alpha$  ( $\alpha$  — питч-угол). Такое распределение обладает двумя интересными свойствами: оно остается неизменным вдоль силовой линии, а плотность частиц изменяется как  $\eta^{-\nu}$  (см. § 4). В переменных  $P, P_\perp$  функция распределения такого типа имеет вид

$$F = F_0(P^2) \left( \frac{P_\perp^2}{P^2} \right)^\nu \eta^{-\nu}(z). \quad (16.26)$$

При  $\nu \gtrsim 1$  и  $\omega \ll \Omega$  в (16.25) можно пренебречь первым членом в квадратных скобках. Подставляя (16.26) в (16.25), получаем:

$$\gamma(\omega) = -\frac{1}{2k} \frac{\partial \omega}{\partial k} \text{Im } \delta k^2 = \pm \frac{2\pi^3 Q^2 \nu}{\mu c^3 k^2 \Lambda} \frac{\partial \omega}{\partial k} \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\Omega(\zeta) \eta^{-\nu}}{q^2(\zeta)} \left[ \frac{F_0(P^2)}{\varepsilon} \left( \frac{P_\perp^2}{P^2} \right)^\nu \right] dP^2 d\zeta, \quad (16.27)$$

$$P^2 = P_\perp^2 + \frac{\Omega^2(z)}{c^2 q^2(\zeta) k^2}.$$

Если, кроме того,  $F_0(P^2)$  является степенной функцией  $F_0(P^2) = C P^{-2\lambda}$  при  $P \geq P_0$ , то для частот, соответствующих резонансу с частицами при  $P_z \geq P_0$ , из (16.27) следует, что в нерелятивистском случае ( $\varepsilon = 1$ )

$$\gamma(\omega) = \pm \frac{Q}{|Q|} \frac{2\pi^3 Q^2 \nu}{\mu c^2 k \Lambda} \frac{\partial \omega}{\partial k} C \int_0^1 \frac{\eta^{-\nu}(\zeta)}{q(\zeta)} \left( \frac{|\Omega(z)|}{ckq(z)} \right)^{(-2\lambda-3)} d\zeta \int_0^\infty x^\nu (1+x)^{-(\lambda+\nu)} dx, \quad (16.28)$$

а в ультрарелятивистском ( $\varepsilon \approx P$ )

$$\gamma(\omega) = \pm \frac{Q}{|Q|} \frac{2\pi^3 Q^2 \nu}{\mu c^2 k \Lambda} \frac{\partial \omega}{\partial k} C \int_0^1 \frac{\eta^{-\nu}(\zeta)}{q(\zeta)} \left( \frac{|\Omega(\zeta)|}{ckq(\zeta)} \right)^{-(2\lambda-1)} d\zeta \int_0^\infty (1+x)^{-(\lambda+\nu+1/2)} dx. \quad (16.29)$$

Дальнейшее исследование основано на применении формул (16.26)–(16.29).

### § 17. Устойчивость внешней протонной зоны и возможный механизм генерации геомагнитных микропульсаций типа Pc1

Рассмотрим прежде всего устойчивость внешней протонной зоны. Спектр быстрых протонов близок к максвелловскому, угловое распределение, почти изотропное при  $L \geq 6$ , в районе максимума пояса можно описать законом вида (16.26) с  $\nu \approx 1$ . Положим

$$F = \frac{3n}{2\pi^{3/2} P_0^3 \eta(z)} \frac{P_{\perp}^2}{P^2} e^{-P^2/P_0^2}, \quad (17.1)$$

где  $n = \int F d^3\bar{P}$  — плотность протонов вблизи плоскости экватора,  $P_0$  — средний импульс. Параметры  $n$  и  $P_0$  являются функциями  $L$ , причем  $P_0 \propto L^{-3/2}$ . Поскольку электроны, удовлетворяющие условиям резонанса с альвеновскими волнами, заведомо отсутствуют, достаточно рассмотреть одну протонную компоненту.

Обозначим через  $u_0 \approx 2 \cdot 10^9$  см/с альвеновскую скорость, соответствующую полю у экватора Земли  $H_e \approx 0,3$  Гс и плотности холодных протонов  $N = 10^3$  см $^{-3}$ . Тогда в вершинах соответствующих силовых линий  $u_a = u_0 L^{-3}$  и  $\omega = k u_0 L^{-3}$ . При постоянной вдоль силовой линии плотности функция  $q(z) = \eta^{-2}(z)$ . Выражая  $\eta(z)$  и элемент длины дуги через полярный угол  $\theta$  и  $L$ , получаем

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{\sin^6 \theta}, \quad dz = L \sin \theta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} d\theta$$

( $a$  — радиус Земли). Отсюда

$$\Lambda = aL \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta d\theta = \frac{16}{35} aL.$$

В качестве нижнего предела интегрирования можно выбрать 0, так как вклад малых  $\theta$  в интеграл пренебрежимо мал. Эти же пределы, естественно, взяты и при вычислении инкремента.

Положим далее,

$$\Omega_H = \frac{eH}{Mc} = \Omega_H^{(0)} \eta L^{-3},$$

где  $\Omega_H^{(0)} \approx 3 \cdot 10^3$  рад/с — циклотронная частота протонов в поле  $H_e \approx 0,3$  Гс. Полагая в (16.27)  $\varepsilon = 1$  и подставляя  $F$  в виде (17.1), после простых преобразований получаем:

$$\gamma(\omega) \approx 2,5 \Omega_0 \frac{n\alpha}{N} P_0 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \eta^2(\theta) \frac{x}{x + \alpha \eta^4(\theta)} e^{-[x + \alpha \eta^4(\theta)]} \sin \theta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} dx d\theta, \quad (17.2)$$

где

$$\alpha = \frac{\Omega_H^{(0)} u_0^2}{\omega^2 c^2 P_0^2 L^{12}}, \quad (17.3)$$

а  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{M}}$  — ионная плазменная частота.

Численное исследование интеграла (17.2) приводит к следующему приближенному выражению:

$$\gamma(\omega) \approx 1,1 \Omega_0 \frac{n}{N} P_0 \sqrt{\alpha} e^{-\alpha}, \quad (17.4)$$

и максимальный инкремент соответствует частоте

$$\omega(P_0) = \sqrt{2} \frac{u_0}{c P_0} \Omega_H^{(0)} L^{-6}. \quad (17.5)$$

В максимуме пояса ( $L \approx 3,5-4$ ) величина  $n \sim 0,1 \text{ см}^{-3}$ , а  $P_0 \sim 2 \cdot 10^{-2}$  (что соответствует скорости  $\approx 6 \cdot 10^8 \text{ см/с}$ ). Соответствующая частота  $\omega(P_0) \approx 6 \text{ рад/с}$  ( $\sim 1 \text{ Гц}$ ), а инкремент  $\gamma \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Это означает, что в отсутствие ионосферного поглощения неустойчивость развилась бы за время  $\sim 30 \text{ с}$ . Интенсивное рассеяние на турбулентных пульсациях поля должно привести к установлению изотропного углового распределения. Если же распределение остается анизотропным, то либо неустойчивость стабилизируется за счет поглощения волн, либо время жизни частиц оказывается настолько малым, что за  $\sim \gamma^{-1}$  секунд протоны с малыми pitch-углами сбрасываются, и восстанавливается анизотропия. Легко видеть, что если угловое распределение  $\propto \sin^2 \theta$ , то за время  $\sim \gamma^{-1}$  необходимо сбрасывать 30 % захваченных частиц (такова разность между запасом частиц при распределении  $\propto \sin^0 \theta$  и  $\sin^2 \theta$ ). Следовательно, если предположить, что стабилизация отсутствует, придется допустить явно нереальное время жизни протонов ( $\sim 100 \text{ с}$ ).

Для оценки декремента воспользуемся значениями коэффициента отражения  $R$ , вычисляемыми в [147]. Для частот  $\sim 1 \text{ Гц}$  ( $\sim 6 \text{ рад/с}$ )  $\sqrt{R} \approx 0,2$ , а время

$$T = 2 \int_0^1 \frac{dz}{u_a} = \frac{2L^4 a}{u_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\eta} \frac{dz/La}{d\theta} d\theta \approx \frac{L^4 a}{u_0} = 0,3 L^4.$$

Таким образом, при  $L \approx 4$  и  $\omega = 6$  декремент  $\delta$ , согласно (16.16), есть  $\delta \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . При меньших частотах инкремент убывает экспоненциально, а при больших — как  $1/\omega$ . В то же время декремент изменяется слабо (согласно [147]  $\sqrt{R} \propto 1/\omega$ ), а  $\delta \propto \ln \sqrt{R}$ ). Поэтому эффект стабилизации в обоих случаях возрастает. Стабилизация усиливается и при удалении от максимума интенсивности внешней протонной зоны как в сторону больших, так и меньших  $L$ .

Итак, проведенный расчет показывает, что внешний протонный пояс устойчив, однако в максимуме интенсивность быстрых протонов близка к границе неустойчивости. Отсюда следует, что в области малых энергий ( $\lesssim 100 \text{ кэВ}$ ) интенсивность не может существенно превышать наблюдаемой величины. С другой стороны, при наблюдаемых потоках неустойчивость не играет большой роли в утечках протонов, и их гибель в основном связана с ионизационными потерями.

Возможно, что при возмущениях геомагнитного поля или ионосферы нарушается условие устойчивости. При этом в узком диапазоне частот вблизи  $\omega(P_0)$  начнется раскачка альвеновских волн, и у поверхности Земли будут наблюдаться волновые пакеты, совершающие колебания из одного полушария в другое с периодом  $T(L) \approx 0,3L^4$  с. Поскольку величина  $P_0$  во внешней протонной зоне изменяется пропорционально  $L^{-3/2}$ ,  $\omega(P_0) \propto L^{-4,5}$ , так что произведение  $\omega T \propto L^{1/2}$  очень слабо зависит от  $L$ . Появление волн наиболее вероятно в области геомагнитных широт, соответствующей  $L_m$  примерно от 3 до 4 (т.е. максимуму протонной зоны).

Развитие такой неустойчивости обладает рядом интересных особенностей, связанных со сносом возмущения вдоль силовой линии (в данном случае с альвеновской скоростью) (см. [83, с. 212]). Оказывается, что ряд важных выводов можно сделать на основе анализа простой модели с однородным полем и постоянной альвеновской скоростью. Допустим, что в некоторый момент времени среда стала неустойчивой относительно волн с волновым вектором  $k$  в интервале между  $k_1$  и  $k_2$ , а вне этого интервала имеет место поглощение. Если интервал неустойчивости достаточно узок, а инкремент  $\gamma$  мал в сравнении с частотой, то можно положить, что

$$\gamma(k) = \gamma_0 \frac{(k - k_1)(k_2 - k)}{k_1 k_2}. \quad (17.6)$$

Максимальное значение инкремента, соответствующее волновому вектору  $k_0 = (k_1 + k_2)/2$ , есть

$$\gamma_{\max} = \gamma_0 \frac{(k_2 - k_1)^2}{4k_1 k_2}. \quad (17.7)$$

Распространение плоской монохроматической волны определяется соотношением

$$f_k = \exp \{ik(x - vt) + \gamma(k)t\}, \quad (17.8)$$

где  $f_k$  — какая-либо характеристика возмущения (например, одна из компонент электрического поля), а  $\gamma(R)$  определяется (17.7).

Пусть в начальный момент возник одиночный импульс произвольной формы, бегущий в положительном направлении ( $k > 0$ ) и достаточно богатый гармониками с  $k \sim k_0$ . Последнее условие означает, что ширина импульса  $\Delta x \lesssim 1/k_0$ . С течением времени гармоники с  $k$  вне интервала неустойчивости затухнут, и в спектре Фурье  $F(k)$  сохранятся лишь волны с  $k \sim k_0$ . Поскольку предполагается, что интервал  $(k_1, k_2)$  достаточно узок, в интеграле Фурье

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} F(k) f_k(x, t) dk,$$

можно положить  $F(k) \approx F(k_0)$  и заменить нижний предел на  $-\infty$ . В результате получаем следующее асимптотическое выражение для  $f(x, t)$ :

$$f(x, t) = F(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ ik(x - vt) + \gamma_0 t \frac{(k - k_1)(k_2 - k)}{k_1 k_2} \right\} dk. \quad (17.9)$$

Элементарное вычисление дает:

$$f(x, t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \{ik_0(x - vt)\} \exp \left\{ \gamma_0 t \frac{(k_2 - k_1)^2}{4k_1 k_2} - \frac{k_1 k_2}{4\gamma_0 t} (x - vt)^2 \right\}, \quad (17.10)$$

где  $k_0 = (k_1 + k_2)/2$ . Инкремент  $\gamma = \frac{(k_2 - k_1)^2}{4k_1k_2}$  есть  $\gamma(k_0)$ . Из (17.10) видно, что возмущение имеет определенный пространственный период: расстояние между соседними нулями есть  $\pi/k_0$ . Наиболее быстрое нарастание амплитуды (с инкрементом  $\gamma_{\max}$ ) имеет место при  $x = vt$ . Неустойчивая область локализована вблизи точки  $x = vt$ , а при  $|x - vt| \rightarrow \infty$  имеет место затухание с декрементом

$$\frac{k_1k_2v^2}{4\gamma_0} - \gamma_0 \frac{(k_2 - k_1)^2}{4k_1k_2}$$

(при сделанных предположениях о малости  $\gamma_0$  и  $k_2 - k_1$  это выражение всегда положительно). Ширина области, в которой амплитуда убывает от максимального значения (при  $x = vt$ ) в  $e$  раз, растет пропорционально  $\sqrt{t}$ .

Таким образом, при нарушении условий циклотронной устойчивости протонного пояса в магнитосфере должны возникать почти монохроматические волновые пакеты, колеблющиеся вдоль силовых линий из полушария в полушарие. Вначале амплитуды этих волн будут экспоненциально нарастать во времени, а ширина пакетов — увеличиваться как  $\sqrt{t}$ . По мере раскачки волн они начинают все сильнее рассеивать протоны. Уменьшение угловой анизотропии протонов приводит к спаду инкремента до нуля и затем к затуханию волн.

Основные свойства рассмотренной неустойчивости (порядок величины частот, узость спектра, качание вдоль силовых линий, слабая зависимость произведения частоты на период качаний от  $L$ , распывание, поляризация) соответствуют хорошо известным микропульсациям типа Pc1 («жемчужинам») [70, 148]. В литературе неоднократно высказывалась точка зрения, согласно которой «жемчужины» генерируются за счет циклотронной неустойчивости почти моноэнергетических пучков протонов с энергиями порядка сотен кэВ. Однако такие пучки экспериментально не наблюдались. Кроме того, поскольку скорости таких протонов существенно превышают тепловые скорости электронов холодной плазмы, наличие пучков должно привести к гораздо более быстрой неустойчивости (с частотой порядка  $\omega_0$  и инкрементом  $\gamma \sim n\omega_0/N$ , где  $\omega_0$  — ленгмюровская частота,  $n$  и  $N$  — концентрации горячих и холодных частиц).

Как было показано выше, основные свойства «жемчужин» хорошо объясняются циклотронной неустойчивостью реального протонного пояса, а также общими закономерностями развития неустойчивости на бегущих волнах. Дальнейшее исследование «жемчужин» может дать ценную информацию о динамике внешней протонной зоны и о распределении холодной плазмы на больших высотах. Представляет, в частности, интерес выяснить конкретные причины нарушения условий устойчивости протонного пояса. Интересно также оценить рассеяние протонов на «жемчужинах» и его роль в вариациях интенсивности протонов на малых высотах.

## § 18. Устойчивость внутренней электронной зоны

Как известно, до конца 1962 г. детальных исследований спектров электронных потоков во внутренней зоне не было (по крайней мере на больших высотах). Результаты работ [100, 105, 112], выполненных в 1962–1963 гг., а также предварительный анализ данных спутников «Электрон» показывают, что установившееся при

$L \lesssim 3$  распределение электронов с энергиями  $\sim 500$  кэВ весьма стабильно. Возмущение, вносимое при искусственной инжекции, быстро исчезает, и восстанавливается некоторое стандартное распределение.

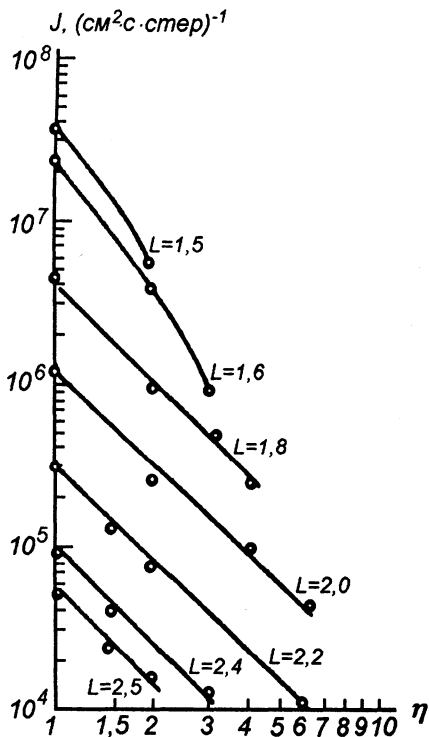


Рис. 35. Распределение электронов с энергией  $\sim 500$  кэВ во внутренней зоне

тически такое же распределение в плоскости экватора наблюдалось с декабря 1962 г. [105]. Из рисунка видно, что вдоль силовых линий интенсивность меняется так, что можно пользоваться формулой (16.27) ( $\nu = 2$ ).

При заданном угловом распределении однозначно определяется спектр частиц в зависимости от  $L$ , соответствующий границе устойчивости на всех частотах  $\omega \lesssim \frac{\nu\omega_H}{\nu+1}$ . (При  $\omega > \frac{\nu\omega_H}{\nu+1}$  циклотронное поглощение подавляет неустойчивость при любых концентрациях частиц.) Полученное таким образом распределение описывает структуру внутренней зоны, устанавливающуюся при инжекции мощных потоков электронов, в широком интервале энергий, превышающих критическое значение. В случае однородного поля уравнение границы устойчивости  $\gamma(\omega) = \delta(\omega)$  является интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно функции  $F$  и имеет вид

$$\int_0^{\infty} I_0(y) F(x+y) dy = \varphi(x), \quad (18.1)$$

Согласно распространенной точке зрения, время релаксации ( $\sim 30$  дней) является временем жизни электронов во внутренней зоне при  $L < 2$ , а стабильное распределение поддерживается за счет какого-то стационарного ускорительного механизма. Никаких соображений о природе этого механизма, однако, пока не появилось. Известные механизмы (распад нейтронов и перенос с границы магнитосферы) заведомо не могут обеспечить наблюдаемые при  $L < 2$  потоки в течение примерно одного месяца.

Возможно другое объяснение структуры внутренней зоны: потоки электронов соответствуют границе устойчивости. При этом время жизни определяется ионизационными потерями, но при превышении существующего уровня развивается неустойчивость, приводящая к быстрой релаксации. Ниже будет показано, что эта точка зрения хорошо согласуется с экспериментальными данными.

На рис. 35 приведено распределение потоков электронов с энергией  $> 500$  кэВ в зависимости от  $L$  и  $\eta$ . Рисунок построен по данным [112], полученным в период с мая по сентябрь 1963 г. Отметим, что прак-

где  $x = \frac{\omega_H^2}{c^2 k^2}$ ,  $y = P_\perp^2$ , а функция  $\varphi(x)$  определяется зависимостью декремента от  $\omega$  и дисперсионным уравнением  $\omega = \omega(k)$ . Уравнение (18.1) легко решается подстановкой  $y = \xi - x$ , преобразованием Лапласа по  $x$  и применением теоремы о свертке. Отсюда следует, в частности, единственность решения. В неоднородном поле раскачка в основном обусловлена областью вблизи вершины силовой линии, где неоднородность невелика. Поэтому представляется вероятным, что единственность решения также имеет место. Приняв это предположение, легко найти  $F_0(L, P)$ .

В Приложении вычислен декремент  $\delta$ , который пропорционален  $\omega$ . Как видно из (16.21), в ультрарелятивистском случае степенной зависимости  $F_0(P)$  соответствует степенная зависимость  $\gamma(\omega)$ . Ищем  $F_0(P)$  в виде  $CP^{-2\lambda}$ . Подставляя в (16.29)  $\gamma^{(1)}$ , получаем, что  $\gamma(\omega) \propto \omega^{\lambda-1}$ , откуда (поскольку  $\delta \propto \omega$ )  $\lambda \sim 2$  и

$$\gamma(\omega) = \frac{8\pi^3 e^2 \omega C L^6}{m \omega_H^{(0)2}} \int_0^\infty x^2 (1+x)^{-4.5} dx \int_0^l \eta^{-4.5} dz \bigg/ \int_0^l \eta^{-1/2} dz$$

или, после вычисления интегралов,

$$\gamma(\omega) \approx \frac{\pi}{20} \frac{\omega_0^2}{\omega_H^{(0)2}} \frac{n_0}{N} P_0 L^6 \omega, \quad (18.2)$$

где константа  $C$  выражена через величину  $n_0 P_0$  ( $C = n_0 P_0 / (2\pi)$ ), где  $n_0$  — число частиц с импульсом  $P > P_0$  в  $1 \text{ см}^3$ ; интенсивность частиц с импульсом больше  $P$  при этом есть  $n_0 P_0 / P$ ).

Спектр  $n(>P) \propto 1/P$  приводит к расходимости плотности энергии при  $P \rightarrow \infty$  и поэтому может реализоваться лишь в ограниченной области энергий. Однако при заданной частоте  $\omega$  величина  $\gamma$  определяется в основном частицами с

$$P \approx P(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_H^{(0)3} L^{-9}}{\omega_0^2}}.$$

Можно показать, что вклад частиц с  $P_\perp^2 > 3P^2(\omega)$  составляет лишь около 10 %. Для применения формулы (18.2) при данном  $\omega$  достаточно предположить, таким образом, что установившийся спектр имеет вид  $n \propto P^{-1}$  в интервале энергий  $\varepsilon$  от  $P(\omega)$  до  $2P(\omega)$ . В случае импульсной инжекции это условие сводится к созданию сверхвысоких потоков частиц в этом интервале энергий.

Приравнявая (18.2) полученному в Приложении  $\delta(\omega)$ , получаем, что граничное значение интенсивности  $cn_0$  есть

$$I_{0 \text{ кр}} = cn_0 \approx \frac{10}{\pi} \sqrt{N_e N} \frac{\nu_0 c}{\kappa a P_0} \frac{\omega_H^{(0)}}{\omega_0^2} L^{-8.5} \left( \frac{L}{L-1} \right)^{3/4}. \quad (18.3)$$

Сравним полученный результат с данными эксперимента. До настоящего времени наиболее полно были исследованы во внутренней зоне потоки электронов

<sup>1)</sup>  $|\Omega| = \omega_H^{(0)} L^{-3} \eta(z)$ ,  $q = \eta^{-1/2}$ ,  $ck = \omega \sqrt{\frac{\omega}{|\Omega|}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\omega}{\omega_H^{(0)}} \frac{L^3}{\eta}}$  и  $\nu = 2$ .

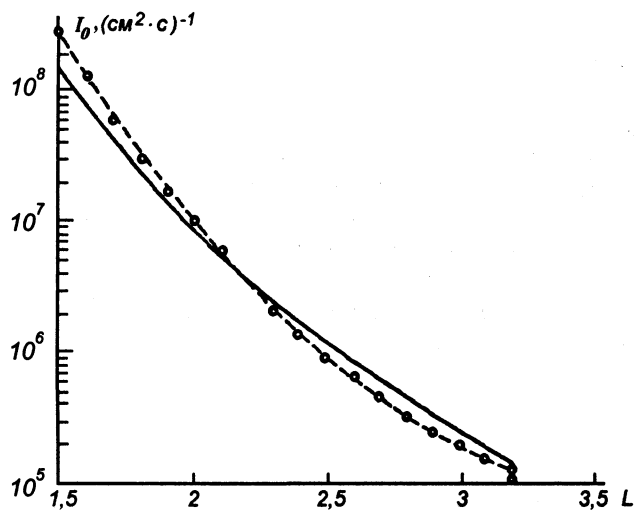


Рис. 36. Критические значения приэкваториальных потоков электронов с энергией  $> 500$  кэВ во внутренней зоне

с энергиями больше 450–500 кэВ [105, 112]. Это значение энергии хорошо согласуется с условиями применимости соотношения (18.3). С одной стороны, электроны с энергией 500 кэВ можно считать ультрарелятивистскими ( $P = 1,73$ , а  $\epsilon = 2$ ). С другой стороны, представляется вероятным, что при инъекции сверхкритическая интенсивность достигалась в достаточно широком интервале энергий свыше 500 кэВ.

На рис. 36 приведены значения потоков электронов в плоскости экватора в направлении, перпендикулярном силовой линии. Интенсивности выражаются в единицах  $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Сплошная кривая рассчитана по (18.3), а пунктирная соответствует экспериментальным данным [105] и [112], полученным в период с января по сентябрь 1963 г. При расчетах мы считали, что  $\nu_0 \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$  (такая величина приводится для высоты 110 км в [149]) и  $\omega_H^0 = 5 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ ,  $N = 10^3 \text{ см}^{-3}$  и  $N_e = 10^4 \text{ см}^{-3}$ . Поскольку эти параметры известны с относительно низкой точностью, не следует придавать особого значения совпадению абсолютных величин рассчитанных и измеренных потоков. Важно отметить, однако, что теория дает правильный порядок величины интенсивности и хорошо описывает ее изменение с  $L$ . Отметим, что в области малых  $L$  при расчетах интеграла  $\int q(z) dz$  заведомо неприменимо при-

ближение  $N = \text{const} \approx 10^3$ . Однако, поскольку такой интеграл входит в знаменатели как декремента, так и инкремента, при определении  $n$  они сокращаются.

Рассмотрим теперь более детально спектр электронов во внутренней зоне. Как уже отмечалось, в настоящее время, наряду с естественной радиацией, в данной области содержатся остатки искусственных радиационных поясов. Кроме того, сюда непрерывно поступают электроны от распада нейтронов альbedo космических лучей. О других источниках электронов в этом районе пока никаких сведений нет. Мощность источника электронов от нейтронного распада вблизи плоскости экватора имеет вид  $Q = Q_0(L^{-2} - L^{-3})$ , где  $Q_0 \approx 10^{-11} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$  [131]. Критическая



интенсивность, согласно (18.3), есть  $I_{0\text{кр}} \approx S_0 \frac{P_0}{P} L^{-9}$ , где  $S_0 \approx 5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Оценим интенсивность, которая накопилась бы за счет нейтронного распада за время ионизационных потерь, приняв для простоты, что средняя энергия таких электронов равна 300 кэВ. При плотности холодных электронов  $N = 10^3 \text{ см}^{-3}$  время жизни равно  $2 \cdot 10^8 \text{ с}$ , и вблизи плоскости экватора накапливается  $2 \cdot 10^{-3} (L^{-2} - L^{-3}) \text{ электрон} \cdot \text{см}^{-3}$ , что соответствует интенсивности  $5 \cdot 10^7 (L^{-2} - L^{-3}) \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Сравнивая эту величину с критической интенсивностью, мы видим, что существует некоторое граничное значение  $L = L_{\text{кр}}$ , близкое к 2, такое, что при  $L < L_{\text{кр}}$  нейтронный механизм недостаточен для создания критических потоков, а при  $L > L_{\text{кр}}$  распад нейтронов, наоборот, переполняет пояс.

Отсюда следует, что при  $L < L_{\text{кр}}$  неустойчивость отсутствует, и гибель электронов обусловлена либо ионизационными потерями, либо рассеянием на свистящих атмосфериках. В этом районе времена жизни велики, и поэтому здесь будут долго сохраняться остатки пояса, возникшего после взрыва «Морская звезда».

Спектр электронов искусственного происхождения очень жесткий (со средней энергией 1 МэВ). Нейтронный распад вносит лишь небольшой вклад в суммарную интенсивность.

При  $L > L_{\text{кр}}$  картина существенно меняется, так как постоянно существует неустойчивость, сбрасывающая излишек электронов нейтронного распада в ионосферу. Время жизни таких электронов, как легко видеть, будет порядка

$$\tau = \frac{I_{0\text{кр}}}{cQ} = \frac{S_0}{cQ_0} (L^{-6} - L^{-7}) \text{ с} \approx 2 \cdot 10^{10} (L^{-6} - L^{-7}) \text{ с}$$

и при  $L = 3$  убывает до величины  $\sim 10^7 \text{ с}$ . Отметим, что эти оценки чувствительны к величине  $Q_0$ . Возможно, что истинное значение  $\tau$  еще в несколько раз меньше.

Важной особенностью рассеяния частиц на волнах в неоднородном магнитном поле является изменение условий резонанса вдоль силовой линии. Как было показано выше, неустойчивость наиболее легко развивается вблизи экваториальной плоскости. По мере распространения волн к Земле уменьшается волновой вектор  $k$ , растет циклотронная частота и в резонанс с волной попадают все более энергичные частицы. Поэтому неустойчивость, возбуждаемая электронами нейтронного распада, будет вымывать электроны более высоких энергий.

Поскольку по мере приближения к Земле амплитуда магнитного возмущения растет, характерное время рассеяния  $\tau_s$  очень слабо зависит от импульса частицы. Оценки, основанные на численных расчетах среднеквадратичного изменения продольной составляющей импульса за одно колебание по силовой линии, показывают, что  $\tau_s$  растет пропорционально  $\sqrt{P}$  и, возможно, даже медленнее.

Поэтому в области  $L > L_{\text{кр}}$  остатки искусственного пояса должны исчезнуть значительно быстрее, чем при  $L < L_{\text{кр}}$ . Спустя несколько лет после 1962 г. спектр электронов в данном районе будет состоять из двух существенно различных компонент. Стационарная компонента, обусловленная распадом нейтронов, обрезана на энергии  $\sim 800 \text{ кэВ}$ . Вторая, медленно рассасывающаяся жесткая компонента — остатки искусственного пояса.

В настоящее время эти полукачественные выводы получили частичное подтверждение. Так, в работе [150] описаны детальные измерения спектров электронов на высотах до 3800 км в августе 1964 г. На  $L < 1,7$  было зафиксировано абсолютное

преобладание жесткой компоненты (остатков искусственного пояса). В области  $L$  от 1,7 до 2,2 отчетливо видны две компоненты — нейтронная и жесткая — с характерным изломом спектра при энергии 800 кэВ. Спектры [150] при  $L = 1,5$  и 2,2 приведены на рис. 37.

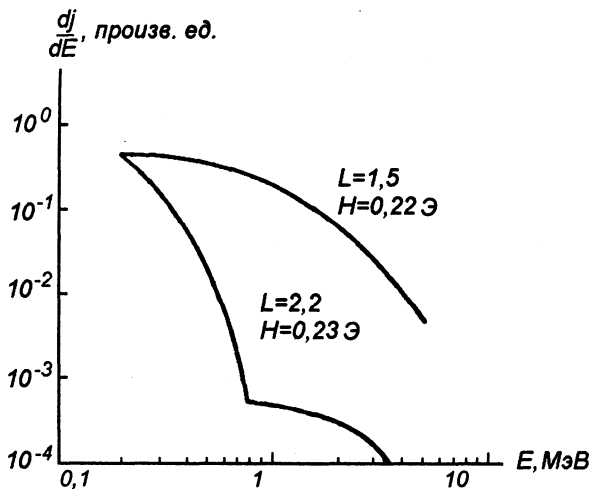


Рис. 37. Дифференциальные спектры электронов на малых высотах во внутреннем поясе

Представляет большой интерес провести аналогичные измерения вблизи плоскости экватора, где все основные закономерности структуры поясов проявляются наиболее четко. Исходя из таких данных можно выяснить динамику сброса электронов во внутренней зоне, а также уточнить мощность инжекции электронов от нейтронного распада.

Оценим теперь амплитуды волн, необходимые для рассеяния электронов с энергией  $\sim 300 \text{ кэВ}$  за время  $\sim 10^7 \text{ с}$ . Из теории ловушек известно, что время жизни в ловушке равно времени  $\tau_s$ , рассеяния

на угол  $\sim \pi$ , умноженному на логарифм пробочного отношения (40 при  $L = 3$ ). Время рассеяния  $\tau_s$  связано с амплитудой резонансной волны  $h$  простым отношением:

$$\tau_s \approx \frac{1}{\omega_H} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \quad (18.4)$$

( $\omega_H = eH/(mc)$  — циклотронная частота,  $H$  — невозмущенное поле). Полагая  $\tau = \ln 40 \cdot \tau_s = 10^7 \text{ с}$  и подставляя значения  $H$  и  $\omega_H$  при  $L = 3$  в плоскости экватора ( $H \approx 10^{-2} \text{ Э}$ ,  $\omega_H \approx 2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ), получаем  $h \approx 10^{-8} \text{ Э}$ . Следовательно, на оболочках с  $L \approx 3$  вблизи плоскости экватора должны постоянно существовать электромагнитные колебания с частотой порядка 1 кГц (условие резонанса с электронами нейтронного распада) и амплитудой  $\approx 10^{-8} \text{ Э}$ . Источником энергии этих волн являются, в конечном счете, космические лучи.

Хотя точность проведенных расчетов вследствие неопределенности значений ряда параметров не очень велика, все же основные свойства внутренней зоны описываются достаточно четко. В частности, получают объяснение ряд эффектов, связанных с искусственной инжекцией частиц, а также особенности пространственного распределения и спектры электронов.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о границах применимости полученных результатов. При расчетах предполагалось, что частоты много меньше электронных циклотронных частот в вершинах силовых линий, но остаются достаточно большими, и при расчетах диссипации можно пренебречь ионными токами.

Поскольку резонансные частоты электронов с импульсом  $\sim P$  суть

$$\omega = \frac{\omega_H^{(0)}}{L^3} \frac{c^2 k^2}{\omega_0^2} \frac{1}{L^9 P^2}, \quad \text{так как} \quad ck \approx \frac{\omega_H^{(0)}}{L^3 P},$$

условие  $\omega \ll \omega_H = \omega_H^{(0)}/L^3$  эквивалентно неравенству

$$PL_{\max}^3 \gg \frac{\omega_H^{(0)}}{\omega_0} \approx 1,7 \quad (18.5)$$

и при  $P = \sqrt{3}$  справедливо всюду, где можно считать, что  $N = \text{const} \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$  (т.е. при  $L \gtrsim 1,5$ ). Условие (18.4) тем более справедливо для частиц с  $P > \sqrt{3}$ . Второе условие сводится к требованию  $\omega > \Omega_H^{(0)} (m/M)^{1/4}$ . При таких частотах поглощение минимально, а с уменьшением  $\omega$  ниже приведенного значения начинает быстро возрастать джоулева диссипация ионных токов. При  $M = 16$  (ионы  $O^+$ ) нижняя граница частот есть  $\approx 2 \cdot 10^3$  рад/с. Поэтому получаем:

$$L_{\min}^9 P^2 \lesssim 2 \cdot 10^4, \quad (18.6)$$

что справедливо при  $P^2 = 3$  вплоть до  $L \approx 3$ . С ростом  $P$  соответствующая граница сдвигается по направлению к Земле. Последняя оценка показывает, что минимум интенсивности частиц с энергиями  $\sim 500$  кэВ должен находиться при  $L \approx 3$ , что, как известно, соответствует данным эксперимента. Рассмотрению магнитного рассеяния в зазоре между поясами посвящен § 19.

## § 19. Устойчивость внешней электронной зоны. Зазор между поясами

При уменьшении частоты  $\omega$  ниже критического значения  $\Omega_H^{(0)} (M/m)^{1/4}$  поглощение резко возрастает и достигает максимума (почти 100 %) при  $\omega \approx \Omega_H^{(0)} \approx 200$  рад/с. При  $L \gtrsim 2,5$  (где ионная циклотронная частота в вершине силовой линии меньше 200 рад/с) скорость волны определяется уравнением (16.3). Изменение частоты от  $\sim 10^3$  до  $\sim 200$  рад/с сопровождается возрастанием декремента примерно в 1000 раз. Поглощение остается большим ( $\ln(1/R) \sim 1$ ) вплоть до частот  $\sim 1$  рад/с. Зависимость  $\ln(1/R)$  от  $\omega$  в диапазоне частот от 200 до 1 рад/с можно аппроксимировать законом  $\ln(1/R) \approx 4,5 (\omega/\omega_m)^{1/3}$ .

Поскольку резонансная частота  $\omega(P)$ , соответствующая частицам с импульсом  $P$ , изменяется как  $L^{-9}$ , переход от минимума к максимуму поглощения происходит в очень узкой области от  $L_{\min}$  до  $(\sim 10)^{1/9} L_{\min} = 1,3 L_{\min}$ . Так, для частиц с  $P \sim 1$  (энергия  $\approx 200$  кэВ)  $L_{\min} \approx 3$ , и, следовательно, максимум должен лежать при  $L \approx 4,2$  в хорошем согласии с данными эксперимента.

Порядок величины, устойчиво удерживаемой в максимуме интенсивности частиц с импульсами от  $P$  до  $2P$ , составляет  $\approx 100 I_{0\min}(P)$ , где  $I_{0\min}$  — интенсивность в минимуме, определяемая по формулам § 4. (Декремент возрастает примерно в 300 раз с учетом множителя  $L^{-2,5}$ , а коэффициент при инкременте падает в 3 раза.) Эта оценка также хорошо согласуется с экспериментальными данными ( $I_{0\max}(P > 1) \sim 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ).

С точки зрения теории переноса механизм формирования внешней электронной зоны сводится к заполнению области, соответствующей максимуму поглощения волн. На внутренней границе этой области должно наблюдаться сильное рассеяние частиц. По-видимому, этим объясняется практически изотропное угловое распределение, обнаруженное в области  $L \sim 2,5-4$  при исследованиях на спутниках «Электрон-1» и «Электрон-2».

Рассмотрим, наконец, область зазора между внутренним и внешним поясами ( $2,8 \leq L \leq 3,2$ ). В этом районе интенсивность электронов с  $P \sim 1$  минимальна. Согласно [100] потоки электронов с энергиями  $> 230$  кэВ ( $P \approx 1$ ) составляют здесь  $3-5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , а потоки электронов с энергиями  $> 1,6$  МэВ ( $P \approx 4$ ) — примерно  $10^4 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . В работе [105] приводятся более высокие значения интенсивностей:  $\approx 10^5$  при  $P > 1,73$  (энергия 500 кэВ) и  $\approx 10^4$  при энергиях свыше 5 МэВ (последний результат вызывает сомнения, поскольку в [105] не описан принцип, на котором основано обнаружение таких электронов на фоне тормозного излучения; наличие таких интенсивностей пока не было подтверждено).

На спутниках серии «Электрон» при  $L = 2,8$  был обнаружен узкий пик очень жестких электронов с энергиями свыше 6 МэВ. Их интенсивность в максимуме  $\approx 10^3 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Итак, анализ циклотронной неустойчивости радиационных поясов показывает, что

- а) из всех известных плазменных неустойчивостей она развивается наиболее легко;
- б) внешний протонный пояс устойчив, однако в максимуме потоки близки к критическим, и при небольших возмущениях магнитного поля или ионосферы могут возбуждаться волны, соответствующие микропульсациям типа Pc1;
- в) во внутренней зоне и в зазоре стабильный уровень электронных потоков соответствует критическому значению;
- г) переход от внутренней электронной зоны к внешней обусловлен резким возрастанием поглощения возбуждаемых при неустойчивости волн;
- д) в зазоре нейтронный механизм поддерживает незатухающие колебания, резко уменьшающие время жизни электронов высоких ( $\gtrsim 200$  кэВ) энергий.

Отсюда можно сделать общий вывод о том, что циклотронная неустойчивость является основным некулоновским механизмом утечек частиц из поясов и наряду с переносом играет важную роль в формировании зон радиации. Исследование циклотронной неустойчивости, проведенное в [156], также приводит к данному заключению.

## Приложение

### **Декремент затухания волн с $\omega \gtrsim \Omega_H$ в магнитосфере**

Эксперимент показывает, что поглощение волн типа свистящих атмосфериков мало. Поэтому коэффициент отражения можно определить как

$$R = 1 - \frac{\dot{q}}{S_k}, \quad (1)$$

где  $\dot{q}$  — энергия, диссипируемая в столбе сечением  $1 \text{ см}^2$  за 1 с,  $S_k$  — проекция вектора Умова—Пойнтинга на вертикаль. Поскольку ночная граница нижней ионосферы является весьма резкой (электронная концентрация меняется в  $e$  раз на высоте  $\sim 1$  км, что меньше рассматриваемых длин волн), рассмотрим задачу об отражении волны от плоской границы. Плотность нейтральных атомов выше этой границы меняется по закону  $\propto e^{-xz}$ . Так же меняется частота столкновений:  $\nu = \nu_0 e^{-xz}$ . Электронную плотность  $N$  будем считать постоянной. Можно положить также, что  $\nu_0 \ll \omega_H$ .

Поскольку в ионосфере резко возрастает коэффициент преломления, можно ограничиться случаем нормального падения. Учитывая, что под ионосферой показатель преломления резко убывает, можно положить, что при  $z = 0$  обращается в нуль возмущение магнитного поля (точнее, его тангенциальные компоненты). Электрическое поле при этом имеет пучность и изменяется как  $\cos kz$ .

Из уравнений

$$(i\omega + \nu)\mathbf{v} + \omega_H[\mathbf{v}\mathbf{n}] = -\frac{e}{m}\mathbf{E}; \quad (2)$$

$$\mathbf{i}[\mathbf{k}\mathbf{h}] = \frac{4\pi eN}{c}\mathbf{v}; \quad (3)$$

$$[\mathbf{k}\mathbf{E}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{h} \quad (4)$$

( $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль магнитного поля) следует, что

$$\omega = \omega_H \frac{c^2 k^2 \cos \chi}{\omega_0^2}, \quad (5)$$

где  $\chi$  — угол между  $\mathbf{H}$  и вертикалью. Из (3) видно, что

$$(\mathbf{k}\mathbf{v}) = 0.$$

Домножая (2) скалярно на  $mN\mathbf{v}$ , получаем:

$$\text{Re}(j\mathbf{E}) = mNv^2\nu_0.$$

Полагая  $v = v_0 \cos kz$  и считая, что  $\kappa/k \gtrsim 1$ , получаем:

$$\dot{q} = \frac{2\nu_0 m v_0^2 N}{\kappa}. \quad (6)$$

При расчетах вектора  $\mathbf{S}$  пренебрежем в (2) членами с  $\omega$  и  $\nu$ . Выражая  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{h}$  через  $\mathbf{v}$ , имеем:

$$S_k = \frac{c}{4\pi} \frac{(\mathbf{k}[\mathbf{E}\mathbf{H}])}{k} = \frac{m^2 c^2 \omega_H^2 (kn)^2}{4\pi e^2 \omega k} v^2$$

и

$$R = 1 - \frac{2\omega_0^2 \nu_0 \omega}{c^2 \kappa \omega_H^2 \cos^2 \chi}. \quad (7)$$

Полагая  $\omega_H = \omega_H^{(0)} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$ , где  $\omega_H^{(0)}$  — частота у экватора Земли,  $\theta$  — полярный угол, и учитывая, что

$$ck = \omega_0 \sqrt{\frac{\omega}{\omega_H \cos \chi}}, \quad \cos \chi = \frac{H_r}{H} \quad \text{и} \quad L \sin^2 \theta = 1,$$

после несложных преобразований получаем:

$$R = 1 - \frac{\omega_0 \nu_0 \sqrt{\omega \omega_H^{(0)}}}{\sqrt{2} c \kappa \omega_H^{(0)^2} \cos^{3/2} \theta}. \quad (8)$$

Групповая скорость волны с частотой  $\omega$  на больших высотах есть

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{2c \sqrt{\omega \omega_H^{(0)}}}{\omega_0} L^{-3/2} \sqrt{\eta}$$

и

$$T = 2 \int_0^l \frac{dz}{u_g} \approx 0,6 \frac{a L^{2,5}}{c} \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega \omega_H^{(0)}}}.$$

Отсюда декремент при  $1 - R \ll 1$  есть

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1/R)}{T} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N_e}{N}} \frac{\nu_0}{\kappa a} \frac{\omega}{\omega_H^{(0)}} L^{-2,5} \left( \frac{L}{L-1} \right)^{3/4}.$$

Из (8) следует, что при  $\omega \sim 10^5$  амплитуда волны затухает в  $e$  раз примерно за 10 отражений. Этот результат хорошо согласуется с данными наблюдений за атмосфериками (иногда наблюдается свыше 40 отражений при ослаблении сигнала на два порядка [145]).

## Заключение

Проведенное исследование показывает, что динамика потоков частиц с энергиями свыше 100 кэВ в зоне захваченной радиации в значительной степени определяется двумя физическими процессами — переносом частиц поперек дрейфовых оболочек под действием внезапных импульсов и циклотронной неустойчивостью радиационных поясов.

Из эксперимента известно, что

- а) на внешних краях протонного и электронного поясов средняя энергия частиц изменяется с  $L$  в соответствии с законом адиабатической инвариантности магнитного момента ( $\bar{P} \propto L^{-3/2}$ );
- б) характерное время переноса частиц на оболочку с параметром  $L$  пропорционально  $L^{-8}$ ;
- в) численное значение коэффициента диффузии  $D_0$ , определяемое по самым различным данным, получается одним и тем же ( $D_0 \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ ).

Отсюда можно чисто эмпирическим путем построить уравнение переноса, которое должно (с точностью до численного коэффициента при члене, описывающем регулярный поток) совпасть с выведенным нами (§§ 9–10) уравнением. Если, кроме того, оценить величину регулярного потока по концентрации энергичных протонов при  $L = 1,5$ , то уравнение может быть построено практически однозначно.

Строго говоря, отсюда следует, что перенос обусловлен нестационарными асимметричными по долготе электрическими полями, амплитуда которых пропорциональна  $L^2$  (поскольку скорость переноса пропорциональна  $L^9$ ), а частотный спектр имеет широкое плато в области периодов от 0,5 мин до нескольких часов (так как скорость переноса в этих пределах не зависит от периода дрейфа). Более конкретную информацию о природе электрических полей из уравнения переноса получить невозможно.

Экспериментальные данные о геомагнитных возмущениях позволяют утверждать, что одной из основных причин генерации таких полей являются внезапные импульсы, поскольку временные характеристики полей импульсов и численная величина скорости переноса соответствуют вытекающим из динамики поясов значениям. Лишь при очень малых дрейфовых периодах  $\tau_\varphi$  ( $\lesssim 1$  мин) начинают играть роль собственные колебания магнитосферы, причем по крайней мере вплоть до  $\tau_\varphi = 0,5$  мин значение  $D_0$  остается тем же, что и при больших  $\tau_\varphi$ .

В зависимости от характера экспериментальных данных мы можем найти величину  $D_0$ , усредненную по самым различным временным интервалам. Так, данные о диффузионных волнах релятивистских электронов дают значение  $D_0$  в период низкой магнитной активности за время от нескольких суток до одного месяца. Данные о стационарном протонном поясе позволяют найти величину, усредненную за время от 100 дней (при  $L \approx 3,5$ ) до 100 лет (при  $L \approx 1,5$ ).

Весьма примечательно, что все значения  $D_0$ , полученные таким образом, совпадают с точностью до множителя  $\lesssim 2$ . Это означает, что основную роль в переносе

играют относительно слабые, но зато весьма частые возмущения спокойного солнечного ветра.

Во время магнитных бурь наблюдаются кратковременные возрастания  $D_0$  (иногда в десятки раз). Однако при усреднении по времени вклад таких «вспышек»  $D_0$  при бурях оказывается малым в сравнении с суммарным эффектом многих слабых импульсов. Таким образом, основным ускорительным механизмом, создающим радиационные пояса Земли, является сравнительно простой и стабильный процесс переноса частиц под действием внезапных импульсов.

Протонный пояс формируется за счет переноса и ионизационных потерь. В пользу данного вывода достаточно убедительно свидетельствует тот факт, что по спектру протонов в интервале энергий от 100 кэВ до 1 МэВ в одной точке удалось правильно предсказать распределение протонов вплоть до энергий в десятки МэВ во всей области захваченной радиации. Кроме того, протонный пояс оказывается устойчивым относительно различных типов нестабильностей.

Доказательства диффузионной природы внешней электронной зоны, хотя и не являются столь же исчерпывающими, все же представляются достаточно убедительными. Во-первых, изменение средней энергии электронов с  $L$  на внешнем краю пояса также определяется бетатронным соотношением. Во-вторых, наблюдаемые у границы потоки электронов с энергиями в десятки кэВ достаточны для заполнения внешней зоны за счет переноса. Наконец, нестационарные процессы во внешней зоне (диффузионные волны релятивистских электронов) подчиняются соотношениям, вытекающим из теории переноса.

Поскольку максимум внешнего электронного пояса расположен на сравнительно удаленных оболочках, он значительно более чувствителен к флуктуациям мощности источников и величины  $D_0$ , чем протонные пики, и испытывает случайные вариации. Этот факт, однако, несколько не противоречит концепции переноса.

Максимум внешней электронной зоны расположен при большом  $L$  ( $\approx 4,5$ ). Следовательно, утечки имеют некулоновскую природу и гибель электронов происходит значительно быстрее. Известно, что амплитуды волн, эффективных с точки зрения рассеяния электронов, невелики. Кроме того, в случае импульсной инжекции электронов в область пониженной интенсивности, как правило, наблюдается быстрый спад до некоторого уровня, остающегося затем стабильным в течение длительного времени. Эти обстоятельства характерны для утечек вследствие неустойчивости: малость амплитуды компенсируется резонансным взаимодействием волн с частицами, а стабильный уровень соответствует границе устойчивости.

Общие соображения о различных механизмах плазменной неустойчивости показывают, что наиболее опасным типом нестабильности в случае электронной зоны является раскачка ультранизкочастотных волн за счет анизотропии углового распределения скоростей электронов.

Границе устойчивости соответствует уровень интенсивности, при котором инкремент неустойчивости равен декременту затухания волн при прохождении ионосферы.

Расчет показывает, что распределение интенсивности электронов, соответствующее границе устойчивости, практически совпадает с наблюдаемой структурой электронных поясов. Зазор между поясами соответствует при этом области минимального поглощения волн, раскачиваемых электронами с энергиями в несколько сотен кэВ.



При  $2 \leq L \leq 3,5$  зазор заполняется электронами от нейтронного распада. При  $L < 2$  нейтронный механизм недостаточен для создания критической интенсивности. Наблюдаемые в этом районе электроны являются остатками искусственных радиационных поясов.

Таким образом, учет циклотронной неустойчивости позволяет дать полную интерпретацию электронных поясов (по крайней мере для энергий свыше 100 кэВ).

На основе развитой теории поясов удастся, кроме того, получить ряд результатов, представляющих интерес для других геофизических задач. Так, анализ структуры протонного пояса приводит к заключению, что средняя плотность холодной плазмы на магнитных оболочках с  $1,5 \leq L \leq 3,5$  на высотах  $> 3000$  км от поверхности Земли порядка  $10^3 \text{ см}^{-3}$  и изменяется от  $L = 1,5$  до  $L = 3,5$  не более чем в 2 раза.

Исследование устойчивости протонного пояса позволяет выдвинуть весьма вероятное предположение о природе своеобразных почти монохроматических пульсаций геомагнитного поля — так называемых «жемчужин». Основные характеристики «жемчужин», вытекающие из теории, хорошо соответствуют данным наблюдений.

Подавляющее большинство экспериментальных данных о радиационных поясах хорошо согласуется с развитой теорией, и поэтому можно утверждать, что природа физических процессов, приводящих к формированию радиационных поясов, в принципе выяснена.

Вместе с тем имеется ряд вопросов, для выяснения которых необходимы дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования.

Наиболее важной проблемой являются структура и динамика нейтрального слоя и связанного с ним самого внешнего пояса радиации. Ясно, что именно в этом районе происходит наиболее эффективный сброс быстрых частиц в ионосферу, приводящий к появлению полярных сияний, полярных токовых систем и к разогреву верхней атмосферы. Токи, текущие в этой области, дают существенный вклад в мировую составляющую геомагнитных возмущений. Наконец, самый внешний пояс является источником частиц, из которых за счет переноса формируются более близкие к Земле зоны повышенной радиации.

Большой интерес для теории магнитных бурь и полярных сияний представляет исследование переноса частиц с энергиями 1–10 кэВ под действием электрических полей, порождаемых ветрами в ионосфере.

Одной из важнейших задач теории радиационных поясов являются изучение динамики сброса электронов на основе квазилинейного приближения и теоретический расчет времени жизни. Эта задача может быть решена лишь с помощью современной вычислительной техники. В частности, представляет большой интерес выяснить причину быстрого исчезновения релятивистских электронов из внешней зоны во время магнитных бурь.

Пока неясно, связан этот эффект с ускоренным переносом или же с рассеянием. Укажем в связи с этим, что необходимо более детальное изучение динамики релятивистских электронов при высотных экспериментах.

Для изучения динамики сброса следует провести более тщательные исследования электрических и магнитных полей в магнитосфере в диапазоне частот от 100 Гц до нескольких десятков МГц.

Решение этих задач позволит окончательно выяснить механизм воздействия корпускулярного излучения Солнца на Землю.

## Литература

1. Kellog P. J. Nature **183**, 1295 (1959).
2. Parker E. J. Geophys. Res. **65**, 3117 (1960).
3. Herlofson N. Phys. Rev. Letters **5**, 414 (1960).
4. Davis L., Chang D. B. J. Geophys. Res. **67**, 2169 (1962).
5. Тверской Б. А. Изв. АН СССР, сер. физ. **28**, 2026 (1964).
6. Тверской Б. А. Изв. АН СССР, сер. физ. **28**, 2029 (1964).
7. Tverskoy B. A. Proc. of 8th Intern. Cosmic Ray Conf., Jihpur, **78** (1963).
8. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 224 (1964).
9. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 436 (1964).
10. Tverskoy B. A. Space Research **4**, 367 (1965).
11. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **5**, 793 (1965).
12. Тверской Б. А. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 314.
13. Dungey J. W., Hess W. N., Nakada M. P. J. Geophys. Res. **70**, 3525 (1965).
14. Falthammer C. G. J. Geophys. Res. **70**, 2503 (1965).
15. Nakada M. P., Mead G. D. J. Geophys. Res. **70**, 4777 (1965).
16. Цытович В. Н. Геомагнетизм и аэрономия. **3**, 616 (1963).
17. Трахтенгерц В. Ю. Геомагнетизм и аэрономия. **3**, 816 (1963).
18. Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю. Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 233 (1964).
19. Tverskoy B. A. Proc. of 9th Intern. Cosmic Ray Conf., London, **367** (1965).
20. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **7**, 2, 226 (1967).
21. Gardner C., Goertzel H., Grad H., Moravets C., Rose M., Rubin H. Geneva Conf. on Atomic Energy, Paper № 374 (1958) (рус. пер.: Доклады иностранных ученых на Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии. М.: ИЛ, 1960).
22. Сагдеев Р. З. Сб. Вопросы теории плазмы. **4**. М.: Атомиздат, 1964. 20.
23. Тверской Б. А. ЖЭТФ. **46**, 1653 (1964).
24. Ness N. F., Searce C. S., Seek J. B. J. Geophys. Res. **69**, 3531 (1964).
25. Ness N. F. J. Geophys. Res. **70**, 2989 (1965).
26. Долгинов Ш. Ш., Ерошенко Е. Г., Жузов Л. Н. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 342.
27. Nishida A., Cahill L. J. J. Geophys. Res. **69**, 2243 (1964).
28. Cahill L. J. Space Research **6**, 96 (1966).
29. Жигулев В. Н., Ромишевский Е. А. ДАН СССР. **127**, 100 (1959).
30. Kellog P. J. J. Geophys. Res. **67**, 3805 (1962).
31. Mead G. D. J. Geophys. Res. **69**, 1181 (1964).
32. Mead G. D., Beard D. B. J. Geophys. Res. **69**, 1169 (1964).
33. Wolfe J. H., Silva R. W., Myers M. A. Space Research **6**, 124 (1966).
34. Spreiter J. R., Jones W. P. J. Geophys. Res. **68**, 3555 (1963).
35. Spreiter J. R., Briggs B. R. J. Geophys. Res. **67**, 37 (1962).
36. Grad H. Phys. of Fluids **4**, 1366 (1961).
37. Сузов Ю. С., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **3**, 43 (1963).
38. Piddington J. H. J. Geophys. Res. **65**, 93 (1960).

39. *Axford W. I., Hines C. O.* Canad. J. Phys. **39**, 1322 (1961).
40. *Axford W. I., Petschek H. E., Siscoe G. L.* J. Geophys. Res. **70**, 1231 (1965).
41. *Паркер Е.* Динамические процессы в межпланетной среде. М.: Мир, 1965.
42. *Плетнев В. Д., Скуридин Г. А., Шалимов В. П., Швачунов И. И.* Космические исследования. **3**, 2 (1965).
43. *Плетнев В. Д., Скуридин Г. А., Шалимов В. П., Швачунов И. И.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 283.
44. *Pletnev V. D., Scuridin G. A., Shalimov V. P., Shvachunov I. I.* Space Research **6**, 188 (1966).
45. *N. Kawashima, N. Fukushima* Planet. Space Sci. **12**, 1187 (1964).
46. *Kawashima N., Mori S.* Phys. of Fluids **8**, 378 (1965).
47. *Bostic W. H., Butfield H., Brettschneider M. J.* Geophys. Res. **68**, 5315 (1963).
48. *Alfven H., Danielson L., Falthammar C. G., Zindberg L.* On the penetration of interplanetary plasma into the magnetosphere. Preprint. Catholic USA University (1963).
49. *Хорошева О. В.* Диссертация. М.: НИИЯФ МГУ, 1965.
50. *Williams D. J., Mead G. D.* J. Geophys. Res. **70**, 3017 (1965).
51. *Akasofu S. J., Cain J. C., Chapman S. J.* Geophys. Res. **66**, 4013 (1961).
52. *Hoffman R. A., Bracken P. A.* J. Geophys. Res. **70**, 3555 (1965).
53. *Ерошенко Е. Г.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 356.
54. *Chapman S., Ferraro V. C. A.* Nature **126**, 129 (1930).
55. *Яновский Б. М.* Земной магнетизм. М.: Физматлит, 1964.
56. *Чепмен С.* Солнечная плазма, геомагнетизм и полярные сияния // Геофизика. Околоземное космическое пространство. М.: Мир, 1964. 36.
57. *Красовский В. И.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 11.
58. *Кадомыц Б. Б.* Вопросы теории плазмы **2**. М.: Атомиздат, 1963. 132.
59. *Кадомыц Б. Б., Рокотян В. Е.* ДАН СССР. **133**, 68 (1960).
60. *Bauer S. J., Bluml L. J., Donley J. L., Fitzenreiter R. J., Jackson J. E., J.* Geophys. Res. **69**, 186 (1964).
61. *Истомин В. Г.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 192.
62. *Taylor H. A., Brace L. H., Brinton H. C., Smith C. R. J.* Geophys. Res. **68**, 5339 (1963).
63. *Безруких В. В., Грингауз К. И.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 177.
64. *Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Т., Митянов Н. А., Рапопорт В. О., Сазонов Ю. А., Тарасов А. Ф.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 581.
65. *Bowles K. L.* Science **139**, 389 (1963).
66. *Carpenter D. L. J.* Geophys. Res. **68**, 1675 (1963).
67. *Гульельм А. В.* Геомагнетизм и аэрономия. **6**, 135 (1966).
68. *Serbu G. P.* Space Research **5**, 564 (1965).
69. *Троицкая В. А., Большакова О. В., Матвеева Э. Т.* Геомагнетизм и аэрономия. **6**, 533 (1966).
70. *Troitiskaya V. A.* Transactions of the XI General Assembly IUGG Meeting, Toronto, 1957 392 (1960).
71. *Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Горчаков Е. В., Логачев Ю. И., Николаев А. Г., Рубинштейн И. А., Сосновец Э. Н., Терновская М. В.,* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 433.
72. *Вернов С. Н., Чудаков А. Е.* УФН. **70**, 585 (1960).
73. *Heliwell R. A., Gehrels E.* Proc. IRE **46**, 785 (1958).
74. *Cain J. C., Shapiro L. R., Stolaric J. D., Heppner J. P. J.* Geophys. Res. **66**, 2677 (1961).
75. *Gurnett D. A., B. J. O'Brien J.* Geophys. Res. **69**, 65 (1964).

76. Scarf F. L., Crook G. M., Frederics R. W. J. Geophys. Res. **70**, 3045 (1965).
77. Lew J. S. J. Geophys. Res. **68**, 2681 (1961).
78. Ван-Аллен Дж. Сб. Радиационные пояса Земли. (М.: ИЛ, 1963), 13.
79. McIlwain C. J. Geophys. Res. **66**, 3681 (1961).
80. Nortrop T. G., Teller E. Phys. Rev. **117**, 215 (1960).
81. Антонова А. Е., Еришковиц А. И., Шабанский В. П. Исследования космического пространства М.: Наука, 1966. 326.
82. Крымов Ю. С., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 397 (1964).
83. Кадомцев Б. Б. Вопросы теории плазмы **4**. М.: Атомиздат, 1964. 188.
84. O'Brien B. J. J. Geophys. Res. **68**, 989 (1963).
85. Maehlum B., O'Brien B. J. J. Geophys. Res. **68**, 997 (1963).
86. Frank L. A., Van Allen J. A., Macagno E. J. Geophys. Res. **68**, 3543 (1963).
87. Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Горчаков Е. В., Кузнецов С. Н., Логачев Ю. И., Николаев А. Г., Сосновец Э. Н., Рубинштейн И. А., Столповский В. Г., Эльтеков В. А., Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 394.
88. Кузнецов С. Н., Сосновец Э. Н., Столповский В. Г. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 420.
89. Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Кузнецов С. Н., Логачев Ю. И., Сосновец Э. Н., Столповский В. Г., Исследования космического пространства М.: Наука, 1965. 425.
90. Fritz T. A., Gurnett D. A. J. Geophys. Res. **70**, 2485 (1965).
91. Frank L. A. J. Geophys. Res. **70**, 1593 (1965).
92. Вернов С. Н., Мельников В. В., Савенко И. А., Савин Б. И., Первая Т. И. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 381.
93. Безруких В. В., Грингауз К. И., Озеров В. Д., Рыбчинский Р. Е. ДАН СССР. **131**, 1301 (1960).
94. McIlwain C. E. Space Research **1**, 715 (1960).
95. McDiarmid J. B., Rose D. C., Budsinsky E., Canad. J. Phys. **39**, 1888 (1961).
96. Грингауз К. И., Хохлов М. З. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 467.
97. Savin B. I. Proc. of 9th Intern. Cosmic Ray Conf., London, 252 (1965).
98. Hones J. J. Geophys. Res. **68**, 1209 (1963).
99. Davis L. R., Williamson J. M. Space Research **3**, 365 (1963).
100. Van Allen J. A., Frank L. A., Hills H. K. J. Geophys. Res. **69**, 2171 (1964).
101. Vernov S. N., Gorchakov E. V., Kuznetsov S. N., Logachev Yu. I., Sosnovets E. N., Tverskoy B. A., Chudakov A. E. Proc. of 9th Intern. Cosmic Ray Conf., London, 184 (1965).
102. Болюнова А. Д., Вайсберг О. Л., Гальперин Ю. И., Потапов Б. П., Темный В. В., Шуйская Ф. К., Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 406.
103. McIlwain C. E., Fillius R. W., Phys. Rev. Letters, **35**, 285 (1964).
104. Fillius R. W. J. Geophys. Res. **71**, 97 (1966).
105. McIlwain C. E. Science **142**, 355 (1963).
106. Freden S. C., Blake J. B., Paulikas G. A. J. Geophys. Res. **70**, 3113 (1965).
107. Вернов С. Н., Савенко И. А., Тельцов М. В., Шаврин П. И. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 460.
108. Davis L. R., Hoffman R. A., Williamson J. M. J. Geophys. Res. **67** (13) (1962).
109. Frank L. A. J. Geophys. Res. **70**, 3533 (1965).
110. McDiarmid B., Burrows J. R., Rose D. C., Wilson M. D. Space Research **4**, 606 (1964).
111. McIlwain C. E. Space Research **4**, 385 (1965).

112. *McIlwain C. E., Fillius R. W., Valerio J., Dave A.* Report of Department of Physics University of California (preprint), 1964.
113. *Шабанский В. П.* Геомагнетизм и аэрономия. 5, 969 (1965).
114. *Десслер А. Дж., Брайн Б. Дж.* Сб. Околоземное космическое пространство, справочные данные М.: Мир, 1966, 58.
115. *Freeman J. J.* Geophys. Res. 69, 1691 (1964).
116. *Frank L. A., Van Allen J. A. J.* Geophys. Res. 69, 3155 (1964).
117. *Frank L. A. J.* Geophys. Res. 70, 4131 (1965).
118. *Вернов С. Н., Савенко И. А., Тверская Л. В., Шаврин П. И.* Геомагнетизм и аэрономия. 3, 812 (1963).
119. *Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Горчаков Е. В., Игнатьев П. П., Кузнецов С. Н., Логачев Ю. И., Любимов Г. П., Николаев А. Г., Охлопков В. П., Сосновец Э. Н., Терновская М. В., Изв. АН СССР, сер. физ. 28, 2058 (1964).*
120. *Темный В. В.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 209.
121. *Williams D. J., Smith A. M. J.* Geophys. Res. 70, 541 (1965).
122. *Paulikas G. A., Freden S. C. J.* Geophys. Res. 69, 1239 (1964).
123. *Williams D. J., Palmer W. F. J.* Geophys. Res. 70, 557 (1965).
124. *O'Brien B. J. J.* Geophys. Res. 67, 3687 (1962).
125. *O'Brien B. J., Taylor H. J.* Geophys. Res. 69, 45 (1964).
126. *Winkler J. R., Bhavsar P. D., Anderson K. A. J.* Geophys. Res. 67, 3717 (1962).
127. *Brown R. R., Barkus J. R., Parsons N. R. J.* Geophys. Res. 70, 2599 (1965).
128. *Вернов С. Н.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 277.
129. *Тверской Б. А.* Геомагнетизм и аэрономия. 6, 585 (1966).
130. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
131. *Hess W. H., Canfield E., Lingenfelter R. J.* Geophys. Res. 66, 666 (1961).
132. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. 2. М.: Физматгиз, 1963. Изд. 3. М.: УРСС, 2002.
133. *Vernov S. N., Kuznetsov S. N., Logachev Yu. I.* Space Research 6, 112, 1966.
134. *Вернов С. Н., Савенко И. А., Тельцов М. В., Шаврин П. И.* Геомагнетизм и аэрономия. 6, 377 (1966).
135. *Савенко И. А., Тельцов М. В., Шаврин П. И.* Геомагнетизм и аэрономия. 6, 661 (1966).
136. *Михайловский А. В.* Вопросы теории плазмы. 3. М.: Атомиздат, 1963. 41.
137. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* УФН 73, 701 (1961).
138. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.* Коллективные колебания в плазме. М.: Атомиздат, 1964.
139. *Chang D. B., Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N. J.* Geophys. Res. 70, 3085 (1965).
140. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* Ядерный синтез 1, 82 (1961).
141. *Веденов А. А.* Вопросы теории плазмы 3. М.: Атомиздат, 1963. 203.
142. *Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д.* ЖЭТФ. 12, 130 (1961).
143. *Seidl M., Sunka P.* Phys. Rev. Letters 11, 31 (1964).
144. *Post R. F., Perkins W. A.* Phys. Rev. Letters 6, 85 (1961).
145. *Галле Г.* Сб. Геофизика. М.: Мир, 1964. 431.
146. *Шафранов В. Д., Сб.* Вопросы теории плазмы 3. М.: Атомиздат, 1963. 3.
147. *Francis W., Carplus R. J.* Geophys. Res. 66, 3593 (1961).
148. *Gendrin R.* Annales de Geophysique 19, 129 (1963).
149. *Николе М.* Аэрономия. М.: Мир, 1964.

150. *Mihalov J. D., White R. S.* J. Geophys. Res. **71**, 2217 (1966).
151. *Serlemitsos P. J.* J. Geophys. Res. **71**, 61 (1966).
152. *Anderson K. A., Ness N. F.* J. Geophys. Res. **71**, 3705 (1966).
153. *McIlwain C. E.* Trans. Amer. Geophys. Union **47**, 131 (1966).
154. *Browton W. L., Roberts C. S.* Trans. Amer. Geophys. Union **47**, 135 (1966).
155. *Вернов С. Н., Кузнецов С. Н., Логачев Ю. И., Сосновец Э. Н.* Геомагнетизм и аэрономия. **7**, 88 (1967).
156. *Kennel C. E., Petchek H. B.* J. Geophys. Res. **71**, 1 (1966).



**Бабушка и дедушка С. М. и В. И. Феоктистовы,  
в семье которых вместе с их детьми выросли  
трое малолетних сыновей от первого брака  
бабушки с Н. Н. Тверским (1914 г.)**



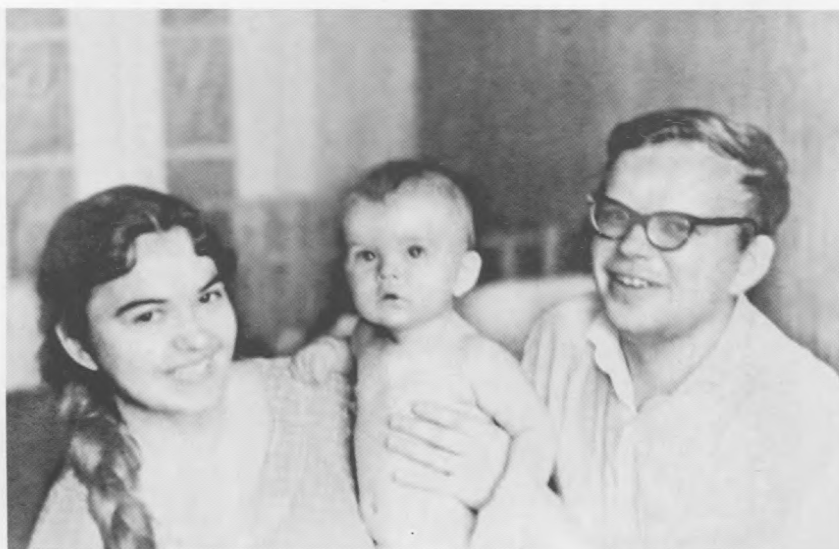
**Прабабушка по материнской  
линии М. С. Малишевская  
(1882 г.)**



**Боре 1,5 года**

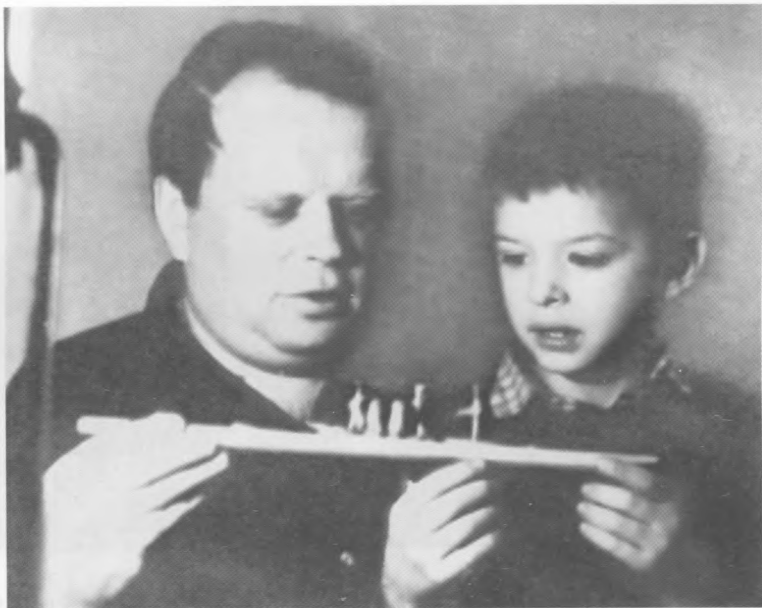


**С родителями после окончания средней школы  
в г. Новосибирске (1952 г.)**



**С женой Людмилой и первенцем Василием (1962 г.)**





**С младшим сыном Михаилом (1972 г.)**



**Бабушка и дедушка Л. В. и Б. А. Тверские с внуком  
Викентием и любимцем всей семьи котом Кузей  
(1989 г.)**



Пора сдавать пустые бутылки.  
Б. Тверской (сидит)  
и В. Демидов



Ночной преферанс.  
На лацкане пиджака значок  
«200 лет МГУ»



«Барышня и хулиган».  
Барышня — Неизвестная,  
Хулиган — Б. Тверской



Знатоки поэзии Серебряного  
века Б. Тверской (лежит)  
и В. Федянин за чтением  
стихов В. Хлебникова

**В студенческом  
общезитии**



**«Мозговой штурм» в кабинете С. Н. Вернова.  
Докладывает Ю. И. Логачев. Сидят (слева направо):  
Н. Н. Контор, Б. А. Тверской, А. Е. Чудаков,  
С. Н. Вернов, Е. В. Горчаков (60-е гг.)**



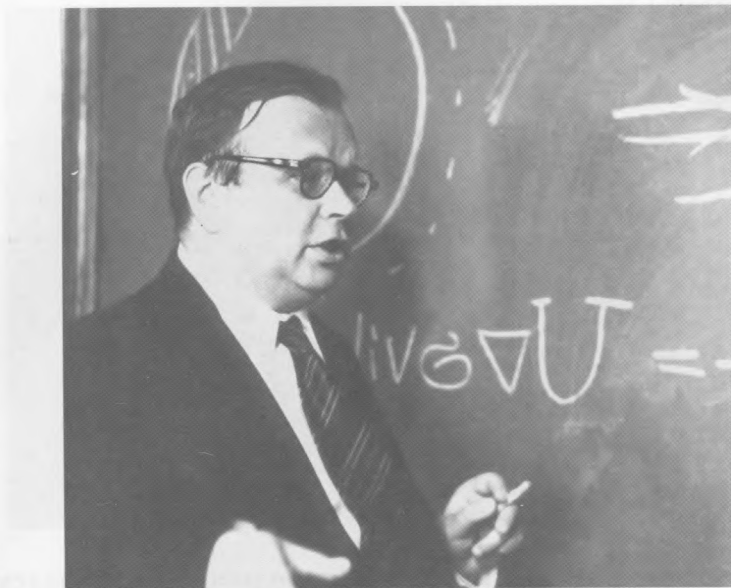
**В перерыве «мозгового штурма» в кабинете С. Н. Вернова.  
Слева направо: Б. А. Тверской, Н. В. Переслегина,  
С. Н. Вернов (60-е гг.)**



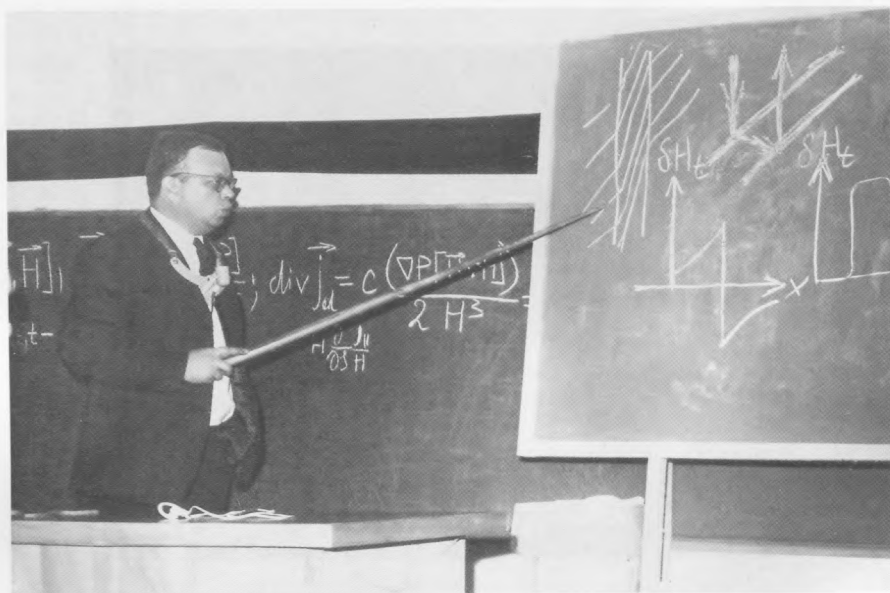
**В дискуссии с А. Е. Чудаковым (1965 г.)**



**Семинар отдела теоретической и прикладной космофизики  
(рук. Б. А. Тверской). Докладывает М. Ф. Бахарева (1973 г.)**



**Выступление на научном семинаре С. Н. Вернова (1972 г.)**



**Выступление с заказным докладом на Симпозиуме МАГА  
(Международная ассоциация геомагнетизма и аэронауки).  
Москва, 1971 г.**



**На банкете после окончания Международного ленинградского семинара по солнечно-земной физике (Ленинград, 1978 г.).**

**Сидят (слева направо): Б. А. Тверской, Л. В. Тверская, В. П. Шабанский. Стоят (слева направо): Г. Е. Кочаров, И. М. Подгорный, В. С. Бассоло**



**В окружении учеников и сотрудников отдела на праздновании 60-летнего юбилея (1996 г.).**

**Стоят (слева направо): П. П. Игнатьев, А. С. Ковтюх, Е. В. Горчаков, М. Ф. Бахарева, М. В. Терновская, Л. М. Алексеева, И. В. Гецелев, А. В. Гетлинг. Сидят: Л. В. Тверская и Б. А. Тверской**

**ЧАСТЬ II**

**СТАТЬИ**

---

## Глава I

### **Радиационные пояса Земли**

#### **ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ ЗЕМЛИ\***

##### **Аннотация**

В настоящем докладе дается обзор современных теорий радиационных поясов и рассматриваются перспективы будущих исследований в этой области. В первой части обсуждается возможность инъекции частиц в область захваченной радиации, когда дрейфовые орбиты возмущаются во время магнитных бурь. Во второй части показано, что экспериментальные данные о диффузии частиц в поясах находятся в хорошем согласии с концепцией внезапных импульсов. В третьей части анализируется проблема утечек протонов и электронов из поясов, обусловленных ионизационными потерями и циклотронной неустойчивостью.

##### **Введение**

Экспериментальные и теоретические исследования динамики магнитосферы являются главной темой данного симпозиума. Содержанием доклада является обзор и анализ теоретических исследований свойств радиационных поясов Земли (в основном, для частиц с энергией свыше  $\sim 100$  кэВ).

Как показывают экспериментальные исследования, среди большого количества различных явлений, наблюдаемых в поясах, можно выделить три наиболее фундаментальных процесса, управляющих динамикой основной массы частиц: инъекцию в область захваченной радиации, диффузию, сопровождающуюся адиабатическим ускорением, и утечку. По-видимому, инъекция и диффузия обусловлены вынужденными колебаниями (в случае инъекции сильно нелинейными) магнитосферы при вариациях солнечного ветра. Утечка электронов связана с возбуждением некоторых типов собственных колебаний магнитосферной плазмы. При взаимодействии частиц с волнами основную роль играют различные резонансные эффекты.

При изложении мы считаем нецелесообразным воспроизводить весьма громоздкие выкладки, типичные для теории радиационных поясов. Основное внимание уделено качественному анализу принципиальных вопросов теории. Большинство конкретных расчетов можно найти в монографии автора «Динамика радиационных поясов Земли» [1] и в цитируемой литературе.

---

\* *Tverskoy B. A. Rev. Geophys. 7 (1, 2), 219–231 (1969). Заказной доклад на Международном Симпозиуме по физике магнитосферы. Вашингтон, сентябрь 3–13, 1968. Здесь публикуется в обратном переводе с английского. — Прим. сост.*



### 1. Инжекция частиц в область захваченной радиации

Как известно [2, 3], модели магнитосферы типа модели Чепмена—Ферраро не являются замкнутыми. Дрейфовые орбиты частиц, достаточно удаленные в плоскости экватора от Земли, выходят в пограничный слой между геомагнитным полем и солнечным ветром. Таким образом, для частиц с большими экваториальными питч-углами границей замкнутых дрейфовых орбит служит силовая линия  $H = \text{const} = H_s$  в плоскости экватора, где  $H_s$  — напряженность поля на дневной границе. По незамкнутым орбитам  $H = \text{const} < H_s$  частицы свободно проникают на ночную сторону магнитосферы.

Положение границы магнитосферы и форма сепаратрисы  $H = H_s$  зависят от мощности солнечного ветра. При усилении ветра линия  $H = H_s$  приближается к Земле, и часть дрейфовых орбит, обычно замкнутых, входит в контакт с межпланетной средой. По мере того как мощность ветра уменьшается до начального уровня, орбиты вновь замыкаются. Частицы, не успевшие продрейфовать через магнитосферу за время восстановления, оказываются захваченными на замкнутые орбиты. Этот механизм инжекции является начальной стадией формирования радиационных поясов по схеме диффузионной теории [4].

Открытие хвоста магнитосферы [5] и исследование движений границы области захваченной радиации во время магнитных возмущений [6, 7] подтверждают разделение магнитосферы на области замкнутых и незамкнутых дрейфовых орбит и зависимость положения их границы от мощности солнечного ветра. Естественно предположить, что проникновение частиц вдоль незамкнутых орбит на ночную сторону магнитосферы является причиной формирования плазменного слоя, вытягивающего силовые линии в хвост.

При усилении мощности солнечного ветра плазма проникает в более глубокие области магнитосферы и заметно деформирует соответствующие силовые линии, вытягивая их на ночную сторону. Длина силовых линий сильно возрастает, а напряженность поля в приэкваториальной области падает. По мере уменьшения мощности солнечного ветра до начального уровня эти силовые линии вновь втягиваются в область захваченной радиации, а частицы, не успевшие продрейфовать в межпланетное пространство, испытывают сильное адиабатическое ускорение.

Таким образом, во время первой фазы магнитной бури, когда плазма проникает на периферию области захваченной радиации и вытягивает силовые линии в хвост, на соответствующих расстояниях от Земли должно наблюдаться резкое падение интенсивности высокоэнергичных частиц за счет адиабатического замедления частиц и роста объема силовых трубок в  $10^2$ – $10^3$  раз. Затем, по мере восстановления поля, поток частиц вновь повышается. Чем сильнее возмущение, тем более глубокие оболочки затрагиваются данным процессом. Инжекция быстрых частиц во внешний пояс во время магнитных бурь неоднократно наблюдалась экспериментально [8–10].

Описанная выше картина позволяет качественно связать ряд экспериментальных фактов: движение границы области захваченной радиации и аврорального овала и инжекцию быстрых частиц в пояса. Проникновение плазмы на ночную сторону магнитосферы и вытягивание силовых линий наблюдались в лабораторных экспериментах [11]. Однако создание полной количественной теории этих эффектов сталкивается с большими трудностями.

Некоторые результаты можно получить из соображений адиабатической инвариантности, используя свойства силовых линий, вытянутых плазменным слоем.

Предположим, что плотность тока в плазменном слое конечной толщины приблизительно постоянна. Тогда в декартовой системе координат с осью  $x$  вдоль линии Земля—Солнце и осью  $z$  по нормали к слою

$$H_z = H_e, \quad H_x = \eta z, \quad (1)$$

где  $H_e$  слабо зависит от  $x$ , а  $\eta$  определяется силой тока. Силовые линии поля (1), будут иметь форму параболы

$$x = x_0 + \frac{\eta z^2}{2H_e}. \quad (2)$$

Напряженность поля

$$H = (H_e^2 + \eta^2 z^2)^{1/2}. \quad (3)$$

Элемент длины дуги

$$ds = (dx^2 + dz^2)^{1/2} = dz \left( 1 + \frac{\eta^2 z^2}{H_e^2} \right)^{1/2} = \frac{H^2 dH}{\eta H_e (H^2 - H_e^2)^{1/2}}, \quad (4)$$

а радиус кривизны есть

$$R = \frac{H_e}{\eta} \left( 1 + \frac{\eta^2 z^2}{H_e^2} \right)^{3/2} = \frac{H^3}{\eta H_e^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим частицу с импульсом  $p$  и зеркальной точкой при  $H = H_m$  и вычислим ее скорость дрейфа, а также адиабатические инварианты. Имеем

$$p_\perp^2 = \frac{p^2 H}{H_m}, \quad p_\parallel^2 = p^2 \left( 1 - \frac{H}{H_m} \right),$$

$$v_d = \frac{c^3}{eEH} \left( \frac{p_\perp^2}{2} \frac{\eta z}{H^2} \frac{dH}{dz} + \frac{p_\parallel^2}{R} \right) = \frac{c^3 p^2 \eta}{eEH^3 H_m} \left[ \frac{1}{2} (H^2 - H_e^2) + \frac{H_e^2}{H} (H_m - H) \right], \quad (6)$$

где  $E$  — полная релятивистская энергия;  $e$  — заряд. Дрейф направлен по оси  $y$ . Тогда первые два инварианта имеют вид

$$I_1 = \frac{p^2}{H_m}; \quad I_2 = \int_0^{z_m} p_\parallel \frac{ds}{dz} dz = \frac{p}{\eta H_e (H_m)^{1/2}} \int_{H_e}^{H_m} \left( \frac{H_m - H_e}{H^2 - H_e^2} \right)^{1/2} H^2 dH. \quad (7)$$

Полупериод колебаний между зеркальными точками есть

$$T = \int_0^{z_m} \frac{ds}{dz} \frac{dz}{v_\parallel} = \frac{EH_m^{1/2}}{c^2 p \eta H_e} \int_{H_e}^{H_m} \frac{H^2 dH}{[(H_m - H)(H^2 - H_e^2)]^{1/2}}. \quad (8)$$

Усреднение  $v_d$  за время  $T$  дает

$$\bar{v}_d = \frac{1}{T} \int_0^{z_m} \frac{ds}{dz} \frac{dz}{v_\parallel} v_d = \frac{c^3 p^2 \eta}{eEH_m^2} F(h_e), \quad (9)$$

где

$$F(h_e) = \frac{\int_{h_e}^1 \frac{dh}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h^2 - h_e^2}{1 - h} \right)^{1/2} + h_e^2 \left( \frac{1 - h}{h^2 - h_e^2} \right)^{1/2} \right]}{\int_{h_e}^1 \frac{h^2 dh}{[(1 - h)(h^2 - h_e^2)]^{1/2}}}. \quad (10)$$

В случае сильно вытянутых силовых линий  $H \gg H_e$  всюду, кроме тонкого слоя вблизи плоскости симметрии. Поэтому у большинства частиц  $H_m \gg H_e$  ( $h_e \ll 1$ ). Рассмотрим  $\bar{v}_d$  и  $I_1, I_2$  при  $h_e \rightarrow 0$  и  $h_e \rightarrow 1$ . В первом случае можно положить  $h_e = 0$ . Получаем

$$\bar{v}_d \approx \frac{3}{4} \frac{c^3 p^2 \eta}{e E H_m^2}, \quad I_1 \approx \frac{p^2}{H_m}, \quad I_2 \approx \frac{p H_m^2}{\eta H_e}. \quad (11)$$

Во втором случае

$$\alpha = \frac{H_m - H_e}{H_e} \ll 1.$$

При этом

$$\bar{v}_d \approx \frac{c^3 p^2 \eta (H_m - H_e)}{e E H_m^3}, \quad I_1 \approx \frac{p^2}{H_e}, \quad I_2 \approx \frac{p}{\eta} (H_m - H_e). \quad (12)$$

При  $\alpha = 0$  следует учитывать медленный дрейф со скоростью

$$v_d = \frac{c^3 p^2}{2 e E H_e^2} \frac{\partial H_e}{\partial x}, \quad (13)$$

обусловленный слабой зависимостью  $H_e$  от  $x$ .

При процессах вытягивания и сокращения силовых линий величина  $\eta$  меняется, очевидно, лишь в пределах порядка величины (толщина слоя  $z_0$  порядка радиуса Земли, а поле при  $z_0$  варьирует в пределах нескольких десятков гамм). Гораздо сильнее меняется  $H_e$  (от  $< 1\gamma$  при вытянутых силовых линиях до  $\sim 10^2$  и даже  $10^3\gamma$  при восстановлении поля). Из сравнения (11) и (12) видно, что при  $\eta = \text{const}$  частицы с  $H_m \gg H_e$  ускоряются слабо:

$$p \sim H_e^{1/5}. \quad (14)$$

При  $H_m - H_e \ll H_e$  имеет место обычный бетатронный закон  $p \sim H^{1/2}$ . В то же время частицы с  $H_m - H_e \ll H_e$  дрейфуют значительно медленнее. Из сопоставления (11) и (13) видно, что скорости дрейфа с данным  $p$  сравнимы, когда

$$H_m^2 \approx \frac{\eta H_e^2}{\partial H_e / \partial x}. \quad (15)$$

При  $\eta \sim 4 \cdot 10^{-8} \gamma/\text{см}$  (полутолщина слоя  $\approx 10^9$  см, напряженность поля у границы  $40\gamma$ ),  $H_e \sim 1\gamma$  и  $H_e/(\partial H_e/\partial x) \sim 10^{10}$  см соответствующее значение  $H_m \approx 20\gamma$  и большинство частиц дрейфует значительно быстрее, чем при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Таким образом, можно конкретизировать механизм инжекции. При ослаблении мощности солнечного ветра уменьшается поступление плазмы на вытянутые

силовые линии. Большинство захваченных во время первой фазы бури частиц покидает магнитосферу, давление падает и силовые линии начинают сокращаться.  $H_e$  возрастает. Частицы с питч-углами, близкими к  $90^\circ$ , в плоскости симметрии дрейфуют медленнее основной массы частиц и не успевают покинуть магнитосферу. Испытав сильное бетатронное ускорение, они попадают на замкнутые дрейфовые орбиты во внешнем поясе. Поэтому в момент инжекции наиболее жесткие частицы должны быть сконцентрированы вблизи экваториальной плоскости и иметь большие питч-углы. Как известно, этот эффект действительно имеет место [10].

Изложенные соображения показывают, что механизм инжекции при сокращении силовых линий является перспективным направлением для дальнейших исследований.

Большое значение имеет вопрос о соотношении между инжекцией и диффузией. Данные измерений 1964 г. [9] показывают, что при слабых магнитных бурях инжекция происходит на оболочки  $L > 5,5-6$ , а дальнейшее проникновение в магнитосферу обусловлено диффузией. Инжектируются лишь нерелятивистские частицы. Во время сильных магнитных бурь 1965 г. имела место инжекция релятивистских электронов вплоть до  $L = 4$  [8, 10]. На оболочку  $L < 4$  инжекция, по-видимому, является исключительно редкой. Таким образом, в годы минимума солнечной активности или при длительном отсутствии сильных бурь инжекция идет лишь на периферии внешней зоны. При наличии сильных бурь инжекция становится основным источником частиц внешнего электронного пояса. Максимум протонного пояса ( $L \simeq 3,5$ ) и более глубокие оболочки заполняются за счет диффузии практически при любом уровне магнитной активности.

## 2. Диффузия частиц

Теория диффузии частиц в область захваченной радиации к настоящему времени разработана довольно полно. Впервые идея диффузии частиц поперек дрейфовых оболочек, сопровождающейся адиабатическим ускорением, была высказана в [12]. Наибольшее развитие получила теория механизма, при котором диффузия обусловлена вынужденными колебаниями магнитосферы типа внезапных импульсов [13]. Ряд последующих работ был посвящен вопросу о соотношении между средним и среднеквадратичным смещением частиц при возмущениях [3, 4, 14–16]. Обобщению теории диффузии на случай электрических полей с произвольной зависимостью от  $L$  и частотным спектром посвящена работа [17]. Интерпретация свойств радиационных поясов на основе диффузионной теории рассматривалась в работах [4, 15, 18, 19]. Наиболее общее рассмотрение основ теории диффузии см. в [20]. Систематическое изложение диффузионной теории радиационных поясов Земли дано в монографии автора [1].

Важная роль диффузии в динамике поясов не вызывает сомнений, так как основные выводы теории хорошо подтверждаются многочисленными экспериментами. Наиболее серьезной проблемой теории является выяснение причин диффузии. Из законов сохранения энергии и магнитного момента легко показать, что квазистатические электрические поля ионосферного динамо приводят лишь к малым возмущениям дрейфовых орбит частиц, кинетическая энергия которых  $E_k \gg e|\delta U|/3$ , где  $e$  — заряд частицы, а  $|\delta U|$  — максимальное значение разности потенциалов вдоль дрейфовой оболочки. В случае магнитосферы  $|\delta U| \leq 10^5$  В и соответственно при энергиях частиц  $> 100$  кэВ данный эффект не играет роли.

Однако случайные нестационарные поля могут вызвать диффузию частиц поперек дрейфовых оболочек. Для этого необходимо, чтобы: 1) электрическое поле имело долготную компоненту, зависящую от долготы, и 2) спектральные функции долготных гармоник Фурье содержали резонансные частоты

$$\omega = \frac{mv_d}{R_E L}$$

( $m$  — номер долготной гармоники,  $v_d$  — скорость дрейфа частицы,  $R_E$  — радиус Земли,  $L$  — параметр Мак-Илвайна).

Требование асимметрии связано с обратимостью движения частиц по  $L$  в аксиально симметричных полях, а условие резонанса следует из выражения для коэффициента диффузии  $D$ , который пропорционален [17]

$$\left( \sum \frac{dE_m^2}{d\omega} \right)_{\omega = \frac{mv_d}{R_E L}}$$

В зависимости от вида  $dE_m^2(\omega)/d\omega$  коэффициент диффузии может быть практически любой функцией  $L$  и энергии частицы. Из известных источников электрических полей условию резонанса удовлетворяют внезапные импульсы, спектр которых богат гармониками с периодами от  $\sim 1$  мин до  $\sim 1$  ч (что соответствует резонансу с основной массой частиц поясов). Спектр полей, порождаемых ионосферной турбулентностью, не известен.

Тем не менее нам кажется, что можно с достаточной определенностью говорить о преобладающей роли внезапных импульсов. Как известно, диффузия под действием внезапных импульсов описывается одной константой  $D_0$  определяемой степенью асимметрии возмущения магнитного поля и распределением вероятностей импульсов различных амплитуд. Коэффициент диффузии

$$D = D_0 L^{10} \quad (16)$$

не зависит от энергии и сорта частиц (если их периоды дрейфа удовлетворяют неравенствам  $1 \text{ мин} \leq T_d \leq 1 \text{ ч}$ ). На основе соотношения (16) были предсказаны некоторые параметры радиационных поясов [15, 19]. Сводка этих результатов приведена в табл. 1, где указаны интервалы энергий,  $L$ , периодов дрейфа и динамических

Таблица 1

Явление	Сорт частиц	Диапазон энергий, МэВ	Диапазон $L$	Диапазон $T_d$ , мин	Диапазон динамич. времен, сут.
Диффуз. волны	Электроны	0,4–2	3,5–5	2–20	1–30
Диффуз. волны	Протоны	40	$\sim 2,2$	1–50	1000
Структура пояса	Протоны	0,5–30	1,5–3,5	$\sim 1$	100–5000

времен соответствующих процессов. Структура протонного пояса рассчитана в предположении о кулоновском характере потерь. Диффузионные волны определяют  $D$  непосредственно.

Все эти данные, перекрывающие широкие диапазоны различных параметров, хорошо описываются соотношением (16) при  $D_0 = (5-10) \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ . Отметим, что при анализе скорости диффузионных волн существенно иметь в виду различие скоростей максимума  $V_m$  и переднего фронта  $V_f$  (точки перегиба профиля волны). Именно и  $V_m$  и  $V_f$  пропорциональны  $L^9$ , но коэффициент пропорциональности при  $V_f$  в 2 раза больше [1]. Анализ многочисленных измерений скорости диффузионных волн с учетом этого обстоятельства проведен в работе [21].

Эксперимент хорошо подтверждает характерное для внезапных импульсов соотношение (16). Отметим, что скорость диффузионных волн на высоких геомагнитных широтах, определенная экспериментально, несколько меньше, чем вблизи плоскости экватора (в 1,5–2 раза). Этот результат также согласуется с концепцией внезапных импульсов. Во время быстрого скачка поля частицы, независимо от широты зеркальной точки, движутся вместе с силовыми линиями. В дальнейшем они расходятся по возмущенным дрейфовым орбитам. Расплывание оболочки  $L = \text{const}$  складывается из смещения силовой линии в плоскости экватора на дневной стороне  $\delta L_1$  и искажения дрейфовой орбиты при возмущении поля  $\delta L_2$ . Как уже отмечалось,  $\delta L_1$  одинаково для всех частиц на данной силовой линии. Величина  $\delta L_2$  для частиц с нулевой продольной скоростью ( $V_{\parallel} = 0$  вблизи экваториальной плоскости определяется асимметрией линии  $H = \text{const}$ . Для частиц с нулевой поперечной скоростью ( $V_{\perp} = 0$ )  $\delta L_2$  связано с асимметрией проекции на плоскость экватора поверхности постоянного второго инварианта  $I_2$  (при  $V_{\perp} = 0$   $I_2$  равно длине силовой линии). Поле внезапного импульса (за вычетом аксиально симметричной части) есть

$$\mathbf{h} = -\frac{h_0(t)}{2} \nabla (R^2 \sin 2\theta \cos \phi) \quad (17)$$

( $R$  — радиус в единицах  $a$ ,  $\theta$  — сопряженная широта,  $\phi$  — долгота). Простой, но громоздкий расчет дает

$$\delta L_1 = -\frac{8}{21} \frac{h_0}{H_e} L^5, \quad \delta L_2(V_{\parallel} = 0) = -\frac{1}{3} \frac{h_0}{H_e} L^5, \quad \delta L_2(V_{\perp} = 0) \approx -\frac{1}{6} \frac{h_0}{H_e} L^5. \quad (18)$$

Отсюда, учитывая, что  $D \sim (\delta L_1 + \delta L_2)^2$ , получаем

$$\frac{D(V_{\parallel} = 0)}{D(V_{\perp} = 0)} \approx \left(\frac{30}{23}\right)^2 = 1,7.$$

Для данного расчета существенно, что временные гармоники поля сфазированы и дают в момент импульса резкий скачок поля. Расчет для поля  $\mathbf{h}$  (17) с тем же спектральным составом, но с хаотическими фазами отдельных временных гармоник [22] приводит к совершенно иному результату:  $D(V_{\parallel} = 0)$  на порядок больше, чем  $D(V_{\perp} = 0)$ .

Мощность и частота внезапных импульсов, по-видимому, достаточна для наблюдаемой скорости диффузии  $D_0 = (5-10) \cdot 10^{-14} (R_E)^2 \text{ с}^{-1}$ . Как известно, данные о частоте импульсов разных амплитуд, обработанные на основе теоретической модели магнитосферы [23], приводят к значительно меньшей величине  $D_0$  [19]. Однако в этой модели, построенной без учета хвоста, асимметрия поля сильно занижена.

Обработка тех же данных на основе эмпирического соотношения из [24] приводит к величине  $D_0 \approx 2 \cdot 10^{-14} (R_E)^2 \text{ с}^{-1}$ , которая в пределах надежности данных о внезапных импульсах явно согласуется с величиной  $5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$ , вытекающей из исследования радиационных поясов [1].

Таким образом, совокупность экспериментальных данных о диффузии частиц в магнитосфере подтверждает концепцию внезапных импульсов и приводит к хорошему количественному согласию с теорией.

### 3. Утечка частиц из поясов

Радиационные пояса в среднем стационарны, а максимумы интенсивности захваченных частиц, как правило, достаточно удалены от Земли. Такая ситуация означает, что имеет место динамическое равновесие между диффузионным потоком и утечками частиц. Максимум частиц определенной энергии лежит там, где время диффузии примерно равно времени жизни.

В случае протонов вероятным механизмом потерь является ионизационное торможение. Совокупность экспериментальных данных о положении максимумов интенсивности протонов с энергиями от 0,5 до 30 МэВ хорошо согласуется с теоретической кривой [15]

$$L_m(v) = \left( \frac{\pi e^4 N \log \Lambda}{10 D_0 m M v^3} \right)^{1/8}, \quad (19)$$

где  $m$  и  $M$  — соответственно массы электрона и протона,  $N$  — концентрация холодных электронов,  $\log \Lambda$  — логарифм дебаевской экранировки ( $\log \Lambda \approx 25$ ),  $v$  — скорость быстрого протона соответствующей энергии. Экспериментальные данные об  $L_m(v)$  при  $N \approx 10^3 \text{ см}^{-3}$  дают  $D_0 \approx 5 \cdot 10^{-14} (R_E)^2 \text{ с}^{-1}$ .

Интересную возможность проверки гипотезы о кулоновском характере потерь тяжелых частиц в поясах дает исследование пояса  $\alpha$ -частиц. В работе Тверского [15] было отмечено, что, поскольку при равных энергиях время ионизационного торможения  $\alpha$ -частицы в 8 раз меньше, чем для протона, а время диффузии не зависит от энергии и пропорционально  $L^{-8}$ , максимум  $\alpha$ -частиц будет расположен в  $8^{1/8} \approx 1,3$  раза дальше, чем максимум протонов той же энергии. Этот вывод подтверждается измерениями на спутнике «Инджун-3» [25]. Максимум  $\alpha$ -частиц с энергиями более 2 МэВ расположен между  $L = 3$  и 3,5, в то время как максимум протонов данной энергии лежит на  $L = 2,5$ . Высота апогея «Инджуна-3» (2500 км от поверхности Земли) достаточно велика, чтобы считать усредненную вдоль силовой линии концентрацию холодной плазмы равной значению в экваториальной плоскости. Коэффициент диффузии  $D$  на геомагнитных широтах  $\approx 50^\circ$  также близок к значению в экваториальной плоскости (см. предыдущий раздел). Наконец, измерения положения максимума протонов с энергиями порядка нескольких мегаэлектронвольт в зависимости от магнитной широты показывают, что на высотах более 2500 км  $L_m$  почти такое же, как и в плоскости экватора [9]. Поэтому результаты [25] можно считать подтверждением кулоновского механизма утечки быстрых частиц. Разумеется, крайне желательно провести исследование пояса  $\alpha$ -частиц вблизи плоскости экватора.

Утечка электронов из внешнего пояса и зазора на много порядков быстрее ионизационного торможения. Имеется ряд экспериментальных доказательств связи утечки с высыпанием в ионосферу, т. е. с рассеянием. Причиной рассеяния может

быть взаимодействие электронов с различными типами волн, возбуждаемых в магнитосферной плазме. Рассеяние носит резонансный характер. Возможны три типа резонансов.

- (1) Черенковский резонанс с продольной по отношению к магнитному полю  $\mathbf{H}$  составляющей электрического поля; при этом

$$k_{\parallel} v_{\parallel} = \omega_1, \quad (20)$$

где  $\omega_1$  и  $k_{\parallel}$  — круговая частота и проекция волнового вектора волны на  $\mathbf{H}$  соответственно, а  $v_{\parallel}$  — проекция скорости электрона на  $\mathbf{H}$ . Черенковский резонанс наиболее эффективен в случае, когда фазовая скорость волны близка к скорости электрона.

- (2) Циклотронный резонанс, при котором

$$k_{\parallel} v_{\parallel} = \omega_H, \quad (21)$$

где  $\omega_H$  — циклотронная релятивистская частота электрона.

- (3) Кратные циклотронные резонансы

$$k_{\parallel} v_{\parallel} = n\omega_H, \quad (22)$$

( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), возникающие, когда волны распространяются под углом  $\chi \neq 0$  к  $\mathbf{H}$  (разумеется, резонанс (21) имеет место и в этом случае).

Экспериментальное исследование спектров волн различных типов в магнитосфере лишь начинается. Сравнительно хорошо изучены волны с частотами от  $\sim 10^2$  до  $10^4$  Гц (ОНЧ-излучение). Сюда относятся свистящие атмосферерики, а также ряд типов радиоизлучения, идущего из ионосферы во время интенсивных высыпаний электронов. Закон дисперсии для этих волн при частотах  $\omega \gg \Omega_H$  ( $\Omega_H$  — гирочастота ионов) имеет вид

$$\omega = \omega_H \frac{c^2 k^2 \cos \chi}{\omega_0^2 + c^2 k^2}, \quad (23)$$

где  $\omega_H$  — гирочастота электронов,  $\omega_0$  — частота Ленгмюра.

Имеются указания на возбуждение ленгмюровских колебаний при возрастании потоков мягких электронов с энергиями  $\sim 100$  кэВ [26]. Однако амплитуды колебаний недостаточны для обеспечения наблюдаемых скоростей электронов с энергиями  $\gtrsim 100$  кэВ [1].

На высотах около 1000 км от поверхности Земли регистрируются довольно мощные ионнозвуковые волны [27]. Однако фазовые скорости этих волн ( $\sim 10^5$  см/с) малы, и черенковский резонанс (20) поэтому не эффективен для частиц с  $v \sim 10^9 - 10^{10}$  см/с. Наконец, известно, что довольно часто в магнитосфере возникают волновые пакеты альвеновских волн с частотами  $\sim 1$  Гц — так называемые жемчужины. С точки зрения условия резонанса (21) они должны эффективно воздействовать на протоны с энергиями  $\sim 1$  МэВ.

Из всех возможных способов возбуждения волн с точки зрения потерь частиц наиболее эффективным механизмом является неустойчивость самих радиационных поясов. При этом автоматически генерируются волны, удовлетворяющие условиям резонанса.

В настоящее время выяснено, что важная роль в потерях электронов принадлежит резонансу (21) с волнами типа (23). Известно, что если угловое распределение



быстрых электронов плазмы анизотропно и  $p_{\perp} > p_{\parallel}$ , то плазма начинает самопроизвольно генерировать такие волны [28]. Этот эффект в связи с теорией радиационных поясов и ОНЧ-излучения впервые был рассмотрен в работах [29, 30]. Неустойчивость развивается очень быстро, и поэтому распределение интенсивности электронов высоких энергий в поясах не может в течение длительного времени превышать предел устойчивости. Этот предел определяется равенством усиления волны при распространении вдоль силовой линии и поглощения при отражении от ионосферы и Земли [31, 32]. Расчет предела устойчивости для частиц произвольных энергий в поле диполя проведен в [32].

В рамках теории циклотронной неустойчивости получают объяснение расщепление электронных поясов на внутренний и внешний, а также ряд эффектов динамики сверхкритических потоков.

Как показывают расчеты, электроны с определенной энергией наиболее легко раскачиваются волнами типа (23) с  $\chi \neq 0$ , для которых условие резонанса (21) выполняется в плоскости экватора. Из (21) и (23) следует, что при данной энергии резонансная частота быстро убывает с ростом  $L$ . В то же время на более низких высотах поглощение волн в ионосфере с ростом  $L$  резко падает. До тех пор пока частота  $\omega > \Omega_H^0 (M/m)^{1/4}$  ( $\Omega_H^0$  — гирочастота ионов в  $E$ -слое), этот эффект имеет место, и критическая интенсивность в плоскости экватора при энергиях электронов  $\gtrsim 300$  кэВ убывает по закону

$$I_{cr} \approx \frac{10}{\pi} (N_E N)^{1/2} \frac{\nu_0 c^2 m}{\kappa p} \frac{\omega_H^{(0)}}{\omega_0^2} L^{-8,5} \left( \frac{L}{L-1} \right)^{0,75} (\text{см}^2 \cdot \text{с})^{-1}, \quad (24)$$

где  $N_E$  и  $N$  — концентрации электронов в  $E$ -слое и вершине силовой линии соответственно,  $\nu_0$  — частота столкновений в  $E$ -слое,  $\kappa^{-1}$  — высота однородной атмосферы ( $\approx 10$  км),  $\omega_H^0$  — гирочастота электронов у экватора Земли,  $\omega_0$  — ленгмюровская частота в вершине силовой линии,  $p$  — импульс электрона [1, 32].

При дальнейшем росте  $L$  резонансная частота продолжает убывать и становится меньше  $\Omega_H^{(0)} (M/m)^{1/4} \approx 2 \cdot 10^3$  рад/с. При таких частотах существенна диссипация возбуждаемых волной ионных токов, которая приводит к росту поглощения до почти 100 % при  $\omega_{рез} \approx \Omega_H^{(0)} \approx 200$  рад/с. Соответственно возрастает критическая интенсивность. Для электронов с энергиями порядка нескольких сот килоэлектронвольт минимум интенсивности ( $\omega_{рез} \approx \Omega_H^{(0)} (M/m)^{1/4}$ ) расположен при  $L \approx 3$  в соответствии с наблюдаемым положением зазора, а второй максимум  $\omega_{рез} \approx \Omega_H^{(0)}$  — при  $L \approx 4,2$  в соответствии с данными о внешнем поясе.

Уравнение (24) хорошо описывает структуру внутреннего электронного пояса. Времена диффузии в поясе весьма велики, и единственным известным естественным источником электронов здесь является нейтронный распад. При  $L \lesssim 2$  даже за время ионизационных потерь этот механизм не может сформировать критическую интенсивность. Поэтому здесь неустойчивость отсутствует и времена жизни велики. При  $L > 2$  пояс постоянно переполнен и, следовательно, непрерывно поддерживаются колебания ведущие к потере избытка частиц. Вследствие изменения условий резонанса вдоль силовых линий волны сбрасывают также частицы более высоких (около 1 МэВ и выше) энергий, интенсивность которых недостаточна для возбуждения собственных резонансных волн. Поэтому при  $L \gtrsim 2$  в основном должны наблюдаться электроны с энергией  $< 780$  кэВ.

Таким образом, роль циклотронной неустойчивости в динамике электронных поясов весьма велика. Однако полная теория устойчивости поясов требует детального рассмотрения других возможностей.

Отметим, что аналогичные расчеты для протонного пояса показывают, что в районе максимума ( $L \simeq 3,5$ ) интенсивность близка к критической. Поэтому при небольших вариациях потоков протонов или коэффициента поглощения альвеновских волн в ионосфере возможна генерация этих волн.

На этой основе получают объяснение все основные свойства пульсаций типа жемчужин [1]. Вместе с тем подтверждается предположение о гибели протонов в основном за счет ионизационных потерь. Другой возможный тип неустойчивости протонного пояса (дрейфовые неустойчивости) подавляется диссипацией в ионосфере [33].

Наиболее важной проблемой теории устойчивости радиационных поясов, с нашей точки зрения, является изучение динамики высыпания электронов при циклотронной неустойчивости в квазилинейном приближении. Ряд результатов в этом направлении уже получен [27, 29].

### Заключение

В теории радиационных поясов достигнут значительный прогресс, и основные физические процессы, управляющие динамикой частиц с энергиями свыше  $\sim 100$  кэВ, выяснены.

Наиболее важной проблемой физики магнитосферы является создание количественной теории процессов формирования хвоста. По-видимому, решение этой проблемы позволит окончательно выяснить механизм главной фазы магнитных бурь и инжекции частиц в пояс.

Ряд интересных явлений, вероятно, будет обнаружен при исследовании взаимодействия между частицами с энергиями  $\sim 1-10$  кэВ и электрическими полями в ионосфере.

Исследования динамики границы области захваченной радиации (включая магнитные измерения), спектров электромагнитных полей в широком диапазоне частот, а также модельные эксперименты могут существенно ускорить решение этих проблем.

### Литература

1. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
2. Hones E. W. J. Geophys. Res. **68**, 1209 (1963).
3. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 224 (1964).
4. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 436 (1964).
5. Ness N. F. J. Geophys. Res. **70**, 2989 (1965).
6. Maehlum B. B., O'Brien B. J. J. Geophys. Res. **68**, 997 (1963).
7. Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Кузнецов С. Н., Логачев Ю. И., Сосновец Э. Н., Столповский В. Г. Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 425.
8. McIlwain C. E. Trans. Amer. Geophys. Union. **47**, 131 (1966).
9. Vernov S. N. Ann. IQSY **4**, 56 (1968).
10. Williams D. J., Arens J. I., Lanzerotti L. J. J. Geophys. Res. **73**, 5673 (1968).
11. Kawashima N., Moris S. Phys. Fluids **8**, 378 (1965).
12. Kellogg P. J. Nature. **183**, 1295 (1959).

13. *Parker E. N.* J. Geophys. Res. **65**, 3117 (1960).
14. *Davis L. D., Chang D. B.* J. Geophys. Res. **67**, 2169 (1962).
15. *Тверской Б. А.* Геомагнетизм и аэрономия. **5**, 793 (1965).
16. *Dungey J. W.* Space Sci. Rev. **4**, 199 (1965).
17. *Falthammar C.-G.* J. Geophys. Res. **70**, 2503 (1965).
18. *Nakada M. P., Dungey J. W., Hess W. N.* J. Geophys. Res. **70**, 3525 (1965).
19. *Nakada M. P., Mead G. D.* J. Geophys. Res. **70**, 4777 (1965).
20. *Birmingham T. J., Northrop T. G., Falthammar C.-G.* Phys. Fluids **10**, 2389 (1967).
21. *Vernov S. N., Gorchakov E. V., Kuznetsov S. N., Logachev Yu. I., Sosnovets E. N., Stolpovsky V. G.* Rev. Geophys. **7**, 257 (1969).
22. *Falthammar C.-G.* Radial diffusion by violation of the 3th adiabatic invariant. Preprint (1968).
23. *Mead G. D.* J. Geophys. Res. **69**, 1181 (1964).
24. *Nishida A., Cahill L. J.* J. Geophys. Res. **69**, 2243 (1964).
25. *Krimigis S. M., VanAllen J. A.* J. Geophys. Res. **72**, 5779 (1967).
26. *Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г., Митяков И. А., Рапопорт В. О., Сазонов Ю. А., Тарасов А. Ф.* Исследования космического пространства. М.: Наука, 1965. 581.
27. *Scarf F. L., Crook G. M., Fredericks R. W.* J. Geophys. Res. **70**, 3045 (1965).
28. *Садеев Р. З., Шафранов В. Д.* ЖЭТФ. **39**, 181 (1960).
29. *Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю.* Геомагнетизм и аэрономия. **4**, 233 (1964).
30. *Трахтенгерц В. Ю.* Геомагнетизм и аэрономия. **5**, 1103 (1965).
31. *Kennel C. F., Petschek H. E.* J. Geophys. Res. **71**, 1 (1966).
32. *Тверской Б. А.* Геомагнетизм и аэрономия. **7**, 226 (1967).
33. *Chang D. B., Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N.* J. Geophys. Res. **70**, 3085 (1965).

# ВАРИАЦИИ ЭНЕРГИЧНЫХ ЧАСТИЦ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ ВО ВРЕМЯ СИЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ БУРИ 24–26 МАРТА 1991 ГОДА\*

## Аннотация

По данным измерений на ИСЗ «ГРАНАТ», анализируются вариации протонов радиационного пояса с  $E_p = 5,2\text{--}5,4$  МэВ во время сильной магнитной бури 24–26 марта 1991 г. На фазе восстановления бури на  $L = 3,7 \pm 0,1$  интенсивность протонов с  $E_p = 5,2\text{--}5,4$  МэВ возросла на два порядка по сравнению с предбуревым уровнем. Минимальное достигаемое значение  $L$  (параметр Мак-Илвайна) для орбиты «ГРАНАТА» составляло 3,6. По данным измерений на ИСЗ CRRES, в момент внезапного начала бури 24.03.91 г. в течение  $\sim 1$  мин сформировался пояс протонов с энергиями несколько МэВ — десятки МэВ и электронов с энергиями  $\sim 15$  МэВ с максимумами на  $L = 2,2\text{--}2,6$ . Предложена возможная интерпретация данных явлений на основе теории дрейфа захваченных частиц во время внезапных импульсов.

1. Протонный радиационный пояс с энергиями протонов  $E_p \gtrsim 100$  кэВ является достаточно стабильным образованием и испытывает заметные вариации лишь во время сильных геомагнитных бурь. Во время бурь происходит возрастание интенсивности протонов кольцевого тока. Интенсивность же протонов с энергиями в сотни кэВ — несколько МэВ падает, после бури наблюдается восстановление интенсивности под действием радиальной диффузии (см., например, обзор [1]).

Релятивистские электроны (вплоть до энергии  $E_e \sim 15$  МэВ) инжектируются во внутренние области магнитосферы на фазе восстановления магнитных бурь, скорее всего в результате бетатронного ускорения при резком втягивании части силовых линий плазменного слоя хвоста магнитосферы в область захваченной радиации. При этом положение максимума интенсивности электронов определяется амплитудой  $D_{st}$ -вариации бури [2]. Для сильных магнитных бурь  $L \sim 3$ . Впервые вариации релятивистских электронов во внутреннем поясе на больших высотах были обнаружены на ИСЗ «Молния-1» [3]. Возрастание интенсивности электронов с энергией  $E_e = 0,9\text{--}2,3$  МэВ наблюдалось после сильной магнитной бури ( $|D_{st}|_{\max} = 204$  нТ) на  $L \sim 2,2$  (не считая основного максимума пояса этих электронов, инжектированных на  $L \sim 3,2$ ). Затем, в течение  $\sim 1,5$  месяцев, дополнительный максимум сместился на  $L \approx 1,7$ . Наблюдаемые эффекты инжекции и быстрой диффузии релятивистских электронов во внутреннем поясе авторы [3] объясняют процессами

---

\* Павлов Н. Н., Тверская Л. В., Тверской Б. А., Чучков Е. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 33. № 6. 41 (1993).

ускорения их в квазипериодических электрических полях с периодами в десятки минут, связанных с магнитосферными суббури.

Во время сильной магнитной бури ( $|D_{st}|_{\max} = 298$  нТ) 24.03.91 г. в момент внезапного начала в течение времени  $\sim 1$  мин сформировался пояс протонов с энергиями несколько МэВ — десятки МэВ и электронов с энергиями  $\sim 15$  МэВ с максимумами на  $L \approx 2,2$ – $2,6$ . Событие было зарегистрировано на ИСЗ CRRES [4, 5]. Рассматриваемая буря развилась после сильной солнечной вспышки (балла 3В), зарегистрированной в 22.46 UT 22.03.91 г. Потоки солнечных протонов, генерированные во время вспышки, появились вблизи Земли в  $\sim 07.30$  UT 23.03.91 г. и к моменту внезапного начала бури (03.42 UT 24.03.91 г.) достигли максимума [6].

2. В настоящей работе анализируются данные ИСЗ «ГРАНАТ», на котором также было зарегистрировано необычное возрастание потоков протонов во внутренней магнитосфере во время рассматриваемой бури.

ИСЗ «ГРАНАТ» был запущен в декабре 1989 г. на орбиту с параметрами: перигей  $\sim 2$  тыс. км, апогей —  $\sim 200$  тыс. км, наклонение  $\sim 51^\circ$ , период обращения  $\sim 4$  сут. К марту 1991 г. перигей переместился на  $\sim 12$  тыс. км, а минимальное достигаемое значение  $L$ -оболочки вблизи экваториальной плоскости составило  $L \sim 3,6$ . Состав и характеристики аппаратуры НИИЯФ МГУ КС-18М, установленной на борту ИСЗ «ГРАНАТ» для измерения заряженных частиц, приведены в [7]. Аппаратура КС-18М рассчитана на проведение измерений потоков солнечных космических лучей в межпланетной среде. Большинство каналов регистрации частиц в радиационных поясах находятся в состоянии перегрузки. В настоящем исследовании используется один канал полупроводникового телескопа, регистрирующий протоны с энергиями 5,2–5,4 МэВ.

На рис. 1 представлены распределения интенсивности протонов, зарегистрированных в канале  $E_p = 5,2$ – $5,4$  МэВ, на трех пролетах спутника в магнитосфере. Моменты пролетов обозначены на графике  $D_{st}$ -вариации. Мировое, местное время и  $L$ -координаты указаны для пролета 25–26.03.91 г. На всех пролетах спутник на минимальных  $L$  находился вблизи плоскости экватора. Разница в значениях  $L$  для области радиационных поясов ( $L < 6$ ) не превышала 0,1. Набор информации осуществлялся за 20 мин. Экспериментальные точки являются усредненными за 20 мин значениями и отнесены по времени к концу 20-минутного интервала накопления информации. За время прохождения спутника через радиационный пояс значения  $L$  за 20 мин менялись незначительно. Так, для точек в максимуме интенсивности, значение  $L$  в течение интервала измерений составило  $L = 3,7 \pm 0,1$ .

Первый пролет 18.03.91 г. происходил в слабо возмущенных условиях, интенсивность протонов в максимуме достигла  $5 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1}$ . Второй пролет приходится на фазу восстановления бури, максимум  $D_{st}$ -вариации которой был достигнут в начале 25.03.91 г. Возрастание интенсивности протонов в максимуме превысило два порядка величины. Разница в интенсивностях протонов на больших  $L$  обусловлена регистрацией солнечных протонов.

На третьем пролете, который происходил на фазе развития следующей, умеренной магнитной бури ( $|D_{st}|_{\max} = 83$  нТ), интенсивность в максимуме упала до  $20 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1}$ . В дальнейшем, в течение всего апреля, значение интенсивности в максимуме менялось в 2–3 раза. Однако ввиду дрейфа орбиты и попадания 20-минутных интервалов усреднения данных на существенно различные значения  $L$  нельзя с уверенностью говорить о дальнейшей динамике инжектированных протонов.

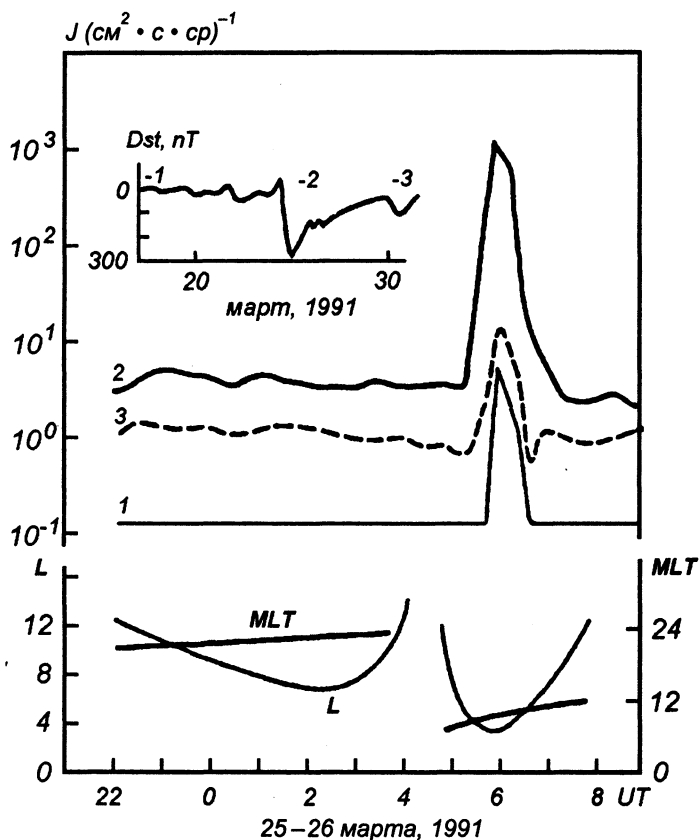


Рис. 1. Профили интенсивности протонов с энергиями  $E_p = 5,2-5,4$  МэВ, координата  $L$  (параметр Мак-Илвайна) и местное магнитное время MLT для трех пролетов ИСЗ «ГРАНАТ» в магнитосфере в марте 1991 г. Моменты пролетов обозначены отрезками на графике  $D_{st}$ -вариации (врезка)

Обнаруженное на ИСЗ «ГРАНАТ» возрастание интенсивности протонов с  $E_p = 5,2-5,4$  МэВ на фазе восстановления бури могло быть связано, как и описанная выше инжекция релятивистских электронов, с диполизацией магнитного поля. Событие, зарегистрированное на ИСЗ CRRES, впервые дает мгновенную картину инжекции частиц в момент внезапного импульса во внутренний пояс. Ниже рассматривается возможная интерпретация этого явления.

3. Ныне общепризнано, что основным механизмом формирования радиационных поясов Земли является радиальная диффузия, связанная с нарушением третьего адиабатического инварианта  $L$ . Важной причиной таких нарушений являются внезапные импульсы (резкие сжатия и расширения магнитосферы при прохождении мимо нее скачков давления и плотности солнечного ветра [8]). Детальная теория вариаций электромагнитных полей и вызываемых ими возмущений дрейфовых орбит частиц при внезапных импульсах развита в [9]. Воспользуемся этими результатами

для интерпретации явлений в радиационных поясах, сопровождавших аномально мощные импульсы 24.03.91 г.

Для простоты ограничимся процессами вблизи плоскости экватора. При этом асимметричные по долготе составляющие возмущений магнитного и электрического полей имеют компоненты

$$h_R = h_\varphi = 0, \quad h_\theta = h_0(t)R \cos \varphi, \quad (1)$$

$$E_R = \frac{1}{7} \frac{a}{c} \dot{h}_0 R^2, \quad E_\theta = 0, \quad E_\varphi = \frac{8}{21} \dot{h}_0 R^2 \cos \varphi \quad (2)$$

(здесь использованы сферические координаты с полярной осью вдоль магнитной оси; началом отсчета  $\varphi$  является плоскость полуденного меридиана,  $R$  измеряется в земных радиусах  $a$ , а индукционное электрическое поле  $E$  соответствует требованию идеальной проводимости вдоль магнитных силовых линий. Опущены аксиально-симметричные компоненты полей, так как в рассматриваемом ниже линейном приближении они дают лишь обратимые смещения частиц. Опущены также поправки к  $E$ , несущественные при малых  $L$ ).

Величина  $h_0(t)$  может быть выражена через среднее по долготе значение возмущения магнитного поля  $\bar{h}(t)$ . В рассматриваемом случае больших возмущений возникает также зависимость от степени сжатия магнитосферы:

$$h_0(t) = 0,27 \bar{h}(t) \left( \frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right), \quad (3)$$

где  $\Lambda$  — расстояние от подсолнечной точки магнитопаузы до центра Земли,  $\Lambda_0$  — значение  $\Lambda$  при спокойных условиях ( $\Lambda = 10,5a$ ).

Известно, что для частиц с точками отражения на магнитных широтах  $< 30^\circ$  (сюда относится подавляющее большинство частиц, наблюдаемых вблизи плоскости экватора) из сохранения магнитного момента и продольного действия следует сохранение приэкваториального питч-угла и пропорциональность квадрата модуля импульса напряженности магнитного поля при нарушениях  $L$ . При этом уравнения дрейфа в плоскости экватора имеют вид:

$$\dot{\varphi} \equiv \Omega = \frac{3 c \mu}{e R^2 a^2}; \quad \mu = \frac{p^2}{2 m H}, \quad (4)$$

$$\dot{R} = -\frac{8}{21} \frac{\dot{h}_0}{H_0} R^5 \cos \varphi - \frac{\mu c R^4}{e a^2} \sin \varphi. \quad (5)$$

Здесь  $e$  — заряд,  $p$  — импульс частицы (для рассматриваемых приэкваториальных частиц  $p_\perp \approx p$ ),  $m$  — релятивистская масса движения,  $\mu$  — магнитный момент частицы. Величина  $p^2/H$  (а в нерелятивистском случае — и  $\mu$ ) является адиабатическим инвариантом. В ультрарелятивистском случае  $m \sim p$  и  $\Omega$  слабо зависит от  $R$  (как  $R^{-1/2}$ ). Поскольку  $h/H_0$  ( $H_0$  — поле у экватора Земли) — малая величина, мы удерживаем члены наинизшего порядка по  $h$  (нулевого в (4) и первого в (5)). Первый член в (5) описывает электрический дрейф в индукционном электрическом поле, второй — возмущение магнитного дрейфа за счет неоднородности  $h_\theta$ .

Ниже будут приведены аргументы в пользу существования 24.03.91 г. наряду с положительным отрицательного импульса, восстановившего поле спустя время  $\sim 1$  мин. Рассмотрим качественно движение частиц во время такой пары импульсов.

В момент появления первого импульса, который, по-видимому, имел длительность  $\lesssim 10$  с, частицы на дневной стороне сместились к Земле и за счет деформации  $L$ -оболочек попали также на более близкие к Земле оболочки. Те из частиц, периоды дрейфа которых заметно меньше времени существования возмущения  $\tau$ , расползаются по кольцу, внутренний радиус которого, согласно [9], есть (для исходной оболочки  $L_0$ )  $L = L_0 + \delta L$ , где

$$\delta L = -\frac{h_{\max}}{H_0} L_0^5 \quad (6)$$

( $h_{\max}$  — наибольшее значение возмущения  $h_0(t)$ ). Частицы с малыми частотами дрейфа ( $\Omega\tau < \pm\pi/4$ ) не успевают существенно сместиться по долготе и будут вновь выброшены на более удаленные оболочки под действием отрицательного импульса. Особый интерес представляют частицы, полупериод дрейфа которых близок к  $\tau$ :  $\Omega\tau \approx \pi$ . Эти частицы за время между импульсами сместятся на ночную сторону и благодаря этому испытают под действием отрицательного импульса такое же смещение к Земле, как при положительном импульсе на дневной стороне.

В результате в области крутого спада концентрации частиц радиационных поясов произойдет следующее:

- частицы с малыми энергиями  $\Omega\tau < \pm\pi/4$  не испытают существенных изменений;
- частицы с  $\Omega\tau \gg \pi$  образуют дополнительный пояс при  $L = L_0 - \delta L$  (6), где  $L_0$  в данном случае — внутренняя граница исходного пояса;
- частицы с  $\Omega\tau \approx \pi$  проникнут глубже и образуют в узком энергетическом диапазоне новый радиационный пояс.

Переходя к количественному рассмотрению, напомним прежде всего для ориентировки читателя известные формулы периодов дрейфа соответственно нерелятивистских и ультрарелятивистских частиц:

$$T = \frac{44}{L\epsilon} \text{ мин} \quad \text{и} \quad T = \frac{88}{L\epsilon} \text{ мин}, \quad (7)$$

где  $\epsilon$  — энергия в МэВ.

Отметим далее, что в данном случае применимость линейного приближения близка к пределу и поэтому вместо формулы (6) имеет смысл пользоваться значительно более точной итерационной формулой

$$\delta L = L_f - L_i = -\frac{h_{\max}}{H_0} \left( \frac{L_f + L_i}{2} \right)^5. \quad (8)$$

Здесь  $L_i$  и  $L_f$  — начальные и конечные значения  $L$ , а использование вместо  $L_i$  среднего значения  $L$  учитывает замедление дрейфа по мере приближения к Земле.

Из эксперимента на ИСЗ CRRES мы знаем положение максимума частиц высоких энергий с  $\Omega\tau \gg 1$  (протоны с энергиями от 20 до 80 МэВ, соответственно периоды дрейфа от 1 до 0,25 мин). Пик всех таких протонов лежит при  $L = L_i = 2,55$ . Далее, можно предположить, что время  $\tau$  равно полупериоду дрейфа электронов с энергиями 15 МэВ при  $L \approx 2,15$ , так как именно здесь наблюдалось наиболее глубокое проникновение частиц в магнитосферу. Это время составляет около 100 с. Спустя трое суток пик энергичных протонов находился на  $L \approx 2,4$ .



Имеющиеся в нашем распоряжении геофизические данные указывают на высокую мощность первого импульса: на близкой к полудню станции о. Гуам амплитуда  $h$  составила 320 нТ [10]. Данные нескольких станций на ночной стороне не противоречат формуле (3) и позволяют предположить, что  $\bar{h}$  составило  $\approx 220$  нТ,  $\Lambda_0/\Lambda \approx 2$  (т.е. магнитопауза приблизилась к Земле до расстояния, вдвое меньшего, чем в спокойных условиях).

Принимая, согласно (3),  $h_{\max}/H_0 = 1/300$ , считая, что  $L_f = 2,55$ , и линейризуя (8) по  $\delta L$

$$|\delta L| = \frac{h_{\max}}{H_0} L_f^5 \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{|\delta L|}{L_f} \right), \quad (9)$$

получаем, что  $|\delta L| = 0,6$  и источник частиц находился при  $L = 3,2$ , вблизи внутренней границы области проникновения в магнитосферу солнечных космических лучей [4].

Используя ту же формулу (9) для исследования соотношений между максимумами пиков протонов с энергиями  $> 20$  МэВ и релятивистских электронов [5] (2,40 и 2,15 соответственно), получаем ту же оценку  $h_{\max} \approx 200$  нТ для отрицательного импульса. Отметим, однако, что если принять за положение максимума протонов даваемую в другой работе по данным ИСЗ CRRES [4] величину  $L = 2,55$ , то для  $h_{\max}$  получится расхождение в 1,5 раза. Отметим также, что положение пика электронов на  $L \approx 2,15$  с энергией  $\sim 15$  МэВ практически точно соответствует перемещению пика электронов с энергией  $\sim 7$  МэВ, наблюдавшегося на ИСЗ «ЭЛЕКТРОН» на  $L = 2,7$  [9].

В целом можно предположить, что основная совокупность данных о событии 24.03.91 г. удовлетворительно укладывается в общую концепцию движения частиц при парных внезапных импульсах. Уникальность события состоит в большой амплитуде импульсов, что привело к забросу частиц в области, где обычно они отсутствуют.

#### 4. Встает вопрос, как часто могут происходить такие явления в магнитосфере.

Рассматриваемая буря не относится к числу самых больших по амплитуде  $D_{st}$ -вариации. За период с 1958 по 1991 гг. было зарегистрировано 16 бурь с амплитудой  $D_{st}$ -вариации, равной или превосходящей данную. Половина из них наблюдалась в 1958–1960 годах, приходящихся на спад 19-го солнечного цикла. Предварительный анализ амплитуд внезапных начал по данным отдельных станций, приводимым в Solar Geophys Data с 1967 г., показывает, что внезапное начало 24.03.91 г. является самым мощным за весь период 1967–1991 гг. Даже в супербурях в мае 1967 г. ( $|D_{st}|_{\max} = 418$  нТ) и в марте 1989 г. ( $|D_{st}|_{\max} = 599$  нТ) амплитуды внезапных начал не превысили 100 нТ.

По-видимому, дополнительный максимум протонов с энергиями в десятки МэВ, наблюдавшийся на  $L \approx 2,2$  в 1963–1965 гг. [1], сформировался во время одного из двух внезапных импульсов с амплитудой  $> 100$  нТ, зарегистрированных в период 1958–1961 гг. [11].

Как следует из приведенных расчетов, эффект воздействия внезапного импульса на перераспределение заряженных частиц во внутренней магнитосфере зависит от его амплитуды и временных масштабов переднего и заднего фронтов. Ясно, что и импульсы с меньшими, чем 100 нТ амплитудами (по статистике, приведенной в [11], наблюдается, например, 1,8 импульса в год с амплитудами 60–100 нТ), также

могут вызвать появление «новых» поясов частиц с другими энергиями и на других *L*-оболочках.

Работа выполнена в рамках межвузовской программы «Солнечномагнитосферная физика» (СОЛМАГ).

### Литература

1. *Williams D. J.* Sources, losses, and transport of magnetospherically trapped particles. Solar-terrestrial physics / Ed. by E. R. Dyer (D. Reidel Publ. Co., Dordrecht Holland, 1970), 66.
2. *Тверская Л. В.* О границе инжекции электронов в магнитосферу Земли // Геомагнетизм и аэронавигация. **26**, 864 (1986).
3. *Vakulov P. V., Kovrygina L. M., Mineev Yu. V., Tverskaya L. V.* Variations in intensity and spectrum of energetic electrons in the Earth's radiation belts during strong magnetic disturbances // Space Res. **16**, 529 (1976).
4. *Mullen E. G., Gussenhoven M. S., Ray K., Villet M.* A doublepeaked inner radiation belt: cause and effect as seen on CRRES // IEEE Trans. Nucl. Sci. **38**, 1713 (1991).
5. *Blake B. J.* CRRES Records Creation of New Radiation Belt // STEP **2**, 1 (1992).
6. Solar-Geophys. Data, Boulder, № 560. Part 1, 15 (1991).
7. *Чучков Е. А., Ермаков С. И., Кадобнов В. Б. и др.* Первые результаты измерений потоков заряженных частиц на КА ГРАНАТ // Письма в Астрон. журн. **17**, 135 (1991).
8. *Parker E. N.* Geomagnetic Fluctuations and the Form of the Outer Zone of the Van Allen Radiation Belt // J. Geophys. Res. **65**, 3117 (1960).
9. *Тверской Б. А.* Динамика радиационных поясов Земли М.: Наука, 1968.
10. Solar-Geophys. Data, Boulder, № 561, Part 1, 91 (1991).
11. *Nakada M. P., Mead G. D.* Diffusion of Protons in the Outer Radiation Belt // J. Geophys. Res. **70**, 4777 (1965).

## Глава II

### **Магнитосферно-ионосферное взаимодействие и другие процессы в магнитосфере Земли**

#### **ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ\***

*(Представлено академиком С. Н. Верновым 2.06.1969)*

1. Одной из центральных проблем физики магнитосферы является выяснение природы электрических полей, связанных с геомагнитными возмущениями. В ионосфере такие поля концентрируются вдоль границ полярных шапок и возбуждают в каждом полушарии по две узких токовых (вероятно, холловских) струи, направленных навстречу друг другу с дневной стороны на ночную. Эти токи частично замыкаются через низкоширотные области, что указывает на проникновение поля в радиационные пояса. Эксперимент показывает, что возбуждение токовых струй связано со значительным возмущением плазмы в магнитосфере и приводит, в частности, к выдуванию холодной плазмы и инжекции во внутренний пояс частиц с энергиями  $\lesssim 10$  кэВ (до  $\approx 300$  кэВ во время наиболее мощных бурь).

Современное состояние вопроса и основные гипотезы о природе электрических полей подробно излагаются в [1], гл. 10. В данной заметке указан новый физический эффект, позволяющий объяснить ряд характерных особенностей электрических полей в магнитосфере. Как показали измерения на спутниках, рассматриваемые возмущения связаны с возникновением в области радиационных поясов асимметричного по долготе горячего плазменного кольца и его симметризацией [2].

Рассмотрим динамику этого процесса при следующих предположениях:

- а) асимметричное возмущение мало по сравнению с симметричным распределением основной массы частиц;
- б) градиент давления плазмы мал по сравнению с градиентом магнитного давления поля диполя;
- в) проводимость вдоль силовых линий в ионосфере и выше бесконечна;
- г) проводимости Холла  $\sigma_H$  и Педерсена  $\sigma_P$  отличны от нуля лишь в тонком сферическом слое ( $E$ -слой ионосферы) и не зависят от широты и долготы;
- д) плазма расположена на силовых линиях, входящих в ионосферу на высоких широтах;
- е) длительность рассматриваемых процессов такова, что сохраняются магнитный момент и инвариант продольного действия.

---

\* Тверской Б. А. ДАН СССР. Т. 188. № 3. 575–578 (1969).

При этом задача линейна и ставится по схеме, предложенной Чангом, Перлстайном и Розенблютом для анализа устойчивости поясов [3]. Горячие частицы (считаем их для простоты протонами) описываются уравнением непрерывности с учетом магнитного дрейфа в поле диполя и электрического дрейфа в самосогласованном поле с потенциалом  $U$ . В силу идеальной проводимости  $U$  постоянно вдоль силовых линий. Холодные электроны не испытывают магнитного дрейфа, а квазинейтральность обеспечивается токами вдоль силовых линий, замыкающимися через ионосферу.

Геометрическими координатами в магнитосфере являются параметр  $L$  (расстояние от вершины силовой линии до центра Земли, измеряемое в земных радиусах  $a$ ) и долгота  $\varphi$ . В ионосфере вместо  $L$  удобно ввести полярный угол  $\theta$ , отсчитываемый от оси диполя. Согласно уравнению силовой линии,  $L \sin^2 \theta = 1$ . В поле диполя большинство частиц плазменного кольца сконцентрировано вблизи плоскости экватора, что существенно упрощает задачу. Как показано в [4, § 4], для частиц с точками отражения на низких и средних широтах приближенными инвариантами являются  $\mu = EL^3$  ( $E$  — энергия частицы) и угол  $\alpha$  между скоростью и силовой линией у экватора.

Скорость магнитного дрейфа практически не зависит от  $\alpha$ . Скорость изменения  $L$  и  $\varphi$  за счет электрического дрейфа, согласно [3], при  $U = U(L, \varphi)$  также не зависит от  $\alpha$ .

Поэтому достаточно рассмотреть функцию распределения, дающую число частиц в трубке с единичным сечением в плоскости экватора и в единичном интервале  $\mu$ . Обозначим через  $n_0(L, \mu)$  невозмущенное распределение, а через  $n'(L, \mu, \varphi, t)$  — малое асимметричное возмущение.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \Omega_M(L, \mu) \frac{\partial n'}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Omega_E(L, M, \varphi, t) n_0] + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} [L \dot{L}_E(L, \mu, \varphi, t)] = 0 \quad (1)$$

приводится к виду

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \Omega_M(L, \mu) \frac{\partial n'}{\partial \varphi} + \frac{c}{H_0 a^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} L^3 n_0 = 0, \quad (2)$$

где

$$\Omega_M = \frac{3c\mu}{eH_0 a^2 L^2}, \quad \Omega_E = -\frac{cL^2}{H_0 a^2} \frac{\partial U}{\partial L}, \quad \dot{L}_E = \frac{cL^2}{H_0 a^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (3)$$

— угловые скорости магнитного и электрического дрейфа по  $\varphi$  и скорость изменения  $L$  в электрическом поле;  $H_0$  — поле у экватора Земли.

Отсутствие магнитного дрейфа у холодных электронов компенсируется токами по силовым линиям, и из условия квазинейтральности

$$j_{\parallel} = -eL^3 \int \Omega_M \frac{\partial n'}{\partial \varphi} d\mu, \quad (4)$$

где  $j_{\parallel}$  — плотность тока у границы ионосферы. Множитель  $L^3$  связан с тем, что сечение трубки у Земли (на высоких широтах) в  $2L^3$  раз меньше, чем в плоскости экватора, а токи текут из обоих полушарий.

На высоких широтах магнитное поле в ионосфере радиально, и уравнение  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  имеет вид

$$\text{div} \{ \sigma_{\Pi} \nabla U + \sigma_X [e_R \nabla U] \} = \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial R}. \quad (5)$$

Интегрируя (5) по толщине ионосферы и учитывая, что, по предположению,  $\sigma_{\Pi}$ ,  $\sigma_X$  и  $U$  от  $R$  не зависят, с учетом (4) получаем

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = - \frac{ea^2 L^3}{\sigma_{\Pi} h} \int \Omega_M \frac{\partial n'}{\partial \varphi} d\mu \quad (6)$$

(при  $\theta \ll 1 \sin \theta \approx \theta$ ).

Будем искать решения, локализованные в высокоширотных областях (ограниченные при  $\theta = 0$  и убывающие при больших  $\theta$ ).

Рассмотрим процессы с характерным временем, много меньшим периода долгого дрейфа протонов, и опустим в (2) член с  $\Omega_M$ . Ищем решение в виде  $\exp\{\gamma t - im\varphi\}$ . Из (2) находим

$$n' = \frac{imc}{H_0 a^2 \gamma} \frac{U_m(L)}{L} \frac{\partial}{\partial L} (L^3 n_0), \quad (7)$$

а из (6)

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial U_m}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\theta^2} U_m = \frac{3m^2 c^2}{\sigma_{\Pi} \gamma h H_0^2 a^2} U_m \frac{\partial}{\partial L} \left[ L^3 \int n_0 \mu d\mu \right]. \quad (8)$$

При изотропном угловом распределении частиц интеграл в (8) выражается через давление  $p(L)$  и равен  $\approx aL^4 p(L)$ .

2. Подстановкой  $U_m = \theta^{1/2} \psi_m$  (8) сводится к форме уравнения Шрёдингера с нулевой энергией и потенциалом

$$\Phi = \frac{m^2 - 1/4}{\theta^2} + \frac{3m^2 c^2}{\sigma_{\Pi} \gamma H_0^2 a h} \frac{d}{dL} [L^7 p(L)]. \quad (9)$$

Легко видеть, что если условие устойчивости Кадомцева [5] для поля диполя  $[L^7 p(L)]' > 0$  нарушается хотя бы локально, то возбуждается конвекция. Действительно, тогда можно найти достаточно малые положительные значения  $\gamma$ , при которых в области  $[L^7 p(L)]' < 0$   $\Phi$  имеет вид потенциальной ямы, отделенной от бесконечности непроницаемым барьером. При больших  $m$  яма квазиклассична, и спектр  $\gamma$  определяется формулой квантования Бора.

Рассмотрим эволюцию несимметричного кольца с  $p \sim L^{-7}$  при больших  $L$ . Положим

$$p(L) = \begin{cases} p_0 \left( \frac{L}{L_0} \right)^{-7} & (L > L_0), \\ p_0 \left( \frac{L}{L_0} \right)^{\nu} & (L \leq L_0). \end{cases} \quad (10)$$

Тогда (8) при  $\theta < \theta_0 = L_0^{-1/2}$  имеет тривиальное решение  $U_m = A(\theta/\theta_0)^m$ , а при  $L > \theta_0$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial U_m}{\partial \theta} + \left[ \lambda \left( \frac{\theta_0}{\theta} \right)^{2(\nu+6)} - \frac{m^2}{\theta^2} \right] U_m = 0; \quad \lambda = \frac{3m^2 c^2 (\nu+7) p_0 L_0^6}{\sigma_{\Pi} |\gamma| H_0^2 a h}. \quad (11)$$

Искомое решение есть

$$U_m = B J_{m/(\nu+5)} \left[ \frac{\theta_0 \sqrt{\lambda}}{\nu+5} \left( \frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\nu+5} \right], \quad (12)$$

где  $J$  — функция Бесселя. При  $\theta \gg \theta_0$   $U_m \propto \theta^{-m}$ . Спектр значений  $\lambda$  определяется из непрерывности  $U_m$  и  $U'_m$  при  $\theta = \theta_0$ .

Рассмотрим гармоники с  $m = 1$  (при этом поле наиболее эффективно проникает в область радиационных поясов и существует наиболее долго). Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\nu + 5)xJ'_{1/(\nu+5)}(x) + J_{1/(\nu+5)}(x) = 0. \quad (13)$$

При  $x \ll 1$

$$J_{1/(\nu+5)} \sim x^{1/(\nu+5)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right).$$

Отсюда находим нулевой корень (13):

$$\lambda_0 = \frac{4(\nu + 5)}{\theta_0^2}. \quad (14)$$

Соответствующая собственная функция не имеет узлов и не дает концентраций электрического поля. Остальные корни соответствуют  $x \gtrsim 1$ , и при больших  $\nu$  функции Бесселя близки к  $J_0(x)$ . При этом корни  $x_n$  близки к корням  $J_1(x)$ . Таким образом, при  $n \geq 1$

$$\lambda_n = \frac{(\nu + 5)^2}{\theta_0^2} x_n^2.$$

Все узлы соответствующих функций сконцентрированы в узкой области  $\theta$ , на которую проектируется внутренняя граница плазменного кольца. Поэтому в соответствующих районах ионосферы должны концентрироваться электрические поля и токи. Первая гармоника дает скачок потенциала в этой области и формирует холловские токовые струи, а более высокие гармоники обуславливают тонкую структуру этих струй.

Отметим, что нулевая гармоника затухает гораздо быстрее остальных. Сравним  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ :

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = 4(\nu + 5). \quad (15)$$

При вероятных значениях  $\nu \sim 5-10$  отношение  $\sim 50$ . Поэтому нулевую гармонику, которая быстро затухает и не дает концентрированных токовых систем, трудно наблюдать. При  $\sigma_{\Pi} \rightarrow 0$   $\gamma_n \rightarrow \infty$ . Это связано с пренебрежением в исходных уравнениях разделением заряда за счет сил инерции. Соответствующий критерий легко получить из сопоставления  $\Omega_M \partial n' / \partial \varphi$  с инерционными членами

$$\frac{Mc^2\gamma}{ea^2H^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{n_0}{L} \frac{\partial U}{\partial L} \right] \quad \text{и} \quad \frac{Mc^2\gamma}{ea^2H^2} \frac{\partial}{\partial L} \left[ n_0 \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right].$$

С помощью (7) и (3) находим условие

$$\gamma \ll \frac{V_T}{aL}, \quad (16)$$

где  $M$  и  $V_T$  — средняя масса и тепловая скорость протонов. С другой стороны, при  $\sigma_{\Pi} \rightarrow \infty$   $\nu_n \rightarrow 0$ . Напомним, что результаты справедливы при условии  $\gamma \gg \Omega_M$ .

Таким образом, градиент концентрации быстрых частиц вдоль траекторий магнитного дрейфа в ловушке с проводящими торцами индуцирует токи и электрические

поля, резко ускоряющие выравнивание концентрации. Этот эффект, вероятно, играет большую роль в физике магнитосферы и, в частности, может привести к быстрому проникновению плазмы солнечного ветра из пограничного слоя в хвост.

3. Конкретная динамика определяется начальными условиями. Пусть при  $t = 0$  область максимума давления имеет вид (в плоскости экватора) эксцентричного кругового кольца, более близкого к Земле на ночной стороне (такая конфигурация может возникнуть при быстром расширении магнитосферы [4]). Легко сообразить, что вследствие магнитного дрейфа на этом кольце возникнет двойной заряженный слой со скачком потенциала  $\delta U \sim \cos \varphi$ , а в ионосфере будут наведены холловские токовые струи. Количественные оценки имеют смысл лишь по порядку величины, так как наша модель не учитывает, например, суточный ход проводимости. Из (15) и (7) имеем:

$$\gamma_1 = -\frac{9(\nu + 7)}{64\pi\nu(\nu + 5)^2} \frac{\beta_0 c^2}{\sigma_{\Pi} a L_0 h}, \quad (17)$$

$$\delta U \approx \frac{9(\nu + 7)}{64\pi\nu(\nu + 5)^2} \frac{acH_0\beta_0}{L_0^2\sigma_{\Pi}h} \frac{\delta p}{p_0}, \quad I \approx \delta U h \sigma_X$$

( $\beta_0 = \frac{8\pi|\nabla p|}{|\nabla H^2|}$  при  $L = L_0$ ,  $\delta p$  — асимметричное возмущение давления). При  $\beta = 1$ ,  $\delta p \sim p$ ,  $\nu = 6$ ,  $L_0 = 5$ ,  $h = 2 \cdot 10^6$  см,  $\sigma_{\Pi} = 3 \cdot 10^5$  CGSE и  $\sigma_X = 4\sigma_{\Pi}$  получаем  $\gamma \approx 3 \cdot 10^{-4}$  с,  $\delta U \approx 2 \cdot 10^4$  В,  $I \approx 5 \cdot 10^4$  А. Возмущение магнитного поля под струей  $\sim 10^{-3}$  Э. Эти параметры соответствуют характеристикам большинства полярных возмущений, и естественно предположить, что рассмотренный эффект является причиной генерации таких электрических полей. Из (17) следует, что работа токов  $W$  зависит только от энергии плазмы и по порядку величины есть  $\delta p \cdot w$  ( $w$  — эффективный объем кольца). Приведенные значения параметров дают  $W \approx 10^{21}$  эрг.

### Литература

1. Hess W. N. The Radiation Belt and Magnetosphere. Blaisdel Publ. Co, USA, 1968.
2. Cahill L. J. J. Geophys. Res. 71, 4505 (1966).
3. Chang D. B., Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N. J. Geophys. Res. 70, 3085 (1965).
4. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
5. Кадомцев Б. Б. Сб. Вопросы теории плазмы 2. М.: Атомиздат, 1963. 132.

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В МАГНИТОСФЕРЕ И ПРОИСХОЖДЕНИЕ ЗАХВАЧЕННОЙ РАДИАЦИИ\*

## Аннотация

Согласно экспериментальным данным, существуют значительные различия в динамике захваченных частиц с периодами магнитного дрейфа, большими и меньшими чем  $\approx 1$  ч. Поведение быстро дрейфующих частиц (частиц радиационных поясов) может быть успешно описано теорией диффузии, происходящей под действием внезапных импульсов. Гораздо более быстрый перенос низкоэнергичных частиц означает присутствие низкочастотных электрических полей большой амплитуды, влияние которых на энергичные частицы обратимо. Низкочастотные поля являются одним из многих взаимосвязанных эффектов, к которым относятся вариации потоков частиц, генерация ионосферных токовых систем, развитие активных форм полярных сияний, формирование  $D_{st}$ -вариации и т.д. Возможная причина этих явлений — возникновение и развитие асимметричного по долготе плазменного кольца в области захваченной радиации. Асимметрия может быть следствием как инжекции частиц в магнитосферу, так и проникновения внешнего электрического поля в область захваченной радиации. Приняв, что продольные (текущие вдоль силовых линий) токи связывают между собой ионосферу и магнитосферу, обеспечивая квазинейтральность, и что электрический потенциал возникает благодаря замыканию этих токов в E-слое, можно показать, что электрические поля и токовые системы DP-1 и DP-2 являются низшими модами системы собственных функций задачи о релаксации асимметричного облака плазмы.

## 1. Введение

Хорошо известно, что динамика быстрых частиц в области захваченной радиации сильно зависит от периода магнитного дрейфа  $T_m$ . В условиях низкой и умеренной магнитной активности, когда максимальные возмущения поля вблизи земной поверхности не превышают нескольких сотен  $\gamma$ , критическое значение  $T_m$  составляет  $\approx 1$  ч. Энергичные частицы радиационных поясов с  $T_m < 1$  ч могут быть с успехом описаны теорией диффузии, вызванной действием внезапных импульсов [1]. При меньших энергиях ( $T > 1$  ч) скорость переноса возрастает во много раз, особенно при малых  $L$  ( $L \leq 2$ ). Очевидно, переход от быстрого к медленному переносу происходит в узком диапазоне значений  $T_m$  ( $T_m$  меняется не более чем в 2 или 3 раза). При сильном магнитном возмущении (с амплитудами  $> 1000\gamma$  в авроральной зоне) картина оказывается качественно такой же, но граница между областями быстрого и медленного переноса несколько сдвинута в сторону мень-

\* *Tverskoy B. A. Solar-Terrestrial Physics/1970 / E. R. Dyer, Ed., D. Reidel Co., Part III, 297-317, (1972). Заказной доклад на Симпозиуме по солнечно-земной физике (Ленинград, 1970). Здесь публикуется в обратном переводе с английского. — Прим. сост.*



ших  $T_m$ . В этом случае быстрый перенос частиц с энергиями в сотни кэВ имеет место в области с нижней границей  $L \approx 1,5$  [2, 3].

Поведение частиц различных энергий в области захваченной радиации может быть полностью рассчитано, если известно электрическое поле. Если давление частиц достаточно мало, а движение частиц не искажает распределения электрического поля в пространстве и времени, эта задача в принципе может быть решена на основе результатов, полученных в [4, 5]. Так, если магнитным дрейфом можно пренебречь, например для частиц плазмосферы [6], то происходит чисто электрическая конвекция. Следовательно, детальное изучение движения плазмосферы и плазмопаузы может, в частности, дать подробную информацию о крупномасштабных низкочастотных электрических полях в магнитосфере. С другой стороны, в случае быстрого дрейфа, когда электрическое поле медленно и плавно меняется за периоды порядка  $T_m$ , изменения траекторий частиц обратимы.

Исходя из этих соображений, можно считать, что помимо индукционных полей внезапных импульсов, в магнитосфере имеются более мощные низкочастотные электрические поля. Их влияние на радиационные пояса выглядит адиабатическим, но при низких энергиях частиц (больших  $T_m$ ) появляются необратимые эффекты, приводящие к быстрому переносу.

Сейчас ясно, что низкочастотные поля возникают в процессе развития сложного комплекса взаимосвязанных явлений в магнитосфере, который мы будем далее называть «элементарной бурей». Термин «элементарная буря» был предложен Биркеландом еще в начале XX столетия для обозначения комплекса явлений, связанных с магнитной бурей<sup>1)</sup>. Согласно современным представлениям, имеется тесная связь между развитием ионосферных токовых систем, активными формами полярных сияний, формированием кольцевого тока, возмущениями электронной концентрации в ионосфере, конвекцией плазмы и вариациями захваченных частиц различных энергий. Длительность отдельной суббури составляет  $\approx 1$  ч, а серия таких событий приводит к развитию главной фазы мировой бури. В результате исследований, основанных вначале на наземных [7, 8], а затем и спутниковых данных [9–12], было установлено, что когда указанные события развиваются, в магнитосфере появляется асимметричное по долготе облако плазмы. Давление в этом облаке в основном определяется протонами с энергиями  $E_p = 10\text{--}50$  кэВ. Простая оценка показывает, что разделение зарядов в таком облаке вследствие магнитного дрейфа порождает сильные электрические поля, и асимметрия не может быть стационарной [13].

Причина появления суббури еще не вполне ясна. Это событие может развиваться в условиях, когда характеристики солнечного ветра в большинстве своем по существу постоянны (например, 18 апреля 1965 г.). Имеются указания на то, что определенную роль играет ориентация межпланетного магнитного поля по отношению к полю в магнитосфере, что подтверждает концепцию пересоединения силовых линий [14]. Недавно в [11] была отмечена корреляция между развитием суббури и появлением интенсивных потоков протонов с энергиями в десятки кэВ в солнечном ветре. Вероятно, подобный эффект может быть вызван протонами тех же энергий, ускоренными между лобовой ударной волной и магнитопаузой, если интенсивность потока протонов достаточно велика.

<sup>1)</sup> В настоящее время наибольшее распространение получил термин «суббуря». Далее в тексте мы будем употреблять этот термин. — *Прим. сост.*

Таким образом, проблема возникновения и динамики частиц с большими  $T_m$  ( $> 1$  ч) может быть решена только на основе общей теории суббури. Здесь будет сделана попытка сформулировать задачи такой теории и обрисовать подходы к ее построению. Известно, что магнитные возмущения практически никогда не повторяют друг друга. Поэтому у геофизиков нет согласия даже в таких кардинальных вопросах, как топология токовой системы суббури в ионосфере. Еще более противоречивы взгляды различных авторов на детали пространственной структуры возмущений и их поведение во времени. Это значительно усложняет постановку задач теории. Необходима простая физическая идея, которая позволила бы по крайней мере систематизировать имеющийся материал.

Мы полагаем, что наиболее важный элемент механизма возмущения — это асимметрия кольцевого тока, сопровождаемая дрейфовой поляризацией, нейтрализацией возникающего заряда благодаря продольным токам и замыканием этих токов через ионосферу. Как отмечено выше, появление асимметрии может быть связано либо с инжекцией плазмы в магнитосферу, либо проникновением внешнего электрического поля в область захваченной радиации. С формальной точки зрения, эти два механизма эквивалентны. Однако, поскольку качественному описанию эффектов внешнего поля было посвящено много работ, а проблема инжекции так тщательно не рассматривалась, мы в дальнейшем будем говорить главным образом о второй возможности. Предлагаемая схема причинных связей между явлениями показана на рис. 1. В ней опущено возмущение магнитного поля плазмой, которое излишне усложнило бы задачу. Штриховыми стрелками показаны обратные связи, которыми в нулевом приближении также можно пренебречь.

На рис. 2 в идеализированном виде представлено распределение электрического потенциала в ионосфере, соответствующее токовым системам DP-1 и DP-2. Стрелки указывают направления токов Холла в ионосфере. Двухвихревая токовая система DP-2 [15], показанная на рис. 2а, соответствует распределению электрического поля, построенному согласно модели конвекции Аксфорда и Хайнса [16]. Характерная амплитуда соответствующего возмущения магнитного поля в полярной шапке составляет  $\approx 100\gamma$ . Имеются указания на то, что DP-2 коррелирует с ориентацией межпланетного магнитного поля [17].

Примем, что токовая система DP-1, соответствующая бухте, имеет четыре вихря и содержит две концентрированные токовые струи. Хотя имеются и другие точки зрения [18], эксперименты с бариевыми облаками подтверждают четырехвихревую модель с двумя струями [19]. Ширина токовых струй мала (200–400 км); амплитуды магнитных возмущений под струями имеют характерные значения порядка  $500\gamma$ , хотя иногда наблюдаются и амплитуды в тысячи  $\gamma$ . Известно, что активные формы полярных сияний (дуги шириной 1–10 км) располагаются в непосредственной близости от токовых струй DP-1.

Как показывают эксперименты с бариевыми облаками, упомянутые токовые системы представляют собой токи Холла (точнее, на Земле наблюдаются магнитные эффекты одной лишь холловской компоненты токов). Эти токи текут в E-слое ионосферы [19].

Во время суббури в магнитосфере наблюдается облако протонов с  $E_p = 10$ –50 кэВ, асимметричное по долготе. Давление этих протонов максимально в вечерне-ночном секторе. Симметризация происходит за время  $\approx 1$  ч [12]. В вечерне-

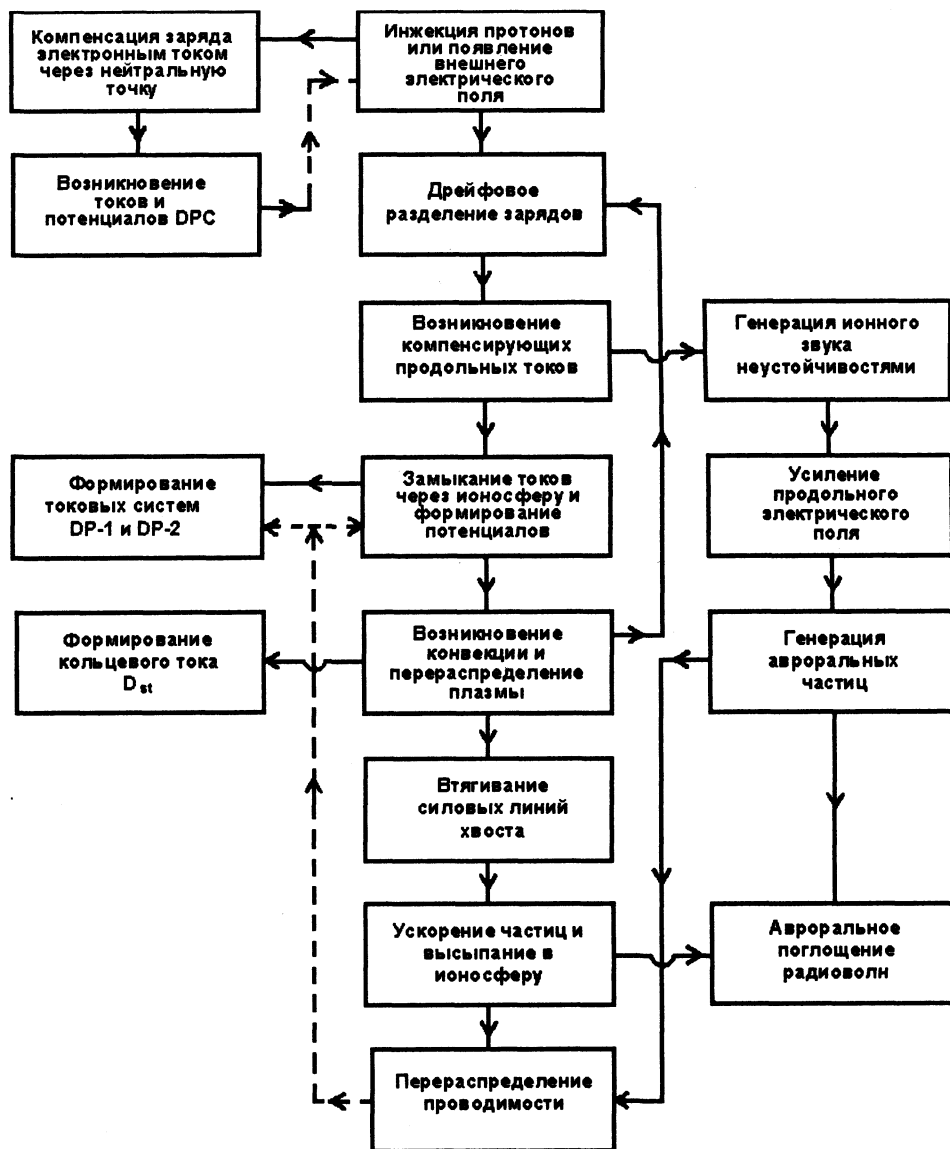


Рис. 1. Схема причинных связей явлений во время суббури

ночном секторе во время сильных возмущений наблюдается диамагнитное понижение напряженности магнитного поля [9, 10].

Временная последовательность упомянутых явлений изучена недостаточно. Изолированные умеренные и слабые возмущения возникают два-три раза в сутки. Во время мировой бури элементарные возмущения образуют серию из нескольких бухт. Общее убывание поля вблизи Земли ( $D_{st}$ ) коррелирует с суммой интенсивностей бухт за предшествующие полсутки [20].

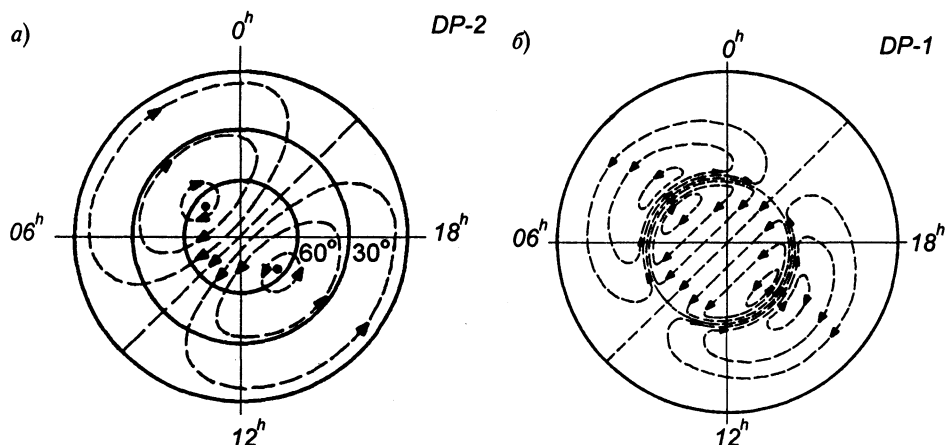


Рис. 2. Идеализированная схема токовых систем полярных возмущений: а) DP-2; б) DP-1

По нашему мнению, вышеизложенное составляет тот минимум информации, объяснение которому должна дать теория суббурь. Конечно, должны соблюдаться законы сохранения числа частиц и энергии.

Далее будут рассмотрены подходы к разработке такого рода количественной теории в согласии с моделью, показанной на рис. 1. В разделе 2 описывается инжекция протонов, а в разделе 3 — расчет эволюции асимметричного плазменного облака с учетом самосогласованного электрического поля.

## 2. Захват частиц в магнитосфере

Исследование протонов с энергиями в десятки кэВ в солнечном ветре и магнитосфере [11, 12] подтверждает предположение, что такие протоны инжектируются в магнитосферу. В литературе обсуждались несколько возможностей такой инжекции: например, течение плазмы, возникающее при пересоединении силовых линий и направленное внутрь магнитосферы [14]; неравновесное состояние пограничного слоя магнитопаузы при некоторых типах функции распределения [21]; аномальная диффузия, вызванная неустойчивостями [22]; магнитный дрейф вдоль нормали к магнитопаузе, вызванный тангенциальным градиентом поля [23]; втягивание силовых линий из хвоста в область захваченной радиации [23, 24].

Все эти механизмы, кроме последнего, имеют важную общую черту: эффективная инжекция протонов в область захваченной радиации возможна только в утренне-дневном секторе (принимается, что протоны имеют достаточно высокие энергии, так что  $T_m \ll 1$  сут., и вращением Земли можно пренебречь). На рис. 3 показаны линии равной напряженности магнитного поля в экваториальной плоскости вблизи границы зоны захваченной радиации, построенные по экспериментальным данным [25]. Эти линии являются дрейфовыми траекториями частиц с не слишком малыми питч-углами. Поскольку протоны дрейфуют в направлении, противоположном направлению вращения Земли, они будут втягиваться в магнитосферу на утренней стороне и выталкиваться из магнитосферы на вечерней стороне. Ниже, в разделе 3, мы покажем, что электрическое поле, которое возникает при инжекции, в конечном счете бу-

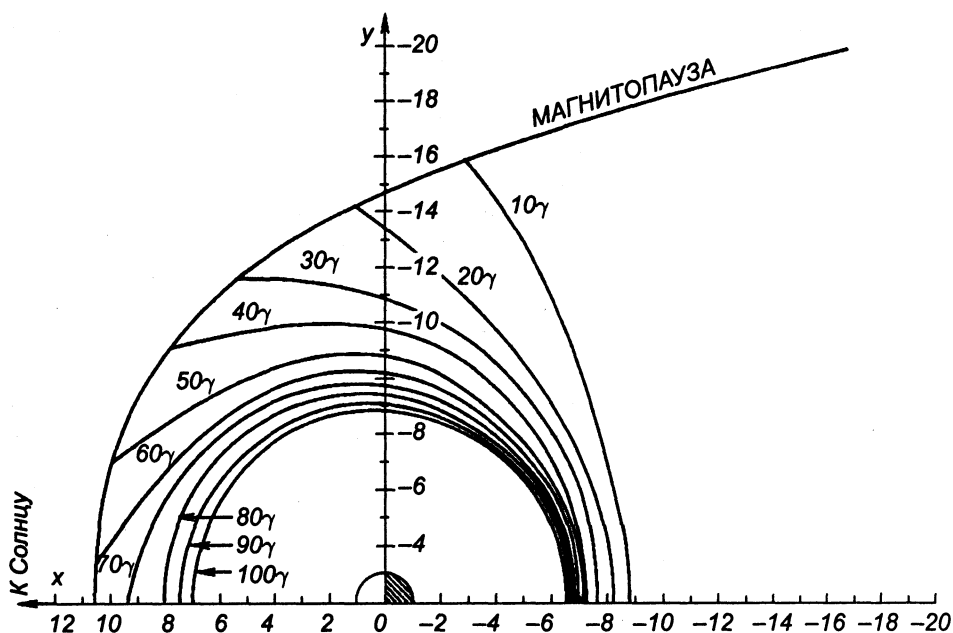


Рис. 3. Изолинии напряженности магнитосферного магнитного поля в экваториальной плоскости

дет приводить к перераспределению плазмы и внедрению частиц в зону захваченной радиации преимущественно в полуденном секторе. Это, впрочем, вторичный эффект.

Какой-либо из вышеупомянутых механизмов не может повышать плотность протонов при пересечении ими пограничного слоя магнитопаузы, поэтому поток протонов внутрь магнитосферы равен

$$S \leq N_b V_{Dn}, \quad (1)$$

где  $N_b$  — концентрация протонов в переходном слое вблизи магнитопаузы, а  $V_{Dn}$  — компонента дрейфовой скорости в магнитосфере, нормальная к ее границе. Учитывая, что напряженность поля  $H$  на границе хорошо согласуется с моделью

$$H = H_0 \cos \psi \quad (2)$$

(где  $\psi$  — угол между нормалью к границе и линией Земля—Солнце), получаем

$$S \leq N_b \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega_{H_0}} \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{ds}, \quad (3)$$

где  $v_{\perp}$  — компонента скорости частиц, перпендикулярная полю в магнитосфере,  $ds$  — дифференциал длины дуги вдоль границы, а  $\Omega_{H_0}$  — циклотронная частота. Легко показать, что для инжекции, обусловленной дрейфовым движением, при изотропном угловом распределении в переходном слое соотношение (3) становится точным равенством. Таким образом, чтобы определить инжектированный поток частиц, необходимо связать  $N_b$  с концентрацией протонов  $N_0$  на больших расстояниях от границы.

Коэффициент инжекции можно оценить с помощью диффузионно-конвективной модели с точностью до множителя порядка единицы. Согласно экспериментальным данным и теоретическим расчетам, поток плазмы вдоль границы в интервале местного времени от 6 ч до 18 ч качественно сходен с потенциальным обтеканием сферы радиуса  $\Lambda = 14R_e$  несжимаемой жидкостью: отсутствует вязкий пограничный слой,  $V_\theta \approx V_D \sin \theta$ , а плотность меняется от 12 ч к 6 ч и 18 ч всего лишь в два раза. Протоны с энергиями в десятки кэВ уносятся из этого общего потока и диффундируют поперек линий тока под влиянием турбулентных пульсаций. Поскольку ларморовский радиус протонов с энергией 30 кэВ в поле  $H \approx 10^{-4}$  Э имеет порядок характерного масштаба пульсаций (несколько тысяч км), а амплитуда пульсаций превышает среднее поле или одного порядка с ним, то коэффициент диффузии  $D$  близок к бомовскому коэффициенту:

$$D \approx D_B = 0,1 \frac{v^2}{\Omega_H}. \quad (4)$$

При этих условиях распределение плотности энергичных протонов определяется уравнением

$$D \nabla^2 N' = \mathbf{V} \cdot \nabla N' \quad (N' = N_0 - N) \quad (5)$$

с граничными условиями  $N'_\infty \rightarrow 0$  и

$$\left( D \frac{\partial N'}{\partial R} \right)_b = N'_b \frac{\overline{v_\perp^2}}{2\Omega_{H_0}} \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (6)$$

(что соответствует непрерывности потока на границе).

Диффузионный аналог числа Рейнольдса

$$\mathcal{R}_D = \frac{V_0 \Lambda}{D} \quad (7)$$

в магнитосферных условиях велик: если  $V_0 = 3 \cdot 10^7$  см/с,  $\Lambda = 10^{10}$  см,  $v = 2 \cdot 10^8$  см/с,  $H = 10\gamma$ , то  $\mathcal{R}_D \approx 100$ . Поэтому можно воспользоваться методами теории пограничного слоя. Введем ортогональную систему, в которой координаты  $s$  и  $\xi$  измеряются в меридиональных плоскостях вдоль линий потока и эквипотенциалей соответственно (осью симметрии является линия Земля—Солнце). Вблизи сферической поверхности линии потока являются окружностями,  $ds = \Lambda d\theta$  (где  $\theta$  — полярный угол),  $\psi = \theta$ , а параметр Ляме для направления, нормального линиям потока, есть  $\sin^{-2} \theta$ . При  $\mathcal{R} \gg 1$  диффузионный поток вдоль линий потока пренебрежимо мал по сравнению с конвективным потоком. Вводя вышеупомянутые координаты и преобразуя лапласиан к новым переменным, получаем

$$D \frac{\partial^2 N'}{\partial \xi^2} = \frac{V_0}{\Lambda} \frac{\partial N'}{\partial \tau}, \quad \tau = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos^3 \theta \right); \quad (8)$$

$$D \sin \theta \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \right)_b = \frac{v_\perp^2}{2\Omega_{H_0} \Lambda \cos^2 \theta} N'_b, \quad \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \right)_{\tau=0} = N_0 \delta(\tau). \quad (9)$$

При граничных условиях общего вида задача может быть решена только численно, но легко оценить соотношения между параметрами, необходимые для того, чтобы

был возможен переход к предельным случаям  $N_b = 0$  или  $(\partial N / \partial \xi)_b = 0$ . В первом случае имеем

$$\frac{\partial N'}{\partial \xi} = \frac{N_0}{\Lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{R}_D}{\pi \tau}} e^{-\xi^2 / (4 \mathcal{R}_D \tau)}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (8), находим, что  $N_b \ll N_0$  (и, следовательно, можно положить  $N_b = 0$ ) лишь при условии

$$\frac{D_B}{D} \gg \frac{1}{5} \frac{H_D}{H} \sqrt{\frac{\mathcal{R}_D}{\pi}}. \quad (11)$$

В действительности имеет место противоположное неравенство ( $D \approx D_B$ , поле  $H_0 \approx 70\gamma$  в магнитосфере,  $H_0 \approx 10\gamma$  в переходной области и  $\mathcal{R}_D \approx 100$ ). Поэтому диффузия компенсирует инжекцию, а инжектированный поток частиц определяется путем интегрирования выражения

$$dS = \frac{v_{\perp}^2 \Lambda}{2 \Omega_{H_0}} N_0 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta d\phi \quad (\phi - \text{азимутальный угол}) \quad (12)$$

по поверхности инжекции. Частицы с  $\theta \leq \pi/3$  и  $|\phi| \lesssim \pi/2$  проникают в область ква-зизахваченной радиации. Следовательно, поток инжектированных частиц по порядку величины равен

$$S \approx 2 \frac{v_{\perp}^2 \Lambda N_0}{\Omega_{H_0}}, \quad (13)$$

независимо от скорости солнечного ветра. Мы видим, что поток частиц пропорционален энергии частиц  $\mathcal{E}$ , а поток энергии пропорционален  $\mathcal{E}^2$ . При облучении магнитосферы потоком протонов с энергиями  $\mathcal{E} \approx 20$  кэВ и концентрацией  $N_0 \approx 10^{-2} \text{ см}^{-3}$  в рассматриваемую область в течение  $\approx 10^5$  с поступает около  $10^{22}$  эрг, что по порядку величины соответствует энергии умеренной бури и данным наблюдений [11].

Задача о нейтрализации заряда, внесенного в магнитосферу протонами, весьма сложна. Если турбулентной диффузии электронов через пограничный слой не происходит, компенсация заряда обеспечивается потоком электронов из ионосферы вдоль силовых линий, а в ионосфере — потоком электронов из удаленных частей хвоста, где силовые линии уходят в межпланетное поле. Таким образом, электронный ток, текущий в ионосферу, концентрируется вблизи точек, соединенных силовыми линиями. Возвратные токи, компенсирующие заряд протонов, могут распределяться по широкому интервалу широт и долгот. Поэтому вблизи упомянутых точек величина токов, растекающихся по ионосфере вокруг силовой линии, равна  $J = eS/2$ . Легко получить следующее распределение поверхностной плотности кругового тока Холла на достаточно близком расстоянии  $r$ , где возвратными токами можно пренебречь:

$$i_H = \frac{\sigma_H J}{\sigma_P 2\pi r} \quad (r \geq r_0), \quad i_H = \frac{\sigma_H J r}{\sigma_P 2\pi r_0^2} \quad (r < r_0), \quad (14)$$

где  $r_0$  — радиус области, в которой пересоединившиеся силовые линии входят в ионосферу, а  $\sigma_P$  и  $\sigma_H$  — соответственно педерсеновская и холловская проводимости  $E$ -слоя.

Возмущение магнитного поля вблизи поверхности Земли максимально при  $r = r_0$ , и без учета скин-эффекта его горизонтальная составляющая равна

$$\delta H = 0,4 \frac{\delta H}{\sigma_P} \frac{J}{r_0 c}. \quad (15)$$

Учитывая, что формула (13) дает по порядку величины количество инжектированных протонов, получаем

$$\delta H \approx \frac{\sigma_H v^2 \Lambda e N_0}{\sigma_P \Omega_{H_0} r_0 c}. \quad (16)$$

Известно, что вблизи рассматриваемой точки имеют место особые формы магнитной и авроральной активности [26, 27]. В частности, иногда даже в спокойные дни наблюдаются кольцевые DPC-токи с амплитудой горизонтальной компоненты возмущения  $\approx 50\gamma$  [28]. Во время возмущения  $\delta H_{DPC}$  возрастает в несколько раз. Из этих данных следует, что  $r_0 \approx 500$  км. Полагая  $\sigma_H/\sigma_P \approx 3$  и используя вышеприведенные оценки остальных параметров, получаем

$$\delta H_{DPC} \approx 10^4 N_0 \quad (\text{в } \gamma), \quad (17)$$

что находится в разумном согласии с геофизическими наблюдениями. Направление тока также соответствует наблюдаемому. Таким образом, вариации магнитного поля DPC являются мерой интенсивности инжекции протонов.

### 3. Конвекция плазмы в самосогласованном электрическом поле и формирование токовых систем

Теперь рассмотрим дальнейшую эволюцию плазменного облака, которая является результатом инжекции протонов в область квазизахваченной радиации. Вычисление реально существующего поля слишком сложно; вместо этого мы рассмотрим полуфеноменологическую модель с заданной плотностью источников плазмы. Согласно схеме, показанной на рис. 1, мы должны исследовать конвекцию плазмы с учетом самосогласованного электрического поля.

Будем считать, что магнитное поле является дипольным и что оно слабо искажено присутствием плазмы. Будем моделировать  $E$ -слой ионосферы сферической оболочкой толщиной  $h \approx 30$  км с постоянными проводимостями Педерсена  $\sigma_P$  и Холла  $\sigma_H$ . Проводимость вдоль поля в области под ионосферой обращается в ноль; в ионосфере и выше она бесконечна, так что магнитные силовые линии эквипотенциальны. Выше  $E$ -слоя  $\sigma_H = \sigma_P = 0$ . Учитывая, что основные электродинамические процессы суббури развиваются на высоких широтах, примем для простоты, что  $\sin \theta \approx 0$  ( $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от магнитной оси) и что силовые линии направлены радиально. Кроме этих допущений, будем пользоваться некоторыми результатами численных расчетов дрейфа частиц в магнитном поле; а именно, поскольку для большинства захваченных частиц зеркальные точки расположены выше ионосферы, будем считать величину  $\mu = \mathcal{E}L^3$  ( $\mathcal{E}$  — энергия частицы, а  $L$  — параметр оболочки) и экваториальный питч-угол адиабатическими инвариантами [23], а также примем, что угловая скорость магнитного дрейфа слабо зависит от питч-угла [29]. Для протонов с данным  $\mu$  угловая скорость дрейфа равна

$$\Omega_m = \frac{3c\mu}{eH_e a^2 L^2}. \quad (18)$$



Здесь  $H_e \approx 0,32$  Э — напряженность поля вблизи экватора Земли, а  $L$ , как обычно, измеряется в земных радиусах  $a$ , так что  $aL$  есть эквивалент величины  $L$  в километрах.

Конвекция и поле вычисляются по модели, первоначально предложенной для анализа устойчивости радиационных поясов [30] и использованной автором [31] для изучения конвекции. (Аналогичные уравнения рассматривались в [32, 33].) Принимая, что разделение зарядов вызывается только магнитным дрейфом, а силами инерции можно пренебречь, запишем уравнение переноса протонов. Введем  $L$  и долготу  $\varphi$  как координаты. Функция распределения протонов  $n(\mu, L, \varphi, t)$  определена таким образом, что  $n d\mu$  дает число протонов со значениями  $\mu$  в интервале  $(\mu, \mu + d\mu)$  внутри силовой трубки единичного поперечного сечения в экваториальной плоскости. Если ввести электростатический потенциал  $U(L, \varphi, t)$ , постоянный вдоль силовых линий, то из уравнения электрического дрейфа легко получаются следующие выражения для  $\dot{L}$  и  $\dot{\varphi}$ :

$$\dot{L} = -\frac{cL^2}{H_e a^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{cL^2}{H_e a^2} \frac{\partial U}{\partial L}. \quad (19)$$

Значения  $\dot{L}$  и  $\dot{\varphi}$  строго независимы от положения частицы на силовой линии, а  $\Omega_m$  почти не зависит от него, благодаря чему можно ввести функцию распределения  $n$ , проинтегрированную по силовой трубке. Уравнение непрерывности для  $n$  в координатах  $(L, \varphi)$  имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \Omega_m \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi} n + \frac{1}{L} \dot{L} n = q(L, \varphi, \mu, t), \quad (20)$$

где  $q$  есть плотность источников на единичную трубку и единичный интервал  $\mu$ .

Интегрируя уравнение (19) по  $\mu$ , получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \int \Omega_m \frac{\partial n}{\partial \varphi} d\mu + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi} N + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} L \dot{L} N = \int q d\mu \equiv Q_p. \quad (21)$$

Изменения числа протонов  $N$  в трубке должны компенсироваться изменениями числа электронов: если бы такой компенсации не было, разделение зарядов из-за дрейфа наблюдаемых асимметричных облаков создавало бы разность потенциалов  $\approx 10^{13}$  В. Примем, что электроны являются холодными. Тогда их электрический дрейф будет таким же, как дрейф протонов в (19), а магнитного дрейфа не будет, но окажется возможным поток электронов в ионосферу вдоль силовых линий. Обозначив через  $j_{||}$  плотность электронного тока вблизи верхней границы E-слоя и приняв во внимание тот факт, что в трубке число электронов равно числу протонов, получим:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi} N + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} L \dot{L} N = -\frac{1}{\Lambda_e L^3} j_{||} + Q_e. \quad (22)$$

Мы также приняли во внимание то обстоятельство, что вблизи границы ионосферы поперечное сечение трубки равно  $L^{-3}/2$  см<sup>2</sup> и что ток направлен из обоих полушарий. Вычитая (21) из (20), находим

$$j_{||} = eL^3 \left( \int \Omega_m \frac{\partial n}{\partial \varphi} d\mu + Q_e - Q_p \right). \quad (23)$$

Уравнение  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  в ионосфере при постоянных  $\sigma_H$  и  $\sigma_P$ , при  $\sigma_{\parallel} \rightarrow \infty$  и  $\sin \theta \approx \theta$  приобретает вид

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{a^2}{\sigma_P} \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial R}. \quad (24)$$

Интегрируя (24) по толщине Е-слоя  $h$  и учитывая, что вблизи Земли

$$L = \sin^{-2} \theta \approx \theta^{-2},$$

получаем

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \left[ \frac{ea^2 L^3}{\sigma_P h} \left( \int_0^{\infty} \Omega_m \frac{\partial n}{\partial \varphi} d\mu + Q_e - Q_p \right) \right]_{L=\theta^{-2}}. \quad (25)$$

Уравнения (20) и (25) образуют замкнутую систему для самосогласованных  $n$  и  $U$ .

Выделим в (20) и (25) осесимметричные части  $\bar{n}$  и  $\bar{U}$  этих переменных (путем усреднения по  $\varphi$ ) и асимметричные части  $\tilde{n} = n - \bar{n}$ ,  $\tilde{U} = U - \bar{U}$ . В результате получим

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \frac{1}{L} \left\langle \frac{\partial}{\partial L} L \tilde{L} \tilde{n} \right\rangle_{\varphi} = \bar{q}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \right) = \left[ \frac{eaL^3}{\sigma_P h} \langle Q_e - Q_p \rangle_{\varphi} \right]_{L=\theta^{-2}}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\Omega_m + \bar{\varphi}) \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \varphi} + \bar{n} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{\varphi} + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} L \tilde{L} \tilde{n} + \frac{1}{L} \left( \frac{\partial}{\partial L} L \tilde{L} \tilde{n} - \left\langle \frac{\partial}{\partial L} L \tilde{L} \tilde{n} \right\rangle_{\varphi} \right) = \tilde{q} \quad (28)$$

и

$$\frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \varphi^2} = \left[ \frac{ea^2 L^3}{\sigma_P h} \left( \int_0^{\infty} \Omega_m \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \varphi} d\mu + Q_e - Q_p - \langle Q_e - Q_p \rangle_{\varphi} \right) \right]_{L=\theta^{-2}}. \quad (29)$$

Рассмотрим эту систему в линейном приближении, считая  $\tilde{n}$  и  $\tilde{U}$  малыми первого порядка. Кроме того, примем, что в течение времени  $t_{es}$  развития суббури для полного угла поворота выполняется условие  $(\Omega_m + \bar{\varphi}) t_{es} \ll 1$ , а также пренебрежем вторым членом в (28) и квадратичным по  $L$  и  $\tilde{n}$  членом в (26).

Тогда

$$\tilde{n} = \int_0^t \bar{q} dt + (n)_{t=0}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} L \tilde{L} \tilde{n} + \bar{n} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{\varphi} = \bar{q}, \quad (31)$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \varphi^2} = \left[ \frac{ea^2 L^3}{\sigma_P h} \left( \int_0^{\infty} \Omega_m \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \varphi} d\mu - \tilde{Q}_p \right) \right]. \quad (32)$$

В соответствии с результатами раздела 2 мы учитываем, что  $Q_e$  локализовано вблизи  $\theta = 0$ .

Система (30)–(32) допускает несложное исследование в частном случае, когда

$$\bar{n} = f(t)F(L, \mu) \quad (33)$$

(т.е. распределение  $\bar{n}$  в пространстве остается неизменным). Согласно разделу 2, инжекция происходит в широком диапазоне долгот в утренне-полуденном секторе. Поэтому будем рассматривать случай крупномасштабных долготных гармоник с  $\tilde{q} \sim \cos \varphi$  и  $\varphi = 0$  в момент  $9^h$  LT. При необходимости мы могли бы аналогичным образом рассмотреть случай  $\tilde{q} \sim \cos m\varphi$  или  $\sin m\varphi$  с  $m > 1$ . Из (32) следует, что  $\tilde{U} \sim \sin \varphi$ . Исключая  $\bar{n}$ , получаем

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \theta \partial t} \right) - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \left[ \frac{3c^2}{\sigma_P h H_e^2 a^2} \tilde{U} \frac{\partial}{\partial L} L^3 \int_0^\infty \bar{n} \mu d\mu + \frac{3cL}{\sigma_P h H_e} \int_0^\infty \tilde{q} \mu d\mu \right]_{L=\theta^{-2}}. \quad (34)$$

Интегралы по  $\mu$  в (34) связаны с давлением  $\bar{P}$  в экваториальной плоскости через угловое распределение. Если это распределение изотропно, то первый интеграл равен  $a\bar{P}L^3$ , а второй равен  $a\tilde{P}L^3$ , где  $\tilde{P}$  есть скорость изменения асимметричной части давления, которое создавалось бы источниками, если бы они действовали сами по себе.

Введем обозначения

$$\beta(t) = \frac{8\pi P_0(t)L_0^6}{H_e^2}, \quad \Gamma = \frac{3c^2}{8\pi \sigma_P h a}, \quad \Theta(\theta) = \frac{1}{L^6 P_0} \left[ \frac{\partial}{\partial L} L^7 \bar{P} \right], \quad (35)$$

где  $L_0$  — координата  $L$ , соответствующая максимуму  $P(L, t)$ , а  $P_0 = \bar{P}(L_0, t)$ . Перепишем (34) в виде

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \theta \partial t} \right) - \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \Gamma \beta(t) \Theta(\theta) \tilde{U} = \frac{3ac}{\sigma_P h H_e} \theta^{-10} \tilde{P}(\theta, t). \quad (36)$$

Граничные условия, определяющие  $\tilde{U}$ , таковы: при очень малых  $\theta$  (на пересоединившихся силовых линиях)  $\tilde{U} = 0$ , а при  $\theta \rightarrow \pi/2$  решение должно быть четной функцией по отношению к экватору. Можно показать, что в пределах ошибки, не превышающей нескольких процентов, эти условия могут быть заменены требованием  $\tilde{U} \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow 0$  и при  $\theta \gg \theta_0 = L_0^{-1/2}$ . Если  $\bar{P}(L)$  убывает быстрее, чем  $L^{-7}$  хотя бы в узком интервале  $L$ , возникает неустойчивость конвективного типа [31]. Известно, что условие  $P \sim L^{-7}$  соответствует естественному конвективному равновесию плазмы низкого давления, захваченной в дипольном поле.

Обозначим через  $\lambda_n$  и  $U_n$  соответственно собственные значения и собственные функции задачи

$$\frac{d}{d\theta} \left( \theta \frac{dU_n}{d\theta} \right) - \frac{1}{\theta} U_n = -\lambda_n \theta \Theta(\theta) U_n, \quad U_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \theta \rightarrow 0, \infty \quad (37)$$

и представим решение уравнения (36) в виде разложения по  $U_n$ :

$$\tilde{U} = \sum b_n(t) U_n(\theta). \quad (38)$$

Из (36) можно получить уравнение

$$\lambda_n \dot{b}_n + \Gamma \beta(t) b_n = - \frac{3ac}{\sigma_P h H_e} \int_0^\infty \theta^{-9} \dot{P}(\theta, t) U_n(\theta) d\theta \cdot \left( \int_0^\infty \theta \Theta(\theta) U_n^2(\theta) d\theta \right)^{-1} \equiv S_n(t), \quad (39)$$

которое, если ввести дополнительное граничное условие  $\tilde{U} = 0$  при  $t = 0$ , имеет решение

$$b_n = - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t S_n(t') \exp \left\{ - \frac{\Gamma}{\lambda_n} \int_{t'}^t \beta(t'') dt'' \right\} dt'. \quad (40)$$

Легко видеть, что похожий результат (с другим  $S_n$  и с  $\beta = \text{const}$ ) получился бы, если бы было учтено внешнее электрическое поле. Таким образом, в случае некоторого внешнего асимметричного воздействия на плазму, захваченную в магнитном поле, при наличии проводящих концевых пластин будет возбуждаться дискретный спектр электрических полей определенных конфигураций. Если воздействие исчезнет, поля будут затухать с временными постоянными

$$\tau_n = \frac{\lambda_n}{\Gamma \beta_f} = \frac{8\pi \lambda_n \sigma_P h a}{3c^2 \beta_f} \quad (41)$$

(где  $\beta_f$  — значение  $\beta$  при отсутствии воздействия).

Для более подробного исследования выберем конкретную форму  $\Theta(\theta)$  и положим

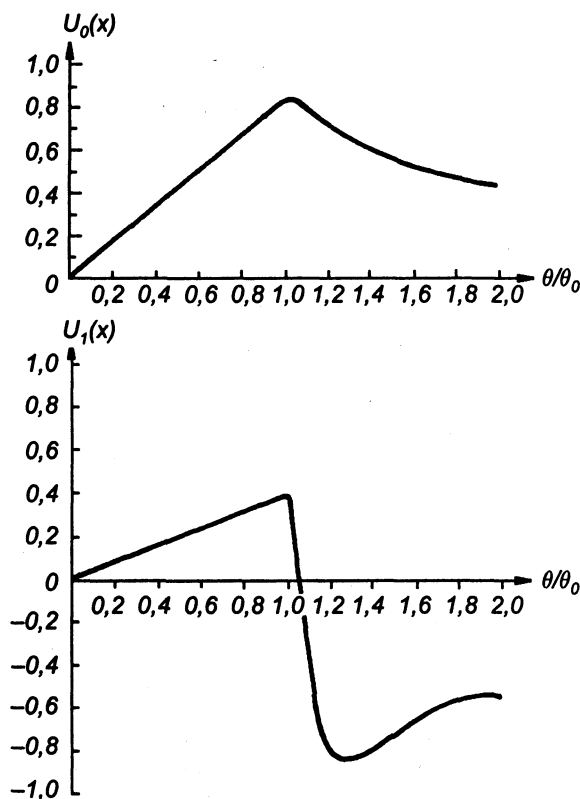
$$P = P_0 \begin{cases} \left( \frac{L_0}{L} \right)^{7-\alpha} & (L \geq L_0), \\ \left( \frac{L}{L_0} \right)^\nu & (L < L_0) \end{cases} = P_0 \begin{cases} \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{2(7-\alpha)} & (\theta \leq \theta_0), \\ \left( \frac{\theta_0}{\theta} \right)^{2\nu} & (\theta > \theta_0). \end{cases} \quad (42)$$

В этом случае (см. [31])

$$U_n = J_{1/(2-\alpha)} \left\{ \frac{\theta_0 \sqrt{\alpha \lambda_n}}{2-\alpha} \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{2-\alpha} \right\} \quad (\theta \leq \theta_0), \quad (43)$$

$$U_n = J_{1/(\nu+5)} \left\{ \frac{\theta_0 \sqrt{\lambda_n(\nu+7)}}{\nu+5} \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{\nu+5} \right\} \quad (\theta > \theta_0).$$

Значения  $\lambda_n$  определяются из условий непрерывности  $U_n$  и  $dU_n/d\theta$  при  $\theta = \theta_0$ . Экипотенциали  $u_0(\theta) \sin \varphi$  в ионосфере и конвективные траектории в экваториальной плоскости соответствуют токовой системе DP-2 (рис. 2а). Гармоники  $u_1(\theta) \sin \varphi$  образуют четырехвихревую систему. Если же асимптотический закон убывания давления при  $L > L_0$  значительно отклоняется от условия нейтрального равновесия  $P \sim L^{-7}$  ( $\alpha \geq 0,2$ ), то концентрированные струи на границах вихрей исчезают, и низкочастотные системы выглядят слабыми. Таким образом, близость  $\alpha$  к нулю ( $\alpha < 0,2$ ) выглядит как необходимое условие формирования бухты в результате действия рассматриваемого механизма. Структура токовой системы очень слабо зависит от  $\nu$ : если  $\alpha$  мало, то при изменении  $\nu$  от 5 до 0 ширина токовой струи DP-1 возрастает от  $\approx 0,1\theta_0$  до  $\approx 0,2\theta_0$ . Графики  $u_0$  и  $u_1$  приведены на рис. 4.

Рис. 4. Графики функций  $U_0$  и  $U_1$  (см. (37))

Собственные значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  при малых  $\alpha$  равны соответственно

$$\lambda_0 = \frac{2(\nu + 5)}{(\nu + 7)\theta_0^2}, \quad \lambda_1 = \frac{15(\nu + 5)^2}{(\nu + 7)\theta_0^2}. \quad (44)$$

Значение  $\lambda_0$  примерно в 50 раз превышает значение  $\lambda_1$ . Высшие гармоники имеют  $\lambda_n = \lambda_1 n^2$ .

Постоянная времени  $\tau_0$  для  $\sigma_P = 5 \cdot 10^5$  единиц СГС,  $L_0 = 5$  и толщине  $h = 3 \cdot 10^6$  см очень мала ( $\approx 50\beta^{-1}$  с). Как было отмечено во Введении, спектр низкочастотных флуктуаций резко обрывается по истечении менее чем одного часа, что указывает на постепенное изменение мощности источника с характерным временем  $\gtrsim 3 \cdot 10^3$  с. В этом случае амплитуда  $b_0(t)$  в формуле (40) хорошо коррелирует с  $S_n(t)$ . Если, в частности, временная зависимость  $\tilde{q}(t)$  совпадает с зависимостью  $\bar{q}(t)$  (т.е.  $\tilde{q}(t) \sim \bar{q}(t)$ ), то

$$b_0 = \text{const} \frac{H_e \alpha^2 \dot{\beta}}{L_0 c \beta}. \quad (45)$$

Величина  $\tau_1$  много больше  $\tau_0$  (например,  $\tau_1 = 10^3 \beta^{-1}$  с) и одного порядка с характерным временем изменения  $\bar{q}$ . Следовательно, система DP-1 развивается с заметной задержкой по сравнению с началом инжекции. Если время инжекции

$T_i \leq \tau_1$ , то амплитуда бухты равна

$$b_{1 \max} = \text{const} \frac{3acH_e}{8\pi\sigma_P hL_0^2} \Delta\beta. \quad (46)$$

Поскольку  $D_{st}$ -вариация может быть выражена через  $\beta$  [34], для нашей частной модели  $P(L)$ , включающей скин-эффект,

$$D_{st} \approx \frac{H_e (\nu + 7)}{L_0^3 4(\nu + \beta)} \Delta\beta. \quad (47)$$

Получается, что  $D_{st}$ -вариация должна коррелировать с суммой амплитуд бухт за период от начала бури до данного момента, в согласии с результатами статистического анализа [20].

В нашей модели верный знак поля DP-2 следует из того, что инжекция происходит в утренне-полуденном секторе. Кроме того, знак DP-1 зависит от распределения  $\tilde{q}$  по  $L$ . Если инжекция имеет место главным образом во внешней части кольца, где  $dP/dL < 0$ , то инжекция из утренне-полуденного сектора также соответствует наблюдаемому распределению поля. Если инжекция происходит в области, где  $dP/dL > 0$  ( $L < L_0$ ) (что, конечно, трудно вообразить), то ее максимум должен приходиться на вечерне-полуночный сектор. На первый взгляд, представление об инжекции между утренним и полуденным секторами кажется противоречащим экспериментальным данным, согласно которым максимальная концентрация протонов на фазе асимметрии наблюдается между вечером и полночью [9, 10, 12]. Но плотность источников не должна отождествляться с плотностью частиц. Асимметрия плотности зависит не только от места, где происходит инжекция, но и от конвективного перераспределения, и, как будет показано ниже, суммарный эффект этих факторов *соответствует* результатам наблюдений.

Чтобы оценить амплитуды электрических и магнитных полей DP-1 и DP-2 (т. е. константы в (44) и (45)), положим  $\tilde{q} \propto L^{-7}$  при  $L > L_0$  и  $\tilde{q} = 0$  при  $L < L_0$ , а также  $\tilde{P}(L_0) \approx \dot{P}(L_0)$ . В этом случае для амплитуды разности потенциалов внутри кольца в системе DP-2 и на струях в системе DP-1 (во время инжекции) получаем

$$\delta U_0 \approx \frac{4 H_e a^2 \dot{\beta}}{7 L_0 c \beta}, \quad \delta U_1 \approx 5 \cdot 10^{-4} \frac{acH_e \Delta\beta}{\sigma_P hL_0^2} \text{ единиц СГС.} \quad (48)$$

Разность потенциалов внутри кольца в системе DP-1 равна  $1,4\delta U_1$ . В полярной шапке электрические поля систем DP-1 и DP-2 почти однородны и имеют одно и то же направление. Возмущения магнитного поля, вызванные токами Холла и, в частности, скин-эффектом, равны соответственно

$$\delta H_{DP2} \approx 3,5 \frac{\sigma_H a h H_e}{c^2 \sqrt{L_0}}, \quad \delta H_{DP1} \approx 2 \cdot 10^{-3} \frac{H_e \sigma_H}{L_0^{3/2} \sigma_P} \Delta\beta. \quad (49)$$

Под струей системы DP-1 возмущение увеличивается в  $3,5\theta_0/\Delta\theta$  раз (здесь  $\Delta\theta$  — ширина струи в градусах широты). Амплитуды, рассчитанные исходя из значений  $\delta_p = 5 \cdot 10^5$  единиц СГС,  $h = 3 \cdot 10^6$  см,  $L_0 = 5$ , находятся в разумном согласии с экспериментальными данными — с  $\beta = 0,5$ ,  $\dot{\beta} = 10^{-4}$ ,  $\Delta\beta = 0,3$  и  $\Delta\theta = 3^\circ$ ,  $\delta H_{DP2} = 40\gamma$ ,  $\delta H_{DP1} = 10\gamma$ ,  $(\delta H_{DP1})_{\max} = 350\gamma$ . В пределах применимости линейного приближения (т. е. при  $\beta \rightarrow 1$ ) и при  $L_0 \approx 3$  амплитуда  $(\delta H_{DP1})_{\max}$

может превышать 1000  $\gamma$ . Разности потенциалов  $\delta U_0$  и  $\delta U_1$  при умеренных условиях имеют соответственно порядки величины 30 и 15 кВ. Электрическое поле в струе при  $\Delta\theta = 3^\circ$  порядка 50 мВ/м, что согласуется с измерениями [19]. В случае быстрой инжекции наибольшие значения разности потенциалов в области радиационных поясов, вероятно, не могут превосходить нескольких сотен киловольт. Энергия токов в ионосфере, по-видимому, одного порядка с энергией бури.

Отметим важную черту распределения токов вдоль силовых линий. Из уравнений (24), (25) и (37) следует, что

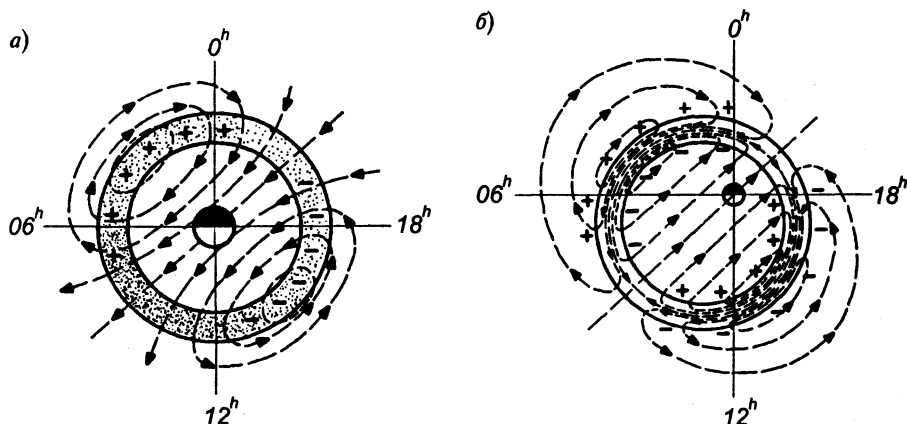
$$j_{||n} = \frac{h\sigma_P\lambda_n}{a^2} b_n(t)\Theta(\theta)U_n(\theta)\sin\varphi. \quad (50)$$

В модели, рассмотренной выше, области больших  $j_{||}$ , оказываются на порядок уже, чем области токовых струй, и находятся вблизи экстремума потенциала (т. е. в областях слабого электрического поля). Токи  $j_{||}$  ограничивают струю с севера и юга. Северный и южный токи в северном полушарии, соседствующие с утренней струей, направлены соответственно к Земле и от Земли. Токи, примыкающие к вечерней струе, имеют обратные направления. Геометрия продольных токов очень похожа на распределение протонных и электронных сияний, связанных с бухтами [27]. Поэтому предположение, что авроральные частицы ускоряются продольными токами, кажется очень привлекательным. Плотность тока  $j_{||}$  в утренней бухте, согласно формуле (49), порядка 1 единицы СГС. Если эффективная проводимость вдоль силовой линии в ионосфере (до высот порядка 1000–2000 км) понижается до  $\approx 10^8$  единиц СГС (столкновительная проводимость составляет  $\approx 10^{11}$ ), должна возникнуть разность потенциалов  $\approx 1$  кВ; этого достаточно для генерации авроральных частиц. Известно, что при определенных условиях продольные токи могут возбуждать ионно-акустическую турбулентность, которая уменьшает проводимость до величины

$$\sigma_{||} \approx \omega_0 \frac{W_e}{E^2}, \quad (51)$$

где  $\omega_0$  — электронная плазменная (ленгмюровская) частота,  $W_e$  — плотность энергии тепловых электронов, а  $E$  — амплитуда электрического поля ионно-акустических волн. При  $n_e \approx 10^4$ ,  $T_e \approx 2000^\circ$  и  $\delta = 10^8$  единиц СГС амплитуда  $E$  должна быть порядка 2 мВ/см. Частота волны имеет порядок величины ионной плазменной частоты (20 кГц при плотности протонов  $\approx 10^4$  см $^{-3}$ ). Очень интересно было бы обнаружить такие колебания над авроральной зоной. Если бы они наблюдались, происхождение активных авроральных форм можно было бы объяснить на основе предложенной общей модели развития суббурь.

Выше было показано, что главные характеристики суббурь (симметрия, энергетика, пространственные и временные масштабы) могут быть найдены с достаточной точностью из электродинамики асимметричного плазменного облака, захваченного дипольным полем, при наличии проводящих концевых пластин. Вышеупомянутые эффекты (прежде всего, формирование систем DP-1 и DP-2) имеют прозрачный физический смысл, который проиллюстрирован на рис. 5. Рис. 5а схематически представляет распределение давления в кольце плазмы вблизи максимума при асимметричной инжекции (вид с северного полюса в направлении экваториальной плоскости). Показаны поляризация такого плазменного кольца под влиянием магнитного дрейфа и возникающая при этом картина эквипотенциалей. Конвекция плазмы направлена вдоль эквипотенциалей в направлении стрелок. Вследствие



**Рис. 5.** Модель возбуждения магнитосферной конвекции при асимметричной инжекции плазмы. Две concentрические окружности изображают границы плазменного кольца. Плотность точек условно передает распределение плотности. Знаки + и – соответствуют зарядам поляризации. Штриховыми линиями показаны эквипотенциалы, которые одновременно являются линиями конвективного потока

конвекции, кольцо плазмы начинает двигаться в направлении максимума плотности источников и становится эксцентрическим по отношению к Земле (рис. 5 б). Наиболее интенсивное конвективное вторжение происходит в вечерне-полуночном секторе. При таком типе асимметрии на краях кольца происходит поляризация. Во внутренней области возникающее электрическое поле стремится вернуть плазму в исходное положение. На первой стадии амплитуда сдвига всегда больше, чем на второй. Поэтому возникают среднее и среднеквадратичное смещения частиц во внутренней части кольца. Серия возмущений приводит к диффузии плазмы внутрь магнитосферы.

Картины, показанные на рис. 5 а и 5 б, относятся соответственно к возмущениям типов DP-2 и DP-1, которые, согласно приведенному описанию, выглядят как взаимосвязанные фазы эволюции асимметричного плазменного облака. Вышеупомянутая последовательность событий (асимметричное втягивание плазмы в вечерне-полуночный сектор и обратное движение во время развития бухты) прослеживается и по наземным данным [31], и по спутниковым измерениям [9].

Представленная здесь теория не претендует на высокую точность, и, конечно, результаты расчетов во многих случаях не согласуются с реальными возмущениями. Эти противоречия могут быть частично объяснены сложностью распределения проводимости в ионосфере и тем, что ионосфера изменяется под влиянием выпадающих частиц и нелинейных искажений поля в процессе конвекции. Ни один из этих факторов не был учтен в этой простой теории. Ближе всего к идеальным оказываются условия в освещенной полярной шапке вблизи солнцестояния, когда проводимость в высокоширотной области не слишком сильно меняется с местным временем [32]. Так или иначе, оценки порядка величины электрических полей, их топология и изменение во времени выглядят вполне разумными.

Есть надежда, что в дальнейшем более подробные данные наблюдений протонов с энергиями порядка десятков кэВ, плазмосферных вариаций, ионно-акустической турбулентности и авроральных частиц позволят выявить на основе этой теории ряд



ранее неизвестных факторов и построить удовлетворительную полуэмпирическую теорию, описывающую динамику всех компонент захваченной радиации.

### Литература

1. *Tverskoy B. A.* Main Mechanisms in the Formation of the Earth's Radiation Belts, in *Magnetospheric Physics*, ed. by D. J. Williams and G. D. Mead (Am. Geophys. Un., 1969), 219 (also Rev. Geophys. 7, 219 (1969a)).
2. *Winckler J. R.* The Origin of Energetic Electrons in the Earth's Environment, in *Proceedings of the International Seminar on the Space Physics Investigation by Cosmic Rays*, Leningrad, 133 (1969).
3. *Vernov S. N., Kuznetsov S. N., Sosnovets E. N., Tverskaya L. V., Tel'tsov M. V., Khorosheva O. V.* Acceleration of Electrons and Protons in the Earth's Magnetosphere During Magnetic Disturbances // *Space Research XI*, 256 (1971).
4. *Alfven H., Fälthammar C.-G.* *Cosmical Electrodynamics* Oxford: Clarendon Press, 1963.
5. *Fälthammar C.-G.* Effects of the Time-Dependent Electric Fields on Trapped Radiation // *J. Geophys. Res.* 70, 2503 (1965).
6. *Gringauz K. I.* Low-Energy Plasma in the Magnetosphere, in *Magnetospheric Physics*, ed. by D. J. Williams and G. D. Mead (Am. Geophys. Un., 1969), 339 (also Rev. Geophys. 7, 219 (1969)).
7. *Fejer J. A.* The Effects of Energetic Trapped Particles on Magnetospheric Motions and Ionospheric Current // *Can. J. Phys.* 39, 1409 (1961).
8. *Akasofu S.-I., Chapman S.* On the Asymmetric Development of Magnetic Storms // *Planetary Space Sci.* 12, 607 (1964).
9. *Cahill L. J.* Inflation of the Inner Magnetosphere During a Magnetic Storm // *J. Geophys. Res.* 71, 4505 (1966).
10. *Cummings W. D., Coleman P. I.* Simultaneous Magnetic Field Variations at the Earth's Surface and Synchronous Equatorial Distance; Bay Associated Events // *Radio Sci.* 3, 758 (1968).
11. *Frank L. A.* On the Presence of Low Energy Protons in the Interplanetary Medium // *J. Geophys. Res.* 75, 707 (1970a).
12. *Frank L. A.* Direct Detection of Asymmetric Injection of Extra-Terrestrial "Ring Current" Protons into the Outer Radiation Zone // *J. Geophys. Res.* 75, 1263 (1970b).
13. *Parker E. N.* Nonsymmetric Inflation of a Magnetic Dipole // *J. Geophys. Res.* 71, 4485 (1966).
14. *Dungey J. W.* Interplanetary Magnetic Field, Auroral Theory // *Phys. Rev. Lett.* 6, 47 (1961).
15. *Nishida A.* Geomagnetic DP-2 Fluctuations and Associated Magnetospheric Phenomena // *J. Geophys. Res.* 73, 1795 (1968a).
16. *Axford W. I., Hines C. O.* A Unifying Theory of High-Latitude Geophysical Phenomena and Geomagnetic Storms // *Can. J. Phys.* 39, 1433 (1961).
17. *Nishida A.* Coherence of Geomagnetic DP-2 Fluctuations with Interplanetary Magnetic Variations // *J. Geophys. Res.* 73, 5549 (1968b).
18. *Akasofu S.-I., Chapman S., Meng C. J.* The Polar Electrojet // *J. Atmospheric Terr. Phys.* 27, 1275 (1965).
19. *Heppner J. P., Wescott E. M., Stolarik J. D.* Auroral and Polar Cap Electric Fields from Barium Releases, Goddard Space Flight Center Report X-612-69-411 (1969).
20. *Davis T. N., Parthasarathy R.* The Relationship Between Polar Magnetic Activity DP and Growth of the Geomagnetic Ring Current // *J. Geophys. Res.* 72, 5828 (1967).
21. *Lerche I.* On the Boundary Layer Between a Warm Streaming Plasma and a Confined Magnetic Field // *J. Geophys. Res.* 72, 5295 (1967).
22. *Eviatar A., Wolf R. A.* Transfer Processes in the Magnetopause // *J. Geophys. Res.* 73, 5562 (1968).
23. *Тверской Б. А.* Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.

24. *Axford W. I.* Magnetospheric Convection, in *Magnetospheric Physics*, ed. by Williams D. J. and Mead G. D. (Am. Geophys. Un., 1969), 421 (also Rev. Geophys. 7, 421 (1969)).
25. *Fairfield D. H.* The Average Magnetic Field Configuration of the Outer Magnetosphere // J. Geophys. Res. 73, 7329, (1968).
26. *Feldstein Y. I.* Polar Auroras and Polar Substorms, in *Magnetospheric Physics*, ed. by Williams D. J. and Mead G. D. (Am. Geophys. Un., 1969), 179 (also Rev. Geophys. 7, 179 (1969)).
27. *Hultqvist B.* Auroras and Polar Substorms, in *Magnetospheric Physics*, ed. by Williams D. J. and Mead G. D. (Am. Geophys. Un., 1969), 129 (also Rev. Geophys. 7, 129 (1969a)).
28. *Фельдштейн Я. И., Зайцев А. Н.* Sq-Вариации магнитного поля в высоких широтах летом во время МГГ // Геомагнетизм и аэрономия. 7, 204 (1967).
29. *Lew J. S.* Drift Rate in a Dipole Field // J. Geophys. Res. 66, 2681, (1961).
30. *Chang D. B., Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N.* On the Interchange Stability of the Van Allen Belt // J. Geophys. Res. 70, 3085 (1965).
31. *Тверской Б. А.* Об электрических полях в магнитосфере Земли // ДАН СССР. 188, 575, (1969b).
32. *Гуревич А. В., Цедилина Е. Е.* Динамика неоднородностей быстрых электронов в магнитосфере Земли (I) // Геомагнетизм и аэрономия. 9, 458, (1969a).
33. *Гуревич А. В., Цедилина Е. Е.* Динамика неоднородностей быстрых электронов в магнитосфере Земли (II) // Геомагнетизм и аэрономия. 9, 642, (1969b).
34. *Akasofu S.-I., Chapman S.* Ring Current, Geomagnetic Disturbances and Radiation Belts // J. Geophys. Res. 66, 1321, (1961).
35. *Feldstein Ya. I., Zaitsev S. N.* Sq-Variations of the Magnetic Field in High Latitudes in the Different Intensity of Magnetic Disturbances // Ann. Geophys. 24, 1, (1968).

## ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОКОЛОЗЕМНОЙ ПЛАЗМЕ\*

Экспериментальные исследования с помощью ракет и искусственных спутников Земли показали, что взаимодействие потока солнечной плазмы (солнечного ветра) с геомагнитным полем приводит к образованию плазменной конфигурации со сложной структурой и динамикой. На рис. 1 представлена схема магнитосферы в сечении, проходящем через направление потока плазмы и магнитную ось Земли. Поскольку солнечный ветер движется относительно Земли со скоростью, существенно превышающей звуковую и альвеновскую, формируется ударная волна. Эксперименты [1] подтверждают основные выводы теории бесстолкновительных ударных волн [2, 3]. Прошедшая через ударную волну плазма обтекает полость, в которой локализовано геомагнитное поле. Форма этой полости на дневной стороне хорошо согласуется с моделью обтекания Жигулева и Ромишевского [4]. В этой модели поле считается потенциальным, нормальные компоненты на границе равны нулю, а форма границы определяется из самосогласованного граничного условия

$$H_b^2 = 8\pi p_0 \cos^2 \chi \quad (p_0 \approx mn_0 v_0^2)$$

( $m$ ,  $n_0$  и  $v_0$  — масса, плотность и скорость ионов в потоке,  $\chi$  — угол между  $v_0$  и нормалью к границе).

Подробный анализ проблемы обтекания в данной постановке дан в обзоре Спрейтера и Алксне [5]. Вблизи диполя силовые линии вплоть до дневной границы деформированы относительно слабо и образуют магнитную ловушку, заполненную частицами значительно более высоких энергий, чем вне магнитосферы. Распределение этих частиц характеризуется рядом максимумов, которые принято называть радиационными поясами Земли. В настоящее время ясно, что высокоэнергичная компонента поясов (ионы с энергиями от 100 кэВ до 20 МэВ и электроны с энергиями от 100 кэВ до нескольких МэВ) образуется за счет диффузии частиц поперек силовых линий под действием флуктуации электромагнитного поля в магнитосфере. Диффузия в области нарастающего поля сопровождается бетатронным ускорением. С учетом условий адиабатической инвариантности наиболее эффективными оказываются флуктуации, связанные с быстрыми изменениями давления  $P_0$  и соответствующими перемещениями границы [6].

Отметим важную особенность распределения холодной плазмы (с  $T_{e,i} \sim 1$  эВ) в магнитосфере. Она образует довольно плотное облако ( $n_{e,i} \approx 10^3$  см<sup>-3</sup>), расположенное на силовых линиях, вершины которых отстоят от Земли на расстояниях  $\leq 4-5$  земных радиусов  $a$ . На более удаленных силовых линиях плотность резко

---

\* Тверской Б. А. Проблемы теории плазмы. (Материалы конференции, Киев, 19–23 октября 1971 г.), 396–403. Под ред. А. Г. Ситенко, Киев, 1972.

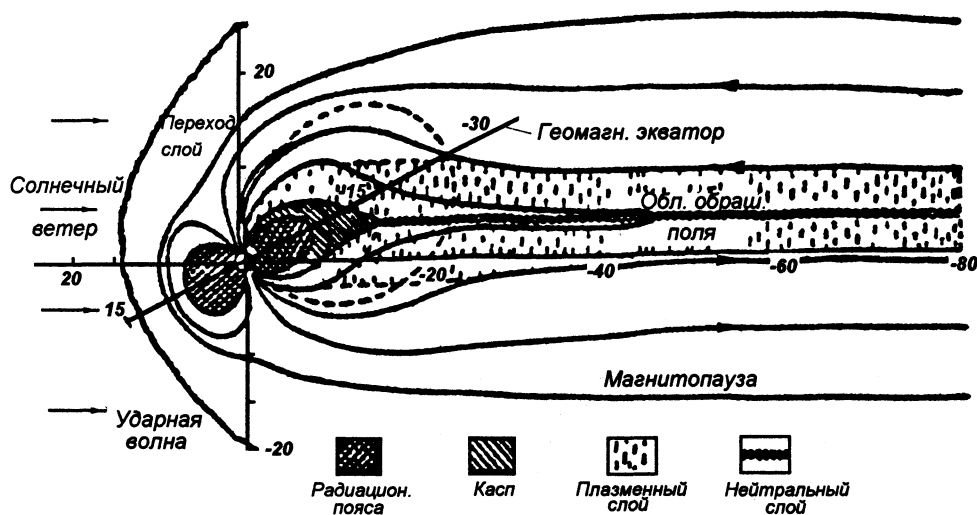


Рис. 1

падает. Позади диполя, начиная с расстояний около  $8a$ , структура поля резко отличается от указанных выше теоретических моделей обтекания. Здесь расположен протяженный плазменный слой, вытягивающий силовые линии в так называемый хвост магнитосферы. Радиус хвоста вблизи Земли составляет около  $20a$ , а длина не менее  $10^3a$ . Благодаря большим размерам хвост содержит значительное количество энергии (на два порядка больше, чем в радиационных поясах). При вариациях хвоста эта энергия может трансформироваться в энергию частиц, которые сбрасываются в атмосферу Земли вдоль силовых линий, расположенных в плазменном слое. Соответствующие области ионосферы в северном и южном полушариях (так называемые полярные овалы) имеют форму узких колец. В этих районах при вариациях хвоста возникают мощные токовые струи, при этом разгораются яркие полярные сияния и возбуждаются интенсивные электромагнитные колебания различных частей (от сотых долей герц до нескольких килогерц). Данный комплекс явлений называют магнитосферной суббурей.

В случае мощных суббурь часть плазмы инжектируется из хвоста в область радиационных поясов и формирует кольцевой ток, вызывающий общее понижение поля на Земле (магнитную бурю).

В настоящее время выяснены многие закономерности протекания суббурь [7, 8]. Вначале плазменный слой постепенно утоньшается, причем перпендикулярная слою компонента поля убывает, а параллельная — увеличивается (рис. 2). Толщина слоя может измениться при этом в два–три раза. Затем в течение 20–30 минут происходит резкое расширение слоя, возрастает поперечная компонента поля, а продольная — падает. Толщина слоя и поперечное поле возрастают до значений, заметно превышающих параметры спокойного хвоста. На первой фазе (сжатие слоя) температура ионов остается той же, что и в спокойных условиях (в 1,5–2 раза больше кинетической энергии частиц солнечного ветра). При расширении слоя она увеличивается в несколько раз. Температура электронов существенно меньше температуры ионов. Затем наступает постепенная (за время  $\sim 1$  часа) релаксация к спокойным условиям.

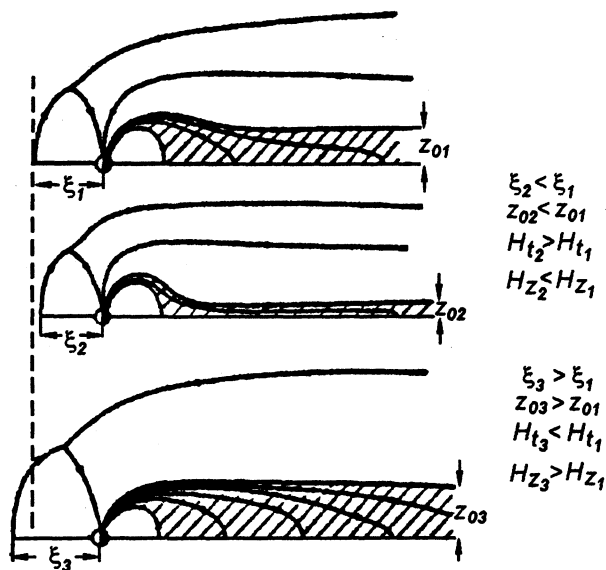


Рис. 2

Иногда несколько суббурь следует друг за другом с интервалом  $\sim 1$  часа. При этом, как правило, развивается мировая буря. Большинство ярких геофизических явлений (яркие полярные сияния, мощные токовые струи в полярных овалах и т. д.) связаны с фазой резкого расширения слоя.

Существенным свойством описанных процессов является сравнительно слабая зависимость от мощности солнечного ветра; часто они развиваются при практически постоянных скорости и плотности последнего. С другой стороны, они весьма чувствительны к таким характеристикам, как ориентация межпланетного поля и концентрация энергичных ионов, хотя энергия поля и быстрых частиц составляют лишь сотые доли от кинетической энергии солнечного ветра.

Проблема возникновения хвоста магнитосферы и его динамики представляет, очевидно, принципиальный интерес для физики космической плазмы и привлекает широкое внимание. Многие авторы считают, что эти явления родственны солнечным вспышкам и другим аналогичным астрофизическим процессам.

Наиболее распространенная точка зрения о природе хвоста и его свойствах основана на идее пересоединения силовых линий, выдвинутой Данжи [9]. Схема такого процесса приведена на рис. 3.

Если межпланетное поле антипараллельно полю Земли вблизи плоскости экватора, то возможно пересоединение силовых линий и их увлечение с дневной стороны на ночную. При этом магнитный поток в северной и южной половинах хвоста возрастает и в хвосте накапливается магнитная энергия. Для объяснения фазы, на которой происходит расширение плазменного слоя и увеличение энергии частиц, предполагается существование некой неустойчивости взрывного характера, при которой в плазменном слое идет быстрая диссипация антипараллельных магнитных полей.

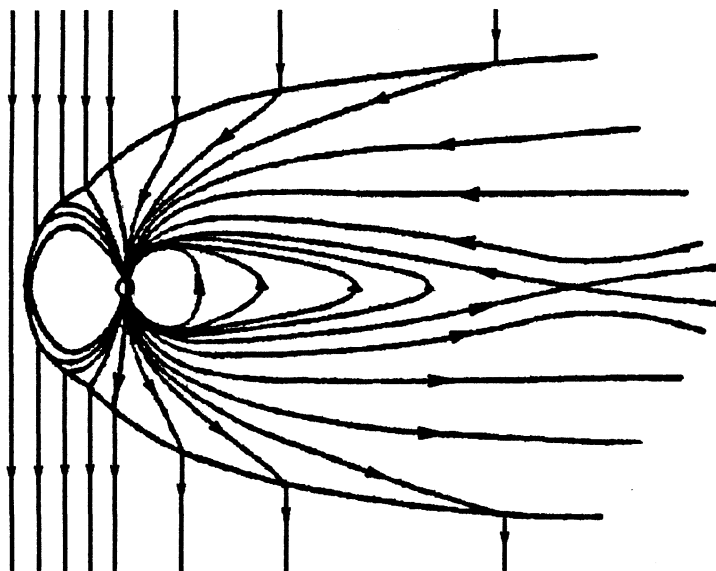


Рис. 3

Данная концепция позволяет качественно объяснить многие особенности динамики хвоста и в первую очередь — влияние ориентации межпланетного поля.

Однако до сих пор эта гипотеза не получила количественной формулировки. Не ясен физический механизм пересоединения. Не ясно также, какими условиями определяется структура плазменного слоя. Эксперимент показывает, что ширина пограничного слоя между солнечным ветром и магнитосферой мала (порядка ларморовского радиуса ионов со скоростями солнечного ветра в магнитосферном поле). Поэтому исследование пограничного слоя следует проводить в кинетическом приближении. Чисто одномерный подход к этой задаче [7, 8] не дает однозначных результатов, поскольку по обе стороны границы имеется магнитное поле и плазма. Существенные трудности возникают в случае, когда какая-либо из компонент поля меняет в пограничном слое знак. При наличии движения плазмы по одну из сторон разрыва иногда оказывается необходимым допустить наличие в пограничном слое потока ионов, движущихся в направлении, противоположном обтекающему потоку. Таким образом, важнейшей проблемой теории магнитосферных процессов является разработка теории пограничного слоя при обтекании неподвижного источника поля плазмой, также несущей магнитное поле.

Без детального исследования этого вопроса окончательное решение проблемы пересоединения невозможно.

Существует другой механизм взаимодействия потока плазмы с магнитным диполем, который приводит к образованию хвоста [6] и позволяет понять некоторые особенности структуры электрических полей суббури [10]. На границе магнитосферы имеется тангенциальный градиент модуля магнитного поля, перпендикулярный силовым линиям. В области хвоста эти градиенты концентрируются на торцах плазменного слоя. При таких условиях скорость магнитного дрейфа имеет компоненту по нормали к границе и существует дрейфовый поток частиц в магнитосферу. Вбли-

зи границы всегда имеются ионы с достаточно большим ларморовским радиусом (большим ширины пограничного слоя), для которых этот дрейф играет важную роль. Так, например, согласно экспериментальным данным [1] за головной ударной волной около 10 % ионов приобретает максвелловское распределение с температурой, близкой к кинетической энергии в невозмущенном потоке. Иногда в солнечном ветре возникают энергичные ионы с существенно большими энергиями (в десятки кэВ) и с заметными концентрациями ( $\sim 10^{-2}-10^{-3}$ ) [11], вероятно, вследствие турбулентного ускорения гидромагнитными волнами [12].

Вследствие особенностей геометрии хвоста (двумерный характер поля, резкое различие масштабов изменения величин вдоль и поперек плазменного слоя) задача о формировании слоя может быть рассмотрена в довольно общем виде.

Будем считать, что слой уходит на бесконечность и часть силовых линий замыкается через слой, а часть — также уходит на бесконечность (рис. 1). Предположим также, что функция распределения в слое зависит только от энергии частиц и  $y$ -компоненты обобщенного импульса:

$$F = F\left(v^2, v_y + \frac{e}{mc}A\right), \quad (1)$$

причем

$$\frac{mc\bar{v}}{e} \frac{\partial F}{\partial A} \ll F. \quad (2)$$

Тогда можно ввести скалярное давление  $p = p(A)$  и задача о равновесии в слое сводится к магнитогидродинамической:

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{J}\mathbf{H}]. \quad (3)$$

Плотность тока имеет лишь  $y$ -компоненту и

$$j = c \frac{dp}{dA}.$$

С точностью до членов  $\sim \lambda/\Lambda$  ( $\lambda$  и  $\Lambda$  — масштабы изменения поля поперек и вдоль слоя) уравнение (3) сводится к одномерному. На поверхности слоя  $p = 0$  и

$$H_x^2 = H_b^2(x),$$

где  $H_b$  — поле между слоем и границей. В силу условия  $\lambda \ll \Lambda$  оно не зависит от  $y$  и  $z$ . Соответствующее решение определяется интегралом

$$z = \pm \int \frac{dA}{\sqrt{H_b^2(x) - 8\pi p(A)}}, \quad (4)$$

который берется при постоянном  $x$  ( $A$  — вектор-потенциал).

Таким образом, однозначное решение требует задания двух функций —  $H_b(x)$  и  $p(A)$ . Первая легко определяется из сохранения магнитного потока  $\Phi$  между слоем и границей и граничного условия Жигулева—Ромишевского, где следует учесть, что  $\cos^2 \psi \approx dR/d\chi$  ( $R$  — радиус хвоста). Отсюда [6] следует, что

$$R = \xi \left(1 + \frac{x}{\xi}\right)^{1/2}, \quad H_b = \frac{2\Phi}{\pi R^2}. \quad (5)$$

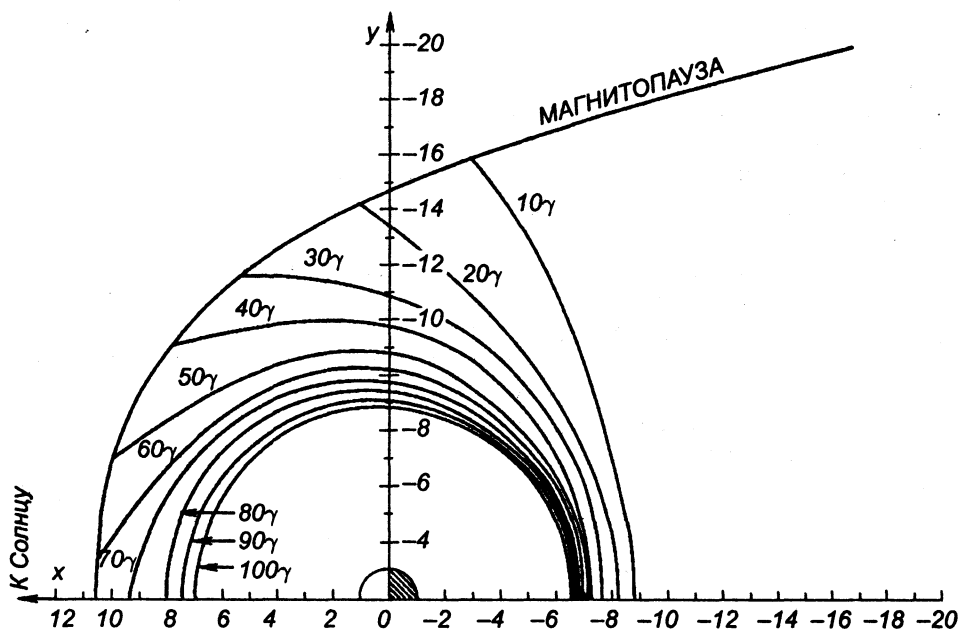


Рис. 4

Из (5) следует, что асимптотика границы имеет вид кубической параболы. Рассмотрим экспериментальные данные о форме границы в плоскости экватора [13] (рис. 4). Видно, что вся граница, включая дневную часть, совпадает с этой параболой и поэтому константа равна расстоянию от диполя до лобовой точки.

Для определения  $p(A)$  необходимо найти поток частиц, захватываемых на торце слоя между некоторыми силовыми линиями  $A_1$  и  $A_2$ , и приравнять его дрейфовому потоку между поверхностями  $A = A_{1,2}$ . Последний может быть вычислен в приближении (2) независимо от сохранения адиабатических инвариантов. Расчет дает

$$Q = \frac{cp}{e} \frac{\partial W}{\partial A} (A_2 - A_1), \quad (6)$$

где

$$W = \int \frac{dx}{H_x} = \int \frac{dx}{\sqrt{H_b^2(x) - 8\pi p(A)}} \quad (7)$$

— объем трубки с единичным магнитным потоком.

При вычислении потока захватываемых частиц мы вновь сталкиваемся с проблемой пограничного слоя. Однако в данном случае задача существенно конкретизируется. Именно, требуется знать лишь величины скачков компонент вектор-потенциала  $\delta A_x$ ,  $\delta A_z$  и электрического потенциала  $\delta V$  (слой предполагается квази-одномерным). Пусть  $F_e$  — функция распределения быстрых ионов снаружи. Тогда по правилам решения линейных уравнений в частных производных можно построить



оператор  $\hat{\Theta}(\delta A_x, \delta A_y, \delta V)$  такой, что

$$F_i = \hat{\Theta} F_e$$

есть функция распределения после прохождения пограничного слоя.

Если большинство частиц удовлетворяет условиям применимости дрейфового приближения, поток равен

$$Q = (A_2 - A_1) \int \frac{ds}{H} \int F_i v_D d^3V. \quad (8)$$

Оказывается, что основной вклад в интеграл дает узкая область вблизи вершины силовой линии, где  $H_x \leq H_z$ . Введением безразмерных переменных можно свести его к виду

$$Q = \frac{cp_e}{eH_z^2|_{z=0}} \cdot \Gamma \left( \frac{e\delta A_x}{mcv_0}, \frac{e\delta A_y}{mcv_0}, \frac{e\delta V}{mv_0^2}, \frac{u}{v_0} \right) (A_2 - A_1),$$

где  $V_0$  — средняя тепловая скорость быстрых частиц вне пограничного слоя  $p_e$  — их давление и  $u$  — скорость потока,  $H_z^2|_{z=0}$  — поперечная к плазменному слою составляющая поля,  $\Gamma$  — безразмерная константа, зависящая только от свойств пограничного слоя. Граничное условие для определения  $p(A)$  сводится к

$$p \frac{dW}{dA} = - \frac{p_e(x)}{H_z^2|_{z=0}} \cdot \Gamma. \quad (9)$$

С помощью (5)  $W$  легко выразить через  $p$ :

$$W \approx \sqrt{\pi} \frac{\xi}{\sqrt{8\pi p_0}} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{5/4}, \quad (10)$$

где  $p_0$  — давление на внутренней границе плазменного слоя. Величина

$$H_z|_{z=0} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{z=0} = \left( \frac{dp}{dA} \right)^{-1} \frac{dp}{dx} \Big|_{z=0} = \left( \frac{dp}{dA} \right)^{-1} \frac{1}{8\pi} \frac{dH_b^2}{dx}.$$

В магнитосфере реализуется противоположный предельный случай, когда вблизи вершины силовой линии дрейфовое приближение неприменимо. Анализ движения частиц вблизи вершины параболической силовой линии [14] показывает, что при этом орбиты весьма чувствительны к флуктуациям начальных условий, и в течение одного ларморовского оборота частицы существенно меняют ориентацию скорости относительно силовой линии. При этом

$$Q = \frac{I_e k}{4\pi \frac{dp}{dA}} (A_2 - A_1), \quad (11)$$

где  $I_e$  — интенсивность быстрых частиц вне слоя, а  $k$  — безразмерный множитель, так же как и  $\Gamma$ , зависящий только от параметров пограничного слоя. Граничное условие сводится к

$$\frac{cp}{e} \frac{dW}{dp} \cdot \left( \frac{dp}{dA} \right)^2 = - \frac{I_e k}{4\pi}. \quad (12)$$

Константы  $\Gamma$  и  $k$  могут быть оценены для конкретных моделей пограничного слоя. Точный расчет  $k$  возможен лишь численными методами (например, методом Монте-Карло).

На основе полученных уравнений можно провести полуфеноменологическое исследование свойств плазменного слоя, считая  $k$  или  $\Gamma$  известным параметром. Так, в случае (12) мы получаем плазменный слой с почти постоянной толщиной

$$z_0 = \sqrt{\frac{4H_0 c \xi}{9\pi I k_e}} \cdot \left(\frac{H_0}{H_b}\right)^{1/4}. \quad (13)$$

Для согласования (13) с данными эксперимента необходимо положить  $k \sim 10^{-2}$  (захватывается лишь ничтожная часть падающих на границу частиц). Это возможно в случае, когда температура ионов в плазменном слое примерно в 2 раза больше средней энергии частиц снаружи. Такое соотношение наблюдается экспериментально.

Отметим, что, согласно (13), толщина слоя убывает с увеличением эффективности захвата  $kI$ . Это означает, что при вводе дополнительной энергии в хвост, слой сжимается. Такой эффект, как отмечалось выше, действительно имеет место. При резком убывании  $Ik$  возможно адиабатическое сокращение силовых линий вдоль оси  $x$  и расширение слоя по оси  $z$ . При этом объем силовых трубок уменьшается и происходит адиабатический нагрев частиц.

За недостатком времени мы даже бегло не можем рассмотреть целый ряд интересных явлений, сопровождающих суббурю. Отметим лишь, что интенсивная инжекция ионов приводит к появлению компенсирующих электронных токов вдоль силовых линий. Согласно данным эксперимента, функции распределения электронов различной природы в магнитосфере всегда очень близки к максвелловским, хотя столкновения заведомо не играют существенной роли. Это тоже одна из важных проблем физики космической плазмы.

Подводя итоги, можно сформулировать следующие основные выводы:

- а) несмотря на сложность процессов, протекающих в околоземном пространстве, современная физика плазмы позволяет проводить количественное исследование таких явлений,
- б) основной проблемой здесь является в настоящее время разработка теории пограничного слоя,
- в) исследование магнитосферы показывает, что плазма даже при сравнительно простых начальных условиях способна формировать конфигурации со сложной структурой и динамикой.

### Литература

1. Montgomery H. D., Asbridge J. R., Bame S. J. J. Geophys. Res. 75, 1217 (1970).
2. Сагдеев Р. З. Вопросы теории плазмы. 4, 3 (1964).
3. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Nonlinear Plasma Theory (New York, Benjamin W. A. Inc., 1969).
4. Жигулев Н., Ромишевский Е. ДАН СССР. 4, 859 (1959).
5. Spreiter J. U., Alksne A. J. In Magnetospheric Physics, ed. by D. J. Williams and G. D. Mead (Am. Geophys. Un., 1969), 11 (also Rev. Geophys. 7, 11 (1969)).
6. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
7. Ness N., Fairfield D. J. Geophys. Res. 75, 7032 (1970).

8. *Hones E., Bame S., Asbridge J., Singer S.* J. Geophys. Res. **76**, 63 (1971).
9. *Dungey J.* Phys. Rev. Lett. **6**, 47 (1961).
10. *Тверской Б. А.* ДАН СССР. **188**, 575 (1969).
11. *Frank L. A.* J. Geophys. Res. **75**, 1263 (1970).
12. *Тверской Б. А.* ЖЭТФ. **53**, 1417 (1967).
13. *Fairfield D.* J. Geophys. Res. **73**, 7329 (1968).
14. *Speizer T.* J. Geophys. Res. **70**, 4219 (1965).

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ХВОСТЕ МАГНИТОСФЕРЫ\*

## Аннотация

Используя решение плоской задачи о взаимодействии потока плазмы с магнитным полем, авторы получили распределение электрического поля вдоль границы хвоста магнитосферы и его зависимость от направления магнитного поля и параметров плазмы в переходной области.

Проблема происхождения крупномасштабного электрического поля в магнитосфере Земли, связанного с конвекцией плазмы и токами в полярной шапке, — одна из главных в физике магнитосферы. В настоящее время предложено несколько механизмов генерации такого поля [1].

В работе [2] предложена модель взаимодействия плазмы переходной области с магнитным полем хвоста магнитосферы и найдены выражения зависимости электрического поля вблизи плоской границы от параметров плазмы и магнитного поля переходной области. В данной работе рассматривается электрическое поле в хвосте магнитосферы, появляющееся в результате такого взаимодействия, и его распределение по границе хвоста.

Введем систему координат, в которой ось  $x$  направлена к Солнцу, а ось  $z$  — на север. Угол  $\epsilon$  отсчитывается от оси  $y$  (рис. 1). Как показано в [2], электрическое поле на внутренней границе волны разрежения равно:

$$E_\epsilon = - \frac{v H_2 h_x G \chi}{c g}, \quad (1)$$

$$E_r = \frac{H_\epsilon H_2}{c(4\pi\rho)^{1/2}}. \quad (2)$$

Компонента вдоль магнитного поля  $H_2$  в хвосте равна нулю. В (1), (2)  $v$  — скорость плазмы у границы переходной области;  $\chi$  — малый угол между направлением этой скорости и направлением вектора  $H_2$ ;  $\rho$ ,  $H_1$  — плотность плазмы и магнитное поле в переходной области:

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{jA}{h_x}, \quad h_x = \frac{H_x}{H_2}, \quad A = \frac{v(4\pi\rho)^{1/2}}{H_2}, \quad h = \frac{H_1}{H_2}, \\ g &= 1 + A - jA\{d[j(A - hd) + h_x]^{-1} - h\varphi_1[j(A - h\varphi_1) + h_x]^{-1}\}, \\ d &= 1 - R, \quad R = (1 - h^2)^{1/2}, \quad \varphi_1 \approx d - 0,3 \frac{R^3}{h}, \end{aligned} \quad (3)$$

$j = 1$  для северной половины хвоста и  $j = -1$  для южной [2].

\* Алимарин С. И., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 20. № 3. 489–493 (1980).

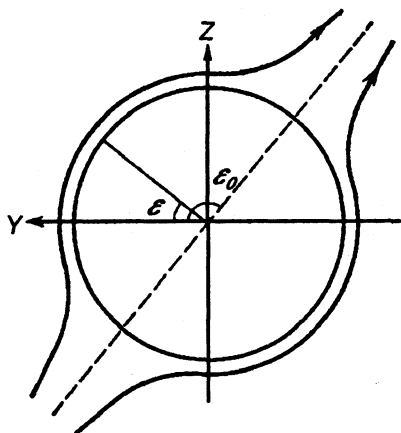


Рис. 1

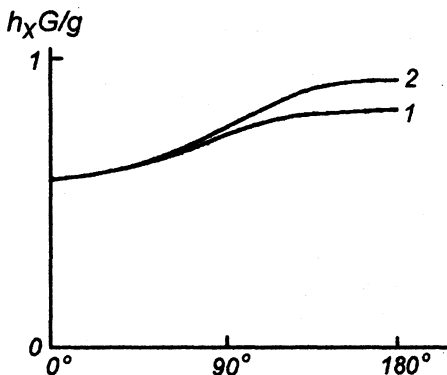


Рис. 2

Распределение электрического поля по границе хвоста (зависимость от  $\epsilon$ ) определяется через  $h_x(\epsilon)$  и  $h(\epsilon)$ . Эти функции нужно находить из решения задачи об обтекании магнитосферы сверхзвуковым потоком плазмы. Для простоты предположим сначала, что в солнечном ветре отсутствует компонента  $H_x$ :

$$H_\epsilon = H_1 \sin(\epsilon_0 - \epsilon). \quad (4)$$

Как указано в [3], на границе хвоста возникает компонента магнитного поля вдоль оси  $x$  даже при отсутствии ее в солнечном ветре. Предположим, что модуль магнитного поля не зависит от  $\epsilon$ , тогда

$$H_x = -H_1 \cos(\epsilon_0 - \epsilon), \quad (5)$$

что качественно отражает характер поля на границе. В этом случае вся зависимость электрического поля (1), (2) от  $\epsilon$  определяется функцией  $h_x(\epsilon)$ .

Прежде всего для существования предлагаемой структуры границы необходимо выполнение условия [2]:

$$A - d\varphi_1 + jh_x > 3R.$$

Распределение тангенциального поля  $E_\epsilon$  определяется выражением (1), где  $h_x G = jA + h_x$ . Рассмотрим выражение  $h_x G/g$  в двух крайних случаях:

а)  $R \ll 1$

$$\frac{h_x G}{g} \approx (jA + h_x) [1 + jAR^2(1+A)^{-1}(jA + h_x)^{-1}] (1+A)^{-1}.$$

б)  $|h_x| < h \ll 1, 0,3/A \ll 1,$

$$\frac{h_x G}{g} \approx (1+A)^{-1} [jA + h_x + 0,3Aj(1+A)^{-1}].$$

Как видно из этих выражений, электрическое поле  $E_\epsilon$  является убывающей функцией  $h_x$ . Выясним, что означает такая зависимость, если обратимся к хвосту магнитосферы (рис. 1). Пусть  $\epsilon_0 = 0$  (4), (5), т. е. поле солнечного ветра направлено вдоль

оси  $y$  (положительный сектор):

$$h_\epsilon = -h \sin \epsilon, \quad h_x = -h \cos \epsilon.$$

В северной половине хвоста

$$E_\epsilon = -\frac{vH_2(A - h \cos \epsilon)}{cg},$$

а в южной

$$E_\epsilon = \frac{vH_2(A + h \cos \epsilon)}{cg}.$$

Отсюда следует, что в положительном секторе межпланетного поля в северной половине хвоста  $E_\epsilon$  на утренней стороне ( $\epsilon = \pi$ ) больше, чем в вечерней ( $\epsilon = 0$ ), а в южной половине — наоборот. При  $\epsilon_0 = \pi$  (отрицательный сектор) асимметрия в северной и южной половинах меняется на обратную.

Если межпланетное поле имеет только северо-южную компоненту, например, отрицательную ( $\epsilon_0 = -\pi/2$ ) (5),  $h_x = h \sin \epsilon$ ,

$$E_\epsilon = -\frac{vH_2(jA + h \sin \epsilon)}{cg}.$$

Электрическое поле  $E_\epsilon$  симметрично относительно оси  $z$  (рис. 1) и максимально на ней. При этом тангенциальная компонента одинакова в обеих половинах хвоста и при  $\epsilon_0 = -\pi/2$  больше, чем при  $\epsilon_0 = \pi/2$  (5).

Если учесть компоненту межпланетного поля  $H_x$ , то магнитное поле на границе можно качественно представить так:

$$h_\epsilon = h_1 \sin(\epsilon_0 - \epsilon), \quad h_x = h_0 - h_1 \cos(\epsilon_0 - \epsilon).$$

Тангенциальное поле:

$$h = [h_0^2 + h_1^2 - 2h_0h_1 \cos(\epsilon_0 - \epsilon)]^{1/2}.$$

Хотя в данном случае модуль поля  $h$  и  $\rho$  также зависят от  $\epsilon$ , качественно описанная выше картина не меняется. Очевидно, что с увеличением  $h_0$  и уменьшением  $h_1$  эффект асимметрии электрического поля уменьшается и при строго радиальном межпланетном поле отсутствует, что подтверждается экспериментом [4].

На рис. 2 показана функция  $h_x G/g$  для случая, когда межпланетное поле направлено под углом  $45^\circ$ , сектор положительный ( $h_0 = -h_1$ ), плотность зависит от магнитного поля в соответствии с постоянством давления на границе и при условии адиабатической зависимости плотности от давления с показателем адиабаты 2:

$$\rho = \rho_0(1 - h^2)^{1/4}(1 - 0,8^2)^{-1/4},$$

где  $\rho_0$  — плотность при максимальном  $h = 0,8$ , достигаемом при  $\epsilon = \epsilon_0$ . В этой точке  $A = 3$  (кривая 1). Для сравнения приведена кривая 2 той же функции при тех же условиях и  $h_0 = 0$ .

Нормальная компонента электрического поля  $E_r$  направлена внутрь хвоста (северная половина) в положительном секторе и наружу в отрицательном. Как правило (в нормальном секторе, когда  $H_y > 0$ ,  $H_x < 0$ , или  $H_y < 0$ ,  $H_x > 0$ ), эта компонента больше на вечерней стороне хвоста, поскольку тангенциальное магнитное поле там больше и, следовательно, плотность меньше, чем на утренней стороне (2).

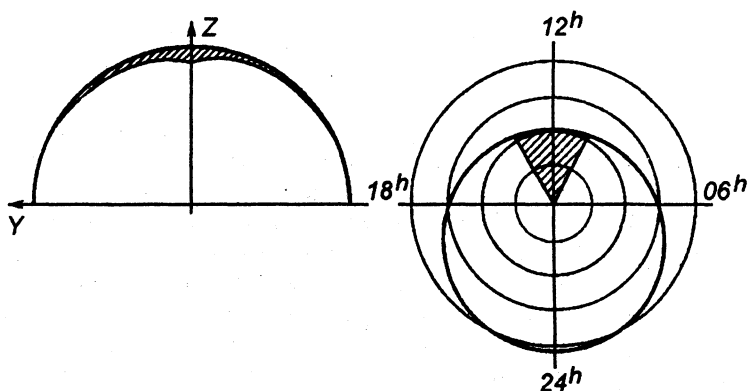


Рис. 3

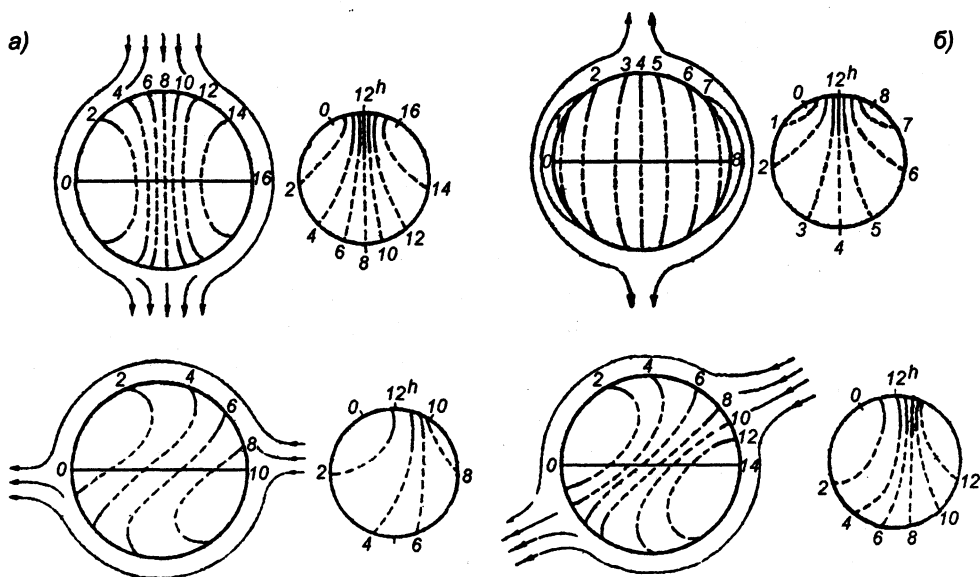


Рис. 4

Если предположить, что рассмотренное выше электрическое поле проецируется по силовым линиям в полярную шапку, то такая зависимость электрического поля от межпланетного магнитного поля проявится в полярной шапке, что обнаружено экспериментально [5]. В соответствии с [6] вся граница хвоста, например северная его половина, проецируется на довольно небольшую дугу полярного овала, примерно от 10 до 14 ч, а может быть, и меньше [6, 7], что схематически показано на рис. 3. Таким образом, область вблизи границы хвоста проецируется на всю околополуденную часть полярной шапки. На рис. 4 качественно показаны эквипотенциали в сечении хвоста около границы (условно они продолжены в глубь хвоста) в соответствии с выводами настоящей модели, а также проекции эквипотенциалей северной половины

хвоста в северную полярную шапку [6] для различных ориентаций межпланетного магнитного поля, когда  $\epsilon_0 = -\pi/2$  (а),  $\epsilon = \pi/2$  (б),  $\epsilon_0 = 0$  (в),  $-\pi/2 < \epsilon_0 < 0$  (г). Числа, поставленные около эквипотенциалей, обозначают условную величину потенциала.

Данная модель позволяет описать механизм следующих явлений: асимметрия электрического поля в полярной шапке, зависящая от сектора межпланетного магнитного поля [5]; зависимость полярности компоненты электрического поля, направленного по меридиану в полуденной области ( $E_r$ ), а следовательно, и направления холловского тока от сектора магнитного поля (эффект Свалгаарда—Мансурова) [8, 9]; образование плазменной мантии в хвосте магнитосферы внутри его границы, определяемой по резкому повороту магнитного поля [10].

Если данная модель верна, должны наблюдаться такие зависимости: в положительном секторе в северной половине хвоста ширина волны разрежения и нормальная компонента магнитного поля на вечерней стороне больше, чем на утренней, а скорость плазмы вдоль границы от Солнца на вечерней стороне меньше, чем на утренней. В отрицательном секторе все наоборот [1]:

$$\Delta\varphi = 3jRA_\chi(jA + h_x)\{g[jA - jh\varphi_1 + h_x][j(A - h\varphi_2) + h_x]\}^{-1},$$

$$H_2 = jH_2A_\chi\{g[j(A - hd) + h_x]\}^{-1},$$

$$v_x = -\frac{jv[j(A - h) + h_x]}{A}, \quad h\varphi_2 \approx h\varphi_1 + 3R.$$

Направление движения плазмы после вращательного разрыва отклоняется от направления Солнце—Земля и появляется компонента скорости  $v_\epsilon$ , отрицательная в положительном секторе и положительная в отрицательном:  $v_\epsilon = jvh_\epsilon/A$ . Указанные эффекты уменьшаются, если при прочих равных условиях скорость солнечного ветра увеличивается (растет  $A$ ).

Поскольку в основу данного анализа положено решение задачи о взаимодействии плазмы с хвостом в плоской геометрии, необходимо отметить, что он справедлив для не слишком отдаленных областей хвоста, т. е. пока линейный размер волны разрежения не становится сравнимым с радиусом хвоста.

### Литература

1. Stern D. P. Rev. Geophys. Space Phys. **15**, 156 (1977).
2. Алимарин С. И., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. **19**, 425 (1979).
3. Хесс В. Радиационный пояс и магнитосфера М.: Атомиздат, 1972.
4. Friis-Christensen E. K., Lassen K., Wilhelm J., Wilcox J. M., Gonzalez W., Colburn D. S. J. Geophys. Res. **77**, 3371 (1972).
5. Heppner J. P. J. Geophys. Res. **77**, 4877 (1972).
6. Fairfield D. H., Mead G. D. J. Geophys. Res. **80**, 535 (1975).
7. Fairfield D. H. Rev. Geophys. Space Phys. **15**, 285 (1977).
8. Svalgaard L. J. Geophys. Res. **78**, 2064 (1973).
9. Мансуров С. М. Геомагнетизм и аэрономия. **9**, 622 (1969).
10. Rosenbauer H., Grünwaldt H., Montgomery M. D., Paschmann G., Schopke N. J. Geophys. Res. **80**, 2723 (1975).



## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОТОКА ПЛАЗМЫ, ОБТЕКАЮЩЕГО ЗАТУПЛЕННОЕ ТЕЛО\*

### Аннотация

Получено аналитическое выражение для магнитного поля заданного потока несжимаемой плазмы, обтекающего затупленное полубесконечное тело типа магнитосферы Земли. Представлены приближенные формулы для этого поля вдали от тела и вблизи его поверхности.

Знание структуры магнитного поля в переходной области магнитосферы Земли необходимо как для изучения процессов, происходящих в самой этой области, так и для построения модели магнитопаузы. Для последней задачи важно знать распределение магнитного поля, плотности и скорости плазмы вблизи границы магнитосферы.

Как выяснено еще на раннем этапе изучения взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли, поток плазмы хорошо описывается чисто гидродинамической моделью обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком [1]. На основе этих расчетов проанализировано поведение магнитного поля в переходной области за ударной волной [2]. Было показано, что магнитное поле отклоняется на ударной волне в сторону Солнца и огибает магнитосферу с боков так, что силовые линии становятся трехмерными кривыми. Эти выводы согласуются с измерениями магнитного поля в этой области [3, 4]. Однако такой расчет магнитного поля неприменим вблизи точки застоя [2] и на всей поверхности обтекаемого тела [5]. Магнитное поле на поверхности обращается в бесконечность. Было показано [6, 7], что плотность в точке застоя обращается в нуль, а магнитное поле конечно и более чем в два раза превышает поле за ударной волной.

В данной работе представлено аналитическое решение для магнитного поля потока несжимаемой плазмы, обтекающей тело заданной конфигурации. Предполагается, что

$$A^2 = 4\pi v_1^2 \rho H_1^{-2} \gg 1, \quad M^2 = v_1^2 c_{s1}^{-2} \ll 1,$$

где  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\rho_1$ ,  $c_{s1}$  — скорость, магнитное поле, плотность и скорость звука, набегающего невозмущенного потока. Магнитное поле найдем из уравнений:

$$\operatorname{rot} [\mathbf{vH}] = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Вектор  $[\mathbf{vH}]$  представим в виде

$$[\mathbf{vH}] = \nabla \Phi. \quad (1)$$

---

\* Алимарин С. И., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 20. № 1. 1–4 (1982).

Вектор  $\nabla\Phi$  ортогонален как  $\mathbf{H}$ , так и  $\mathbf{v}$ , следовательно,  $\Phi$  остается постоянным вдоль линии тока, определяемой функцией тока:  $\psi(r, z) = \text{const}$ . Скорость выражается через  $\psi$  в цилиндрических координатах так:

$$\rho v_r = r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \rho v_z = -r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Следовательно,  $\Phi$  есть функция только  $\psi$ . Найдем эту функцию из граничных условий. Пусть при  $z \rightarrow -\infty$  имеется однородный поток плазмы  $v_z = 1$ ,  $v_r = 0$ ,  $\psi = -r^2/2$  с однородным магнитным полем:

$$H_r = -\cos \varphi, \quad H_\varphi = \sin \varphi, \quad H_z = h. \quad (2)$$

Здесь все величины безразмерные,  $\psi$  измеряется в единицах  $v_1 R^2$ , где  $R$  — радиус сечения обтекаемого тела при  $z \rightarrow \infty$ . Магнитное поле измеряется в  $H_0$ , где  $H_0$  — модуль компоненты поля, перпендикулярной оси  $z$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Из этих условий и (1) следует, что

$$\Phi(\psi) = -(-2\psi)^{1/2} \sin \varphi, \quad (3)$$

при этом принято, что на поверхности тела ( $\psi = 0$ )  $\Phi = 0$ . Из (1) имеем

$$H_\varphi = \rho r \sin \varphi (-2\psi)^{-1/2}, \quad v_r H_z - v_z H_r = \cos \varphi r^{-1} (-2\psi)^{1/2}. \quad (4)$$

Представим далее магнитное поле в виде:

$$\mathbf{H} = [\nabla\Phi, \nabla\beta]. \quad (5)$$

$\Phi$  постоянно вдоль магнитного поля, и силовые линии лежат на поверхности  $\Phi = \text{const}$ , поэтому в качестве одного из потенциалов можно выбрать эту функцию. Подставляя (5) в (1), получим:  $\bar{v} \nabla\beta = 1$ , откуда

$$\beta = \int v_r^{-1} dr + f(\eta, \varphi). \quad (6)$$

Здесь  $\eta = (-2\psi)^{1/2}$ , а  $f(\eta, \varphi)$  — произвольная функция, которая будет найдена из условий (2). Компоненты магнитного поля найдем из (5):

$$H_r = -r^{-1} \eta \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial z} - v_r \eta^{-1} \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}, \quad (7)$$

$$H_z = r^{-1} \eta \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial r} - v_z \eta^{-1} \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

Для вычисления интеграла (6) необходимо задать поле течения  $\psi(r, z)$ . Пусть [8]

$$\psi = -\frac{r^2}{2} + \frac{1}{4} [1 + z(z^2 + r^2)^{-1/2}], \quad (9)$$

$v_r$  можно найти из (3), (4) и уравнения Бернулли. Однако в дальнейших расчетах предполагаем, что плазма несжимаема и  $\rho = 1$ . В результате подстановки  $v_r$  в (6) получим:

$$\beta = \frac{1}{2} \int r^2 [(r^2 - \eta^2)(1 + \eta^2 - r^2)]^{-3/2} dr + f(\eta, \varphi).$$

Введя обозначения:

$$\cos^2 \lambda = r^2 - \eta^2, \quad k^2 = (1 + \eta^2)^{-1}, \quad \Delta^2 = 1 - k^2 \sin^2 \lambda,$$

найдем

$$\beta = -\frac{1}{2k} \int \Delta (\sin \lambda \cos \lambda)^{-2} d\lambda + f(\eta, \varphi).$$

Пользуясь [9] (на стр. 175 в формуле п. 49 допущена опечатка, что легко проверить с помощью формул пп. 34, 36 на стр. 174), получим:

$$\beta = -\frac{1}{2k} \{ (1 + k'^2) F - 2E - \Delta \cos 2\lambda (\sin \lambda \cos \lambda)^{-1} \} + f(\eta, \varphi). \quad (10)$$

Здесь  $F(\lambda, k)$ ,  $E(\lambda, k)$  — эллиптические интегралы 1 и 2 рода,  $k'^2 = 1 - k^2$ . Подставляя (10) в (7), (8) и определяя  $f(\eta, \varphi)$  из условия (2), получим:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2k} \left\{ \Delta \cos 2\lambda (\sin \lambda \cos \lambda)^{-1} + (1 + k'^2)(K - F) - 2(E - E) \right\} + h\eta \cos \varphi, \\ H_r &= -\frac{\eta}{r} \cos \varphi \left\{ 1 + k^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda [(k')^{-2} \sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda] + r k v_r (Q_0 - Q) \right\} + h v_r, \\ H_z &= \frac{\eta}{r} \cos \varphi \left\{ \frac{k^2}{2} \sin \lambda \cos \lambda \left[ \frac{1 + k'^2}{k'^2} + \cos 2\lambda \left( \frac{1}{k'^2} \sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda \right) \right] + r k v_z (Q_0 - Q) \right\} + h v_z, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$Q_0 - Q = \frac{1 + k'^2}{k'^2} (E - E) - (K - F),$$

а  $K$ ,  $E$  — полные эллиптические интегралы 1 и 2 рода,

$$v_r = 2r^{-2} \sin^3 \lambda \cos^3 \lambda, \quad v_z = 1 + r^{-2} \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda \cos 2\lambda.$$

В заключение получим приближенное выражение для магнитного поля в удаленных от обтекаемого тела областях:

Случай  $z \rightarrow -\infty$ . Из (9) получаем:

$$\cos \lambda \approx \varepsilon \left( 1 - 3 \frac{\varepsilon^2}{2} \right), \quad v_r \approx 2 \frac{\varepsilon^3}{r^2}, \quad v_z \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{r^2}, \quad \text{где } \varepsilon^2 = \frac{r^2}{4z^2}.$$

Разлагая (11) найдем

$$\begin{aligned} \beta &\approx z - \frac{1}{4z} + h r \cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{8z^2} \right), \\ H_r &\approx -\cos \varphi \left( 1 + \frac{1}{8z^2} \right) - \frac{r h}{4z^3}, \quad H_z \approx h \left[ 1 - \frac{1}{8z^2} (1 + \sin^2 \varphi) \right]. \end{aligned}$$

При  $h = 0$  с точностью до  $z^{-3} H_z$  равно нулю,

$$H_\varphi \approx \sin \varphi \left( 1 - \frac{1}{8z^2} \right), \quad H^2 \approx 1 + \frac{1}{4z^2} \cos 2\varphi.$$

Отсюда следует, что модуль поля минимален в плоскости  $\varphi = \pm \pi/2$ , т. е. перпендикулярной той плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ .

Случай  $r \rightarrow \infty$ .

$$\cos^2 \lambda \approx \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{r} \right), \quad k^2 \approx \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{2r^2} \right),$$

$$\beta \approx z + \frac{1}{8r} - \frac{z}{4r^2} + h \cos \varphi \left( r - \frac{1}{4r} \right).$$

Рассмотрим поведение поля в этой области при  $h = 0$ :

$$H_r \approx -\cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{2r^2} \right), \quad H_\varphi \approx \sin \varphi \left( 1 + \frac{1}{2r^2} \right),$$

$$H_z \approx -\frac{\cos \varphi}{8r^2}, \quad H^2 \approx 1 - \frac{\cos 2\varphi}{r^2}.$$

В этом случае модуль поля максимален при  $\varphi = \pm\pi/2$ , а из выражения для  $H_z$  можно сделать вывод, что силовые линии отклоняются вблизи обтекаемого тела назад, против направления течения.

Случай  $z \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ . В этом случае заметим, что компонента  $H_z$  при  $h = 0$  в пределе не равна нулю, т.е. хотя поле скоростей в этом пределе становится однородным, огибающее обтекаемое тело магнитное поле отклоняется вблизи тела вверх по течению. В пределе:

$$H_z = -\cos \varphi \left[ \frac{2r^2 - 1}{2(r^2 - 1)} E_1 - K_1 \right] + h,$$

где  $K_1, E_1$  — полные эллиптические интегралы с модулем, равным  $1/r$ .

Наконец, получим поле вблизи поверхности обтекаемого тела, т.е. при  $\eta \rightarrow 0$ , в удаленной от лобовой точки области ( $z \rightarrow \infty$ ). При этих условиях:

$$\eta^2 \approx 1 - r^2 + \varepsilon^2 - 3\varepsilon^4,$$

где  $\varepsilon = r/(2z)$ . Предполагая, что  $\eta \ll \varepsilon \ll 1$  и пренебрегая членами порядка  $\varepsilon^4$ , получим разложение для магнитного поля у поверхности:

$$H_r \approx -\eta^{-1} \varepsilon^3 \cos \varphi, \quad H_\varphi \approx \eta^{-1} \sin \varphi \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right), \quad H_z \approx -(2\eta)^{-1} \cos \varphi (1 + \varepsilon^2).$$

Модуль магнитного поля у поверхности

$$H^2 \approx (2\eta)^{-2} [1 + 3 \sin^2 \varphi + 2\varepsilon^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi)].$$

Отметим, что модуль поля при  $\varphi = \pi/2$  примерно в два раза больше, чем при  $\varphi = 0$ . Уравнение силовой линии в низшем приближении:

$$\sin \varphi = \exp \left\{ -\frac{2}{r} (z - z_0) \right\},$$

где  $z_0$  — координата точки, где силовая линия ближе всего подходит к поверхности и к лобовой точке.

**Литература**

1. *Spreiter J. R., Alksne A. Y.* Rev. Geophys. 7, 11 (1969).
2. *Alksne A. Y.* Planet. Space Sci. 15, 239 (1967).
3. *Fairfield D. H. J.* Geophys. Res. 72, 5865 (1967).
4. *Behannon K. W., Fairfield D. H.* Planet. Space Sci. 17, 1803 (1969).
5. *Пивоваров В. Г., Еркаев Н. В.* Взаимодействие солнечного ветра с магнитосферой Земли. Новосибирск: Наука, 1978.
6. *Lees L.* AIAA J. 2, 1576 (1964).
7. *Липтухов А. И.* Геомагнетизм и аэрономия. 21, 193 (1981).
8. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика 1. М.: Физматгиз, 1963.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

## О РОЛИ ПОЛЯРНОЙ ИОНОСФЕРЫ КАК ИСТОЧНИКА ИОНОВ В МАГНИТОСФЕРЕ\*

В последнее время появился ряд экспериментальных данных, позволяющих изменить представление об основном источнике ионов магнитосферы. Прежде всего к этим данным относятся эксперименты по изучению ионного состава кольцевого тока на спутнике S3-3 [1]. В соответствии с данными [1] во время главной фазы магнитосферной бури ионы  $O^+$  вносят доминирующий вклад в формирование кольцевого тока на  $L \sim 3-4$ . Плотность ионов кислорода с энергиями 0,5–16 кэВ составляла  $\sim 3-7 \text{ см}^{-3}$ , а отношение плотности ионов кислорода к плотности ионов водорода в том же энергетическом диапазоне  $\sim 1,5-3$ . На спутнике ИМП-7 [2] в хвосте магнитосферы (на расстоянии  $\sim 30 R_E$ ) наблюдались потоки ионов  $O^+$  ионосферного происхождения, соответствующие потокам  $\sim 10^8 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  у поверхности Земли. Имеется ряд наблюдений потоков ионов вверх по силовым линиям геомагнитного поля над областью полярных сияний дискретного типа [3–5]. Так, например, в работе [5] по результатам измерений на спутнике S3-3 получены функции распределения как ионов, так и электронов на высоте 7300 км от поверхности Земли на инвариантной широте  $\sim 72^\circ$  и  $MLT \approx 18,7$  ч. Поток энергии ионов с энергией  $\sim 1,9$  кэВ, движущихся вверх по силовым линиям, составлял  $\sim 6 \cdot 10^7 (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{кэВ})^{-1}$ . Поток энергии электронов с энергией  $\sim 1$  кэВ на питч-углах  $\sim 0^\circ$  составлял  $\sim 7 \cdot 10^7 (\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{кэВ})^{-1}$ .

Высыпание электронов, спектр которых хорошо аппроксимируется в предположении существования электростатических полей, ускоряющих электроны до энергий нескольких кэВ, наблюдается в полосе вытекания продольного тока в вечернем секторе авроральной магнитосферы. На спутнике S3-3 [6] проводилось прямое измерение таких полей в структурах толщиной  $\sim 10$  км у поверхности Земли, видимо, соответствующих дискретным дугам полярного сияния. В соответствии с измерениями [7], на высотах верхней ионосферы в области дискретных полярных сияний существует сверхзвуковой поток ионосферных ионов  $\sim 3-5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  — полярный ветер.

По оценкам [8] максимальный поток ионов, который может сформировать ионосфера, составляет  $2,5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Расчеты по формулам [9] показывают, что в полярной ионосфере максимально возможный поток ионов близок к потоку электронов, производящих ионизацию. Вне дуг полярного сияния, где питч-угловое распределение электронов соответствует слабому высыпанию в конусе потерь [10], ионы ионосферы могут вносить значительный вклад в формирование продольного тока.

Поток ионов ионосферы  $\sim 10^8-10^9 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  у поверхности Земли ускоряется в продольном электростатическом поле до энергии порядка нескольких кэВ. Так

\* Антонова Е. Е., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 20. № 1. 179–181 (1982).

как температура ионов ионосферы  $T_i^{\text{ion}} \sim 0,25$  эВ ( $\sim 3000$  К), формируется резко анизотропный поток с отношением продольной скорости к поперечной  $\sim 10^2$ . Взаимодействие холодного пучка ионов, продольная скорость которого  $v_{\parallel} \gtrsim (T_e/m_i)^{1/2}$  ( $T_e \sim 10^2\text{--}10^3$  эВ — температура электронов магнитосферы,  $m_i$  — масса иона), с горячей магнитосферной плазмой приводит к генерации ионно-звуковых и ионных ленгмюровских колебаний [11]. Таким образом, на силовых линиях выше области ускорения должен наблюдаться интенсивный электростатический шум на частотах  $\sim 10\text{--}200$  Гц (для плазмы концентрации  $0,1\text{--}1$  см $^{-3}$  ионная ленгмюровская частота  $f_p^+ \sim 50\text{--}200$  Гц). В соответствии с измерениями на спутнике «Хокай-1» [12] на силовых линиях, соответствующих области полярных сияний дискретного типа на геоцентрических расстояниях  $\gtrsim 5 R_E$ , наблюдается широкополосный электростатический шум, средняя амплитуда которого  $\sim 10$  мВ  $\cdot$  м $^{-1}$ , максимальная —  $35,6$  мВ  $\cdot$  м $^{-1}$ . Основной вклад в амплитуду вносят колебания на частотах  $\sim 10\text{--}50$  Гц. В пользу электростатической природы шума свидетельствуют одновременные измерения флуктуаций магнитного поля. Отношения плотности энергии флуктуаций электрического поля к плотности энергии флуктуаций магнитного поля составляло  $\sim 39$ .

Потеряв часть энергии на возбуждение плазменной турбулентности, ионы ионосферы при отсутствии разности потенциалов между концами силовой линии не могут высыпаться в сопряженную ионосферу и оказываются захваченными в области вершины силовой линии. Поток ионов  $\sim 5 \cdot 10^8$  см $^{-2}$ с $^{-1}$  в полосе шириной  $\sim 200$  км и длиной  $5 \cdot 10^3$  км выносит в магнитосферу за 1 с из полярной ионосферы северного и южного полушарий  $10^{25}$  частиц, т. е. за три часа  $\sim 10^{29}$  частиц. Во время магнитосферной бури эти потоки, видимо, могут быть в несколько раз больше. Характерные особенности предлагаемой картины показаны на рис. 1 (стрелками (1) показаны потоки ионосферных ионов  $H^+$  и  $O^+$ , штрихами (2) — область электростатического ускорения, точками (3) — область широкополосного электростатического шума).

Область тока, вытекающего вверх по силовым линиям геомагнитного поля в вечернем секторе авроральной магнитосферы, является, видимо, областью анти-солнечной конвекции. Таким образом, в силовой трубке, движущейся в этой области

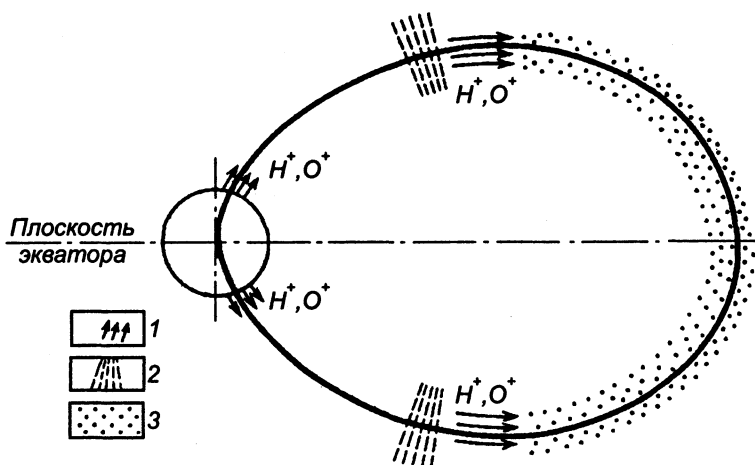


Рис. 1

с дневной стороны на вечернюю, должно происходить накопление ускоренных ионов ионосферного происхождения. Объем силовой трубки для  $L \sim 10$  в дипольном приближении составляет  $\sim 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^3$ . Таким образом чтобы концентрация ионов ионосферного происхождения в силовой трубке достигла  $1 \text{ см}^{-3}$  (соответствующей обычно измеряемой плотности частиц магнитосферы), требуется  $< 2,5$  ч. Во время суббури происходит инжекция ионов с больших  $L$  на меньшие  $L$ -оболочки в вечернем секторе, где при сохранении магнитного момента и продольного инварианта они ускоряются до энергий  $\sim 20\text{--}50$  кэВ и формируют асимметричный кольцевой ток. При учете рассмотренных выше процессов за время  $\sim 10$  ч (соответствующее времени формирования кольцевого тока магнитосферной бури) поток ионов полярной ионосферы может сформировать кольцевой ток, энергия которого  $10^{22}$  эрг, что соответствует имеющимся оценкам энергии кольцевого тока бури (см., например [13]).

Характерными особенностями спектров ионов, формирующихся при релаксации пучков ионосферного происхождения, являются сохраняющаяся некоторое время анизотропия (с последующей изотропизацией при питч-угловой диффузии), отсутствие конуса потерь (энергия частиц меньше энергии, теряемой при прохождении разности потенциалов между вершиной силовой линии и ее основанием) и резко немаксвелловский характер на стадии квазилинейной релаксации (наличие плато). Существование плато в спектре ионов кольцевого тока является одной из характерных особенностей этих спектров [13]. На геостационарном спутнике ATS-5 [14] неоднократно наблюдались анизотропные потоки ионов. Таким образом, рассмотренная картина позволяет понять целый ряд экспериментальных фактов, не находивших до сих пор теоретического обоснования.

### Литература

1. Johnson R. G., Sharp R. D., Shelley E. G. Geophys. Res. Lett. 4, 403 (1977).
2. Frank L. A., Ackerson K. L., Yeager D. M. J. Geophys. Res. 82, 129 (1977).
3. Shelley E. G., Johnson R. G., Sharp R. D. J. Geophys. Res. 77, 6004 (1972).
4. Sharp R. D., Shelley E. G., Johnson R. G. J. Geophys. Res. 82, 2361 (1977).
5. Mizera P. F., Fennel J. F. Geophys. Res. Lett. 4, 311 (1977).
6. Mozer F. S., Carlson C. W., Hudson M. V., Torbert R. B., Parady B., Yateau Y., Kelley M. C. Phys. Rev. Lett. 38, 292 (1977).
7. Hoffman J. H. Trans. Amer. Geophys. Union 52, 301 (1971).
8. Bloock L. P., Falthammar C. G. J. Geophys. Res. 73, 4807 (1968,).
9. Антонова Е. Е., Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрномия. 15, 621 (1975).
10. Venkatarangan P., Burrows J. R., McDiarmid I. B. J. Geophys. Res. 80, 66 (1975).
11. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. 1. М.: Атомиздат, 1975.
12. Gurnett D. A., Frank L. A. J. Geophys. Res. 82, 1031 (1977).
13. Акасофу С. И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. 2. М.: Мир, 1975.
14. DeForest S. E., McIlwain C. E. J. Geophys. Res. 76, 3587 (1971).



# О ПРОДОЛЬНЫХ ТОКАХ В МАГНИТОСФЕРЕ\*

## Аннотация

Получена общая формула, связывающая плотность вертикальных токов в ионосфере с распределением изотропного давления  $p$  в магнитосфере в условиях магнитогидростатического равновесия. Показано, что наиболее вероятным районом формирования продольных токов на ночной стороне является область перехода от низкого давления плазмы к высокому ( $p \gg H^2/(8\pi)$ ). Исследован вопрос о применимости модели с изотропным давлением к случаю мелкомасштабных возмущений электростатического потенциала магнитосферы.

## Введение

Исследование магнитосферно-ионосферного взаимодействия по схеме [1] ограничено предположениями о малости ларморовских радиусов ионов и давления  $p$  магнитосферной плазмы. В данной работе получено несколько более общих результатов о связи плотности продольных токов с состоянием плазмы на больших высотах.

## Продольные токи при магнитогидростатическом равновесии

Предположим, что горячая магнитосферная плазма квазинейтральна, ее давление  $p$  изотропно и существует магнитогидростатическое равновесие:

$$(\mathbf{H}\nabla p) = 0, \quad (1)$$

$$c\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{H}], \quad (2)$$

$\mathbf{H}$  — вектор магнитного поля,  $\mathbf{j}$  — плотность тока.

Уравнение (1) показывает, что силовые линии  $\mathbf{H}$  лежат на поверхностях  $p = \text{const}$ . Поэтому можно ввести эйлеровы потенциалы  $\alpha = p, \beta$

$$\mathbf{H} = [\nabla p \nabla \beta], \quad (3)$$

$\beta$ , как и  $p$ , постоянна вдоль силовых линий.

Домножая (2) векторно на  $\mathbf{H}$ , получаем:

$$j_{\perp} = \frac{c[\mathbf{H}\nabla p]}{H^2}, \quad (4)$$

где  $j_{\perp}$  — плотность токов, перпендикулярных  $\mathbf{H}$ .

Рассмотрим тонкую силовую трубку, ограниченную поверхностями

$$p = p_1, \quad p = p_2 > p_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \beta = \beta_2 > \beta_1,$$

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и астрономия. Т. 22. № 6. 991–995 (1982).

где  $p_1 \rightarrow p_2$ ,  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ . Очевидно, что сумма токов, вытекающих из трубки в северную и южную ионосферы вдоль  $H$ , равна интегралу по поверхности трубки от  $(j dS)$ , где при построении вектора элемента поверхности  $dS$  необходимо использовать единичные векторы внутренней нормали (эти векторы при  $p = p_{1,2}\beta_{1,2}$  есть соответственно  $\nabla p/|\nabla p|$ ,  $-\nabla p/|\nabla p|$ ,  $\nabla \beta/|\nabla \beta|$  и  $-\nabla \beta/|\nabla \beta|$ ). Из (4) видно, что токи через поверхность  $p = \text{const}$  равны нулю. Вычислим ток через полосу  $\beta = \beta_1$ ,  $p_1 \leq p \leq p_2$ . Элемент площади есть  $dS = ds \delta(s)$ , где  $ds$  — дифференциал дуги, а  $\delta(s)$  — расстояние между близкими линиями  $p = p_1$ ,  $p = p_2$  при  $\beta = \beta_1$ . Введем единичный вектор  $\frac{[\nabla \beta]}{|\nabla \beta|}$ , который лежит на поверхности  $\beta = \text{const}$  и перпендикулярен  $H$ .

Тогда

$$p_2 - p_1 = \frac{([\nabla \beta] \nabla p)}{|\nabla \beta|} \delta, \quad \delta = (p_2 - p_1) \frac{|[\nabla \beta]|}{([\nabla \beta] \nabla p)}.$$

Объединяя эти формулы, получим:

$$I_{\beta_1} = \int \frac{(j_{\perp} \nabla \beta)}{|\nabla \beta|} \delta(s) ds = c(p_2 - p_1) \int \frac{\nabla \beta [\nabla p]}{|\nabla \beta| H^2} \frac{|[\nabla \beta]|}{(\nabla p [\nabla \beta])} ds, \quad (5)$$

где интеграл берется между точками вхождения силовой линии в северную и южную ионосферы. Вычисляя произведение векторов, находим:

$$I_{\beta_1} = -c(p_2 - p_1) \int \frac{ds}{H} = -c(p_2 - p_1) W(\beta_1, p), \quad p = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (6)$$

( $W$  — объем силовой трубки с единичным магнитным потоком). Аналогично

$$I_{\beta_2} = c(p_2 - p_1) W(\beta_2, p) \quad (7)$$

и при  $p_2 = p_1 + \delta p$ ,  $\beta_2 = \beta_1 + \delta \beta$ ,  $\delta p \rightarrow 0$ ,  $\delta \beta \rightarrow 0$ ,

$$I_0 = c \delta p \delta \beta \left( \frac{\partial W}{\partial \beta} \right) \frac{H}{H}, \quad (8)$$

где  $I_0$  — токи, вытекающие из трубки в каждое полушарие (считаем их равными по величине). Преобразуем (3) к виду  $H = -\text{rot}(\beta \nabla p)$ , проинтегрируем по основанию трубки  $\delta S_0$  и применим теорему Стокса. В результате получим  $\delta p \delta \beta = H dS_0$ . Подставляя в (8) и выражая  $H$  через  $\nabla p$  и  $\nabla \beta$ , окончательно получаем:

$$j_{\parallel} = \frac{1}{2} c (n [\nabla W \nabla p]). \quad (9)$$

Здесь  $j_{\parallel}$  — плотность вертикального тока,  $n$  — вектор внешней нормали к ионосфере, а знак выбран так, что  $j_{\parallel} > 0$  соответствует ток, вытекающий из ионосферы. При переходе к (9) мы использовали формулу

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial W}{\partial \beta} \nabla \beta$$

и учли, что член  $c (\partial W / \partial p) [\nabla p \nabla p] \equiv 0$ .

Таким образом, мы получили основное уравнение теории магнитосферно-ионосферного взаимодействия

$$\text{div} \hat{\Sigma} \nabla U = j_{\parallel} = \frac{1}{2} c (n [\nabla W \nabla p]), \quad (10)$$

справедливое при гораздо более общих предположениях, чем обычно используемые уравнения. В (10) величины  $W$  и  $p$  рассматриваются как функции широты и долготы в ионосфере,  $U$  — электрический потенциал,  $\hat{\Sigma}$  — тензор проинтегрированной по высоте проводимости (ранг  $\hat{\Sigma}$  равен 2).

В поле диполя  $W \approx aL^4/H_e$ , где  $L = \sin^{-2} \theta$  — параметр Мак-Илвайна,  $\theta$  — полярный угол на поверхности Земли,  $a$  — земной радиус,  $H_e$  — поле на экваторе ( $H_e \approx 0,3$  Э). Если предположить, что при некотором  $L_0$  давление достигает максимальной величины  $p = H_e^2/(8\pi L^6)$  и зависит от долготы  $\varphi$  как  $(1 + \cos \varphi)$ , то для амплитуды вертикального тока получаем:

$$j_{\parallel}^{(0)} = \frac{cH_e}{(2\pi La)}. \quad (11)$$

Обычно  $L_0 = 8-10$  и  $j_{\parallel}^{(0)} \approx 1$  мкА/м<sup>2</sup>. Между тем даже при умеренных суббурях  $j_{\parallel}^{(0)} \sim 3$  мкА/м<sup>2</sup>. Экспериментально наблюдались значительно большие значения. Отсюда следует, что в области сильных продольных токов градиент  $W$  значительно больше, чем в поле диполя. В плазменном слое  $W$  достигает огромных значений. Однако можно показать, что основной вклад в  $W$  здесь дает член, зависящий только от  $p$ . Поэтому плазменный слой вряд ли можно рассматривать как источник сильных токов, так как  $[\nabla W(p)\nabla p] = 0$ . Наиболее подходящий район формирования  $j_{\parallel}$  — область перехода от плазмы низкого давления ( $8\pi p \ll H^2/(8\pi)$ ) к области высокого давления. В [2, § 5] показано, что эта область должна быть узкой (ее проекция на ионосферу имеет ширину  $\sim 100$  км), и в ней расположена граница радиационных поясов. Наличие области аномально быстрого спада поля вблизи плоскости экватора при  $L \simeq 8$  на ночной стороне давно обнаружено экспериментально [3]. В работе [4] установлено, что высыпания типа перевернутого  $V$  (сильные продольные токи) расположены вблизи границы области захваченной радиации. Авторы [4] отождествляют эту границу с переходом от замкнутых силовых линий к разомкнутым, однако, согласно [2], для этого нет оснований.

### Возмущение продольных токов мелкомасштабным электрическим полем

Как известно, в зоне полярных сияний имеются мелкомасштабные электростатические поля, заметно меняющиеся на расстоянии  $\sim 1-10$  км. Если спроектировать такие масштабы вдоль силовых линий в плоскость экватора (в случае диполя — умножить на  $L^{3/2}$ ), то они окажутся меньше или порядка ларморовского радиуса имеющихся там горячих ионов с энергиями  $\sim 3-10$  кэВ. Для применения полученных выше формул в данных условиях необходимо выяснить, насколько правомерно исходное предположение об изотропии давления (если оно выполняется, то условия гидростатического равновесия (1), (2) справедливы независимо от масштабов).

Рассмотрим с этой целью задачу о релаксации плазмы в однородном магнитном поле  $H = \{0, 0, H_{\perp}\}$  при наличии малого возмущения электростатического поля с потенциалом вида

$$u = u_0 \exp \{ \gamma t + i k x \}$$

при наличии однородного электрического поля  $E_y$ . Будем считать, что ионы имеют невозмущенную функцию распределения по скоростям  $V$  вида

$$F = F(V^2), \quad \langle V^2 \rangle \gg \frac{2eu_0}{M} \quad (12)$$

( $e$  и  $M$  — заряд и масса иона). Электроны считаем холодными. Квазинейтральность плазмы обеспечивается в случае необходимости токами вдоль силовых линий.

Задачу удобно рассматривать в системе координат, где  $E_y$  отсутствует. При этом следует сделать замену

$$\gamma \rightarrow \gamma - ikV_D = \gamma', \quad V_D = \frac{cE_y}{H}. \quad (13)$$

Будем считать также, что  $V_D^2 \ll \langle V^2 \rangle$ , и можно пренебречь изменениями  $F$  при переходе от исходной системы координат к системе, где  $E_y = 0$  (строго говоря,  $F$  имеет вид (12) именно в последней системе координат).

Будем искать возмущенную функцию распределения в виде

$$f = \bar{f}(V_{\parallel}, V_{\perp}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) \exp \{in\varphi\}, \quad (14)$$

где  $\varphi$  — фаза ларморовского вращения,  $V_{\parallel}$  и  $V_{\perp}$  — продольная и поперечная к  $H$  компоненты скорости. Поскольку задача однородна вдоль оси  $z$ , кинетическое уравнение имеет вид:

$$\gamma' f + ikV_{\perp} \cos \varphi f - \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{(f - \bar{f})}{\tau} = \left( \frac{2eu_0}{M} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial V^2} \right) ikV_{\perp} \cos \varphi, \quad (15)$$

где  $\Omega = eH/(Mc)$  — гирочастота ионов. Последний член правой части описывает размешивание фаз: предполагается, что при отсутствии внешних возмущений фазы хаотизируются за время  $\tau$ . Наличие таких процессов постулируется даже в условиях, когда сохраняются адиабатические инварианты. При наличии эффективного рассеяния на частицах или волнах  $\tau$ , во всяком случае, не больше времени столкновений. Будем считать, что  $\Omega\tau \gg 1$ .

Перенесем член с  $\bar{f}/\tau$  в правую часть и проинтегрируем (15) по  $\varphi$ . Получаем:

$$f = - \exp \left\{ \frac{ikV_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi + q\varphi \right\} \int \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} \left[ (ikV_{\perp} \cos \varphi + q) - q + \frac{f}{\Omega\tau} \right] \times \\ \times \exp \left\{ - \left( \frac{ikV_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi + q\varphi \right) \right\} d\varphi, \quad (16)$$

где

$$q = \frac{(\gamma'\tau + 1)}{\Omega\tau}. \quad (17)$$

Если  $|\gamma'| \ll \Omega$ , то  $|q| \ll 1$ . Разлагая под интегралом  $\exp \{ikV_{\perp}\Omega^{-1} \sin \varphi\}$  в ряд Фурье по  $\varphi$  (коэффициентами разложения будут функции Бесселя  $J_n(kV_{\perp}/\Omega)$ ) и интегрируя, получаем:

$$f = \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} - \left( \frac{\bar{f}}{\Omega\tau} - \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} q \right) \cdot \exp \left\{ \frac{ikV_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n J_n(kV_{\perp}/\Omega)}{in - q} e^{in\varphi}.$$

При  $|q| \ll 1$  член с  $n=0$  много больше остальных членов разложения, и

$$f \approx \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} + \left( \frac{\bar{f}}{\gamma'\tau + 1} - \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{ikV_{\perp}}{\Omega} \sin \varphi \right\} J_0 \left( \frac{kV_{\perp}}{\Omega} \right). \quad (18)$$

Проинтегрировав (18) по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , получаем следующее уравнение для  $\bar{f}$ :

$$f = \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} + \left( \frac{\bar{f}}{\gamma'\tau + 1} - \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} \right) J_0^2 \left( \frac{kV_\perp}{\Omega} \right) \quad (19)$$

и

$$\bar{f} = \frac{2eu_0}{M} \frac{\partial F}{\partial V^2} \frac{1 - J_0(kV_\perp/\Omega)}{1 - J_0^2(kV_\perp/\Omega)} \quad (20)$$

Очевидно, что знания  $\bar{f}$  достаточно для вычисления возмущений плотности и давления ионов. Если  $\gamma'\tau \rightarrow 0$ , то функция  $f$  изотропна (члены с функциями Бесселя от  $V_\perp$  сокращаются) и возмущение давления

$$\begin{aligned} p' &= \frac{2eu_0}{M} \frac{M}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty V^2 V_\perp dV_\perp dV_\parallel \frac{\partial F}{\partial V^2} = \frac{8\pi eu_0}{3} \int_0^\infty V^4 \frac{\partial F}{\partial V^2} dV = \\ &= \frac{4\pi eu_0}{3} \int_0^\infty V^3 \frac{\partial F}{\partial V} dV = 4\pi eu_0 \int_0^\infty V^2 F dV = -eu_0 N, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $N$  — невозмущенная плотность.

В задачах теории полярных сияний, однако, имеет место обратная ситуация: волновые числа  $k$  велики, и даже при сравнительно небольших полях  $E_y$  величина  $\gamma'\tau$  по модулю заметно больше единицы (считаем, что  $\tau$  порядка периода колебаний ионов вдоль силовой линии, т. е.  $\sim 10^2$  с). При этом

$$\bar{f} \approx \left( \frac{2eu_0}{M} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial V^2} \right) \left[ 1 - J_0^2 \left( \frac{kV_\perp}{\Omega} \right) \right]. \quad (22)$$

Оказывается, что величина  $p'$  зависит от параметра  $\lambda = k(V)/\Omega$ . При  $\lambda > 1$  по-прежнему  $p'$  определяется соотношением (21), при  $\lambda < 1$   $p' \rightarrow 0$ . Чтобы более точно оценить зависимость  $p'$  от  $\lambda$ , рассмотрим конкретный пример с  $F(V^2) = cV^2 \exp\{-V^2/V_0^2\}$  и вычислим интеграл с  $J_0^2$  (первый член дается формулой (21)):

$$\delta p' = -\frac{2eu_0}{3} c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (V_\parallel^2 + V_\perp^2) \left( 1 - \frac{V_\parallel^2 + V_\perp^2}{V_0^2} \right) \cdot \exp\left\{-\frac{V_\parallel^2 + V_\perp^2}{V_0^2}\right\} J_0^2\left(\frac{kV_\perp}{\Omega}\right) V_\perp dV_\parallel dV_\perp.$$

Интегрируя по  $V_\parallel$ , получаем:

$$\delta p' = -\frac{2eu_0 c \sqrt{\pi}}{3V_0} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{V_\perp^2}{V_0^2}\right\} J_0^2\left(\frac{kV_\perp}{\Omega}\right) V_\perp \left(V_\perp^4 + \frac{V_0^4}{4}\right) dV_\perp.$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью формулы [5]:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} J_0^2(\beta x) x dx = \frac{1}{2\alpha} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right\} J_0\left(\frac{\beta^2}{2\alpha}\right).$$

Член с  $V_0^4$  вычисляется непосредственно, а член с  $V_1^4$  — двукратным дифференцированием по параметру  $\alpha$ . Результат можно представить в виде

$$p' = -eu_0 N \psi \left( \frac{kV_0}{\Omega} \right).$$

График функции  $\psi$  приведен на рис. 1. Видно, что переход  $p'$  от значений  $-eu_0 N_0$  до нуля происходит очень быстро (при изменении  $kV_0/\Omega$  от 1 до 0,5). Если перейти к координатному представлению, что можно положить, с учетом четности  $\psi$ , что

$$p' = eN \left\{ u(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K \left[ \left( \frac{(x-x')}{\delta} \right)^2 \right] u(x') dx' \right\}, \quad \delta = \frac{2V_0}{\Omega}, \quad (23)$$

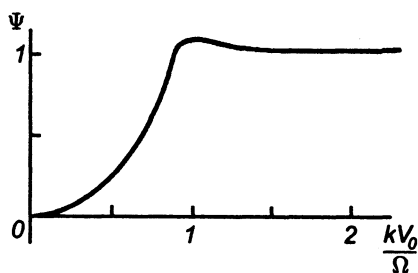


Рис. 1

где  $K$  — ядро, быстро спадающее до нуля при  $|x - x'| > \delta$  и удовлетворяющее условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K \left[ \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^2 \right] d\xi = 1.$$

Соотношение (23) является интерполяционной формулой, которая позволяет связать (с помощью (9)) возмущение продольного тока с возмущением магнитосферного потенциала. При решении ряда задач теории магнитосферно-ионосферного взаимодействия конкретный вид ядра не играет роли.

### Литература

1. Тверской Б. А. Докл. АН СССР. **188**, 575 (1969).
2. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
3. Fairfield D. H. J. Geophys. Res. **73**, 7329 (1968).
4. Frank L. A., Gurnett D. A. J. Geophys. Res. **76**, 6829 (1971).
5. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. М.; Л.: ОИТИ, 1935.

# О ПРИРОДЕ ОДНОРОДНЫХ ДУГ ПОЛЯРНЫХ СИЯНИЙ\*

## Аннотация

Показано, что система магнитосферно-ионосферных токов может оказаться неустойчивой относительно расслоения в областях, где продольные токи вытекают из ионосферы. При этом ларморовский радиус горячих ионов вблизи плоскости экватора должен быть больше обратного волнового числа неустойчивости, а плотность продольных токов в ионосфере — превышать некоторое критическое значение, определяемое геометрией задачи, ионосферной проводимостью и температурой горячих ионов  $T_i$ . Развитие неустойчивости существенно облегчается, если функция распределения горячих ионов по скоростям имеет максимум, а скачок потенциала между магнитосферой и ионосферой близок к  $\alpha T_i/e$ , где  $\alpha \approx 0,5-1$ .

## 1. Введение

В [1] на основе выдвинутой в [2] концепции магнитосферно-ионосферного взаимодействия обосновано наличие тесной связи между спокойными дугами полярных сияний и вытекающими из ионосферы продольными токами. В настоящее время ясно, что одиночные дуги и явления типа перевернутого V, фактически предсказанные в [1], совпадают с мощными вторжениями в ионосферу электронов, необходимыми для создания наблюдаемых плотностей токов, идущих из ионосферы. Появление кратных дуг естественно рассматривать как некоторую неустойчивость трехмерной токовой системы магнитосферно-ионосферного взаимодействия.

В данной работе указана и исследована такая неустойчивость. Механизм ее весьма прост. Видно, что вблизи максимумов возмущения ионосферного потенциала возмущение продольного тока направлено вниз, а вблизи минимума — вверх. С другой стороны, на больших высотах под действием эффективного рассеяния давление ионов вблизи минимума потенциала возрастет, а вблизи максимума — уменьшится. При этом в первом случае генерируемый горячей плазмой продольный ток усилится, а во втором — ослабнет. Если исходный продольный ток направлен к Земле, то его возмущения в ионосфере и магнитосфере направлены в противоположные стороны и взаимно гасят друг друга. Если же ток течет из ионосферы, то оба эффекта складываются, и при надлежащей геометрии может возникнуть неустойчивость.

Для создания теории этого явления потребовалось выяснить ряд методических вопросов, касающихся связи возмущений продольного тока и потенциала в недипольном поле при пространственных масштабах, сравнимых с ларморовским радиусом ионов. Эти задачи разобраны в [3]. В разделе 2 данной работы на основе полученных в [3] уравнений развита теория спокойных дуг. Из проведенного в этом разделе анализа следует, что сияния с мелкомасштабными лучистыми формами

---

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 22. № 6. 966–973 (1982).

не возмущают продольных токов и должны возникать вследствие неустойчивости дрейфа холодной ионосферной плазмы в скрещенных полях. В работе [4] исследована одна из таких неустойчивостей и дано объяснение ряду свойств лучистых дуг.

## 2. Спокойные дуги

Приведем полученные в [3] уравнения, необходимые для исследования устойчивости магнитосферно-ионосферных взаимодействий. Имеем уравнение непрерывности тока в ионосфере:

$$\operatorname{div} \hat{\Sigma} \nabla U_i = j_i, \quad (1)$$

где  $\hat{\Sigma}$  — двумерный тензор проинтегрированной по высоте проводимости (педерсеновской и холловской),  $U_i$  и  $j_i$  — электрический потенциал и продольный ток в ионосфере. В случае изотропии давления  $p$  и квазинейтральности горячей плазмы на больших высотах генерируемый в магнитосфере продольный ток есть

$$j_m = c(\nu[\nabla W \nabla p]), \quad (2)$$

где  $c$  — скорость света,  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к ионосфере,

$$W = \int_L \frac{ds}{H} \quad (3)$$

— объем силовой трубки с единичным магнитным потоком (интеграл берется вдоль магнитных силовых линий от Земли до плоскости экватора). Величины  $W$ , по определению, а  $p$  — в силу изотропии постоянны вдоль силовых линий и рассматриваются в (2) как функции широты и долготы в ионосфере. В стационарном случае  $j_i$  и  $j_m$  совпадают, а в нестационарном случае — различаются вследствие запаздываний возмущений тока и потенциала в ионосфере и магнитосфере, переносимых альвеновскими волнами. В данной работе рассматривается стационарный случай.

Если на больших высотах имеется малое возмущение потенциала  $u_m$ , то возмущение давления есть

$$p' = -en \left\{ u_m(X, Y) - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_m(X', Y') K(X, X', Y, Y') dX' dY' \right\}, \quad (4)$$

где  $n$  — невозмущенная плотность частиц горячей плазмы,  $X, Y$  — спроектированные вдоль силовых линий в плоскость экватора ионосферные координаты  $x, y$ . Ядро  $K$  симметрично по  $X, X'$  и  $Y, Y'$  и быстро спадает до нуля при  $[(X - X')^2 + (Y - Y')^2]^{1/2} > r_H$ , где  $r_H$  — ларморовский радиус горячих ионов в плоскости экватора. Интеграл от  $K$  по каждой паре переменных  $X, Y$  или  $X', Y'$  равен единице. Уравнение (4) показывает, что если потенциал  $u_m$  мало меняется на расстояниях  $\sim r_H$ , то и возмущение давления мало. В противоположном случае устанавливается распределение типа Больцмана.

Если силовые линии мало отклоняются от плоскостей меридиана, то

$$X = xL^{-3/2} \frac{H_i}{H_s}, \quad Y = yL^{3/2} \quad (5)$$

в случае, когда ось  $y$  в ионосфере ориентирована по магнитной долготе, а ось  $x$  — по широте. В формуле (5)  $H_i$  и  $H_s$  — напряженность поля в ионосфере и в плоскости экватора, а  $L$  — параметр Мак-Илвайна.



Возмущение потенциала в ионосфере  $u_i$  может не совпадать с  $u_m$  по двум причинам: 1) из-за указанного выше запаздывания в нестационарном случае, 2) из-за наличия скачка потенциала вдоль силовых линий. Согласно теоретическим представлениям [5, 6], подтвержденным экспериментально [7],

$$U_i = U_m + \frac{j_i - j_i^*}{j^*} \frac{T_e}{e}, \quad (6)$$

где  $T_e$  — температура электронов в магнитосфере,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона

$$j^* = ne \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m}}, \quad (7)$$

где  $j^*$  — максимальный ток, обусловленный высыпанием электронов без ускорения.

Сначала рассмотрим для простоты случай, когда наличие скачка (6) для возмущений  $u$  несущественно:  $u_i = u_m = u$ . Затем получим критерий такого приближения и рассмотрим важные следствия его нарушения. Будем считать также, что проводимости  $\Sigma_\Pi$  и  $\Sigma_\chi$  постоянны. Учет самосогласованных изменений  $\Sigma_\Pi$  и  $\Sigma_\chi$  не играет принципиальной роли, хотя и может изменить ряд важных деталей общей картины. Нас интересуют прежде всего возмущения в виде полос, вытянутых в направлении  $Y$ . При этом можно проинтегрировать ядро  $K$  по  $Y'$ , и тогда, переходя к ионосферным координатам, из (4) получаем:

$$p' = -en \left\{ u(x, y) - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x', y) K(x, x') dx' \right\}. \quad (8)$$

Ядро  $K$  обладает указанными выше свойствами, а ларморовский радиус  $r_H$  трансформируется по формулам (5):

$$r'_H = r_H L^{3/2} \frac{H_3}{H_i} \equiv \delta. \quad (9)$$

Методы решения трехмерных задач магнитной гидростатики еще не разработаны, и мы не можем вычислить возмущение  $W$  за счет вариации давления  $p'$ . В случае плазмы низкого давления этим эффектом можно пренебречь. Областям формирования дуг в плоскости экватора соответствует, по-видимому, область перехода от низкого к высокому давлению (об этом свидетельствует, в частности, корреляция между внешней границей радиационных поясов и потоками электронов типа перевернутого  $V$ ). Поэтому можно предположить, что отказ от учета возмущений не приведет к грубым ошибкам. Поскольку, кроме того, сияния локализованы в узкой области с шириной  $\sim 200$  км ( $\sim 2^\circ$  широты), будем считать, что  $\nabla W$  — постоянный вектор. При этом мы не учитываем также кривизну самой полосы вторжения продольного тока. Это предположение, естественно, вполне законно.

Итак, выберем ось  $y$  в направлении хода линий постоянного  $W$  и рассмотрим полосу, в которой имеется не зависящий от  $y$  продольный ток. Это означает, согласно (2), что невозмущенное давление  $p$  имеет вид:

$$p = p_0(x) + \gamma u p_1(x).$$

Считая, что температура ионов  $T_i$ , мало меняется в пределах полосы, получаем аналогичное соотношение для невозмущенной плотности:

$$n = n_0(x) + \gamma u n_1(x). \quad (10)$$

Из (1), (2) и (7)–(10) в нулевом и первом приближении получаем:

$$\frac{d^2 U_{0i}}{dx^2} = - \left( \frac{c\gamma}{\Sigma_{\Pi}} \right) \left( \frac{dW}{dx} \right) p_1(x) \equiv \left( \frac{1}{\Sigma_{\Pi}} \right) j_0(x), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{ce}{\Sigma_{\Pi}} \frac{dW}{dx} \left\{ \gamma n_1(u - \hat{L}u) - (n_0 + \gamma u n_1) \frac{\partial}{\partial y} (u - \hat{L}u) \right\}, \quad (12)$$

где  $\hat{L}$  — интегральный оператор в (7).

Неустойчивость появляется в том случае, когда уравнение (12) имеет ограниченные по  $x$  решения, монотонные при  $x \rightarrow \pm\infty$  и зависящие от  $y$  так же слабо, как и  $n$  или  $p$ .

Рассмотрим простейшую модель, считая, что  $n_0 = N + n_1(x)$ , где  $N$  — константа, а  $n_1$  — некоторая функция, имеющая один максимум и стремящаяся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Положим, что в максимуме  $n_1 = aN_0$  и пренебрежем в последнем члене (12) функцией  $\gamma u n_1$  в сравнении с  $(N_0 + n_1)$  (при малых  $\gamma$  это справедливо в протяженной области, где  $a\gamma u \ll 1$ ).

Пусть  $n_1$  имеет вид  $n_1 = aNF(\kappa x)$ . Введем безразмерные переменные  $\xi = \kappa x$ ,  $\eta = \kappa y$  и безразмерные параметры

$$\Gamma = \frac{ce\gamma aN}{\Sigma_{\Pi}\kappa^2} \frac{dW}{dx} = \frac{ce\gamma ap_0}{\Sigma_{\Pi}\kappa^2 T_i} \frac{dW}{dx}, \quad s = \frac{ceN}{\Sigma_{\Pi}\kappa} \frac{dW}{dx} = \Gamma \frac{\kappa}{a\gamma}. \quad (13)$$

Из сравнения (11) и (13) видно, что величина  $\Gamma$  характеризует максимальную плотность невозмущенного продольного тока  $j_0$  и может быть представлена в виде

$$\Gamma = \frac{j_0 e}{(\Sigma_{\Pi}\kappa^2 T_i)} \quad (14)$$

и с помощью (11) выражена через скачок электрического поля на рассматриваемой полосе:

$$\Gamma = \frac{[E]e}{T_i\kappa} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) d\xi \right)^{-1}. \quad (15)$$

Уравнение (12) принимает теперь вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\Gamma F(\xi)(u - Lu) - s[1 + aF(\xi)] \frac{\partial}{\partial \eta} (u - \hat{L}u). \quad (16)$$

Рассмотрим решения вида  $u = u(\xi)e^{-k\eta}$ . Тогда

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + k^2 u = -\Gamma F(\xi)(u - \hat{L}u) + ks[1 + aF(\xi)](u - \hat{L}u). \quad (17)$$

Введем функцию  $w = w(\xi)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + k^2 w = -\{(\Gamma - aks)F(\xi) - ks\}w. \quad (18)$$

Если оно имеет ограниченные решения, то при  $x \rightarrow \pm\infty$   $y' = 0$  и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [k^2 + (\Gamma - aks)F(\xi) - ks] w d\xi = 0. \quad (19)$$

Если далее  $w(\xi)$  всюду медленно меняется на расстояниях порядка  $\delta$  (см. (8)), то разность  $(w - \widehat{L}w) \rightarrow 0$  и исходное уравнение не имеет искомого решения. Если же в некоторой области значений  $x$  функция  $w$  испытывает осцилляции с волновым числом  $2\pi/\lambda$  (вычисленным по расстоянию между нулями или экстремумами) таким, что  $(2\pi/\lambda)\delta \geq 1$ , то в этой области функция  $|\widehat{L}u| \ll |u|$ . При этом решение будет иметь вид:

$$u(\xi) = w(\xi) + \bar{u}(\xi). \quad (20)$$

Сглаженную поправку  $\bar{u}$  можно оценить из следующих соображений. Будем считать, что  $F(\xi)$ ,  $\widehat{L}w$  и  $\bar{u}$  мало меняются на ларморовском радиусе, так что с точностью до поправок  $\sim (\kappa\delta)^2 \widehat{L}F = F$ ,  $\widehat{L}\widehat{L}w = \widehat{L}w$ ,  $\widehat{L}\bar{u} = \bar{u}$ . Тогда, подставляя (20) в (17), получаем:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + k^2 \bar{u} = (\Gamma - aks)\widehat{L}w. \quad (21)$$

В случае когда изменения по  $y$  малы ( $k \ll 1$ ), в (19) и (21) можно опустить  $k^2$  и тогда

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\xi} \{(\Gamma - aks)F(\eta) - ks\} \widehat{L}w(\eta) d\eta d\xi. \quad (22)$$

Уравнение (19) обеспечивает необходимое условие существования интеграла (22) — обращение в нуль  $du/d\xi$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Действительно,

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi}(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Gamma - aks)F(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} w(\zeta)K(\zeta, \eta) d\zeta d\eta.$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что  $\widehat{L}F = F$  (все расчеты ведутся в нулевом приближении по  $(\kappa\delta)^2$ ), приходим к соотношению (19) при  $k^2 \rightarrow 0$ .

Таким образом, при наличии осцилляций  $w(\xi)$  с масштабом, меньшим  $2\pi\delta\kappa$ , решение выражается через функцию  $w(x)$ . Можно показать, что и в этом случае поправка  $\bar{u}$  существенно не меняет характер решения. Строгое решение задачи также можно провести на основе уравнения (18), рассматривая величину  $(\Gamma - aks)$  как собственное значение и разлагая  $u$  в ряд по соответствующим собственным функциям.

Выберем теперь в качестве модели  $F$  потенциал Теллера  $F = \text{ch}^{-2} \xi$ , широко используемый в квантовой механике. Сделав замену переменной  $\text{th} \xi = z$  и положив  $w = (1 - z^2)^\nu \psi$ , можно свести уравнение (18) к виду

$$(1 - z^2)\psi'' - 2z \left[ \sqrt{k(s - k)} + 1 \right] \psi' + [F - aks - k(s - k)]\psi = 0, \quad (23)$$

выбрав для этого

$$\nu = \frac{\sqrt{k(s - k)}}{2}. \quad (24)$$

Решения (23), (24) при  $x \rightarrow \pm\infty$  монотонны и ограничены, если  $0 \leq k \leq s$ . При  $k > s$  и  $k < 0$  решения на бесконечности переходят в  $\exp\{\pm i k \kappa x\}$  и электрическое

поле не обращается в нуль. Кроме того, как известно [8], уравнение типа (23) имеет ограниченные решения лишь при выполнении определенного условия:

$$\Gamma = l \left[ l + 1 + 2\sqrt{k(s-k)} \right] + aks + k(s-k), \quad (25)$$

где  $l$  — натуральное число. При этом функция  $\psi$  является полиномом Якоби вида

$$\psi_l(z) = (1-z^2)^{-q} \frac{d^l}{dz^l} (1-z^2)^{l+q}, \quad q = \sqrt{k(s-k)}, \quad (26)$$

причем поскольку  $q > 0 > -1$ , каждый из  $l$  корней полинома  $\psi_l$  является простым, вещественным и лежит в рассматриваемой области  $|z| \leq 1$ . Таким образом,  $l$  дает число нулей потенциала  $u$  и соответственно возмущения продольного тока. Наиболее устойчивым при данном  $\Gamma$  будет решение с наибольшим  $l$ , так как более широкие полосы могут распасться на меньшие части. Положим

$$\Gamma = (l+1)l + 2\varepsilon(l+1), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Учитывая, что  $s$  — большая величина (порядка отношения длины полосы продольного тока к ее ширине), мы можем ограничиться рассмотрением значений  $k$  вблизи 0. Отсюда и из (25) легко найти  $k$  в зависимости от  $\varepsilon$ . При  $a \lesssim 1$  и  $\varepsilon \lesssim 1/2$ , в частности,

$$k = \frac{1}{s} \left( \frac{l+1}{l} \right)^2 \varepsilon^2 \ll 1,$$

т. е. потенциал  $u$  изменяется в направлении оси  $y$  гораздо медленнее, чем невозмущенное давление. Этот же вывод справедлив и в случае  $a \gg 1$  (т. е. когда создающий продольный ток «горб» давления по амплитуде гораздо выше фона). При малых  $a$  и  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $k \sim 1/s$  и потенциал меняется по  $y$  примерно так же, как давление.

Можно получить нелинейное решение данной задачи вблизи максимума  $p$  для случая, когда функция распределения ионов  $f$  имеет вид  $\delta(v^2 - v_0^2)$ , а при возмущениях переходит в  $\delta(v^2 + 2eu/M - v_0^2)$  (в области, где выполняется условие сравнимости длины волны с ларморовским радиусом). Оказывается, что пространственный период возмущения практически не зависит от амплитуды. Поэтому полученное решение справедливо и в нелинейном случае, причем амплитуда будет определяться из условия равенства (с точностью до множителя порядка единицы)

$$eu_{\min} \approx -T_i, \quad (27)$$

где  $u_{\min} < 0$  — наименьшее значение  $u$ . При этом горячая плазма вытесняется из области  $u = u_{\min}$ , и развитие неустойчивости прекращается.

Выше мы считали, что  $u_i = u_m$ . Опираясь на полученные результаты, рассмотрим этот вопрос подробнее. При этом достаточно ограничиться случаем  $\Gamma = n(n+1)$  ( $k = 0$ ), когда возмущение продольного тока в области осцилляций есть просто

$$j' = -j_0(x) \left( \frac{eu_m}{T_i} \right). \quad (28)$$

Здесь следует уточнить определения температуры, плотности и давления при немасвелловских функциях распределения ионов  $f = f(v^2)$ . Считаем, что

$$n = \int_0^\infty f(v^2) v^2 dv, \quad p = \frac{M}{3} \int_0^\infty v^4 f(v^2) dv, \quad T_i = \frac{p}{n}. \quad (29)$$

Пусть  $n'$  — возмущение плотности. Согласно [3],

$$n' = \frac{2eu_m}{M} \int_0^\infty v^2 \frac{dF}{dv^2} dv. \quad (30)$$

Учитывая, что ток  $j^*$  в (6) пропорционален плотности, линеаризуем это уравнение по  $u_i$  и  $u_m$ :

$$u_i = u_m + \frac{j_0(\xi)}{j_0^*(\xi)} \left( \frac{1 - eu_m/T_i}{1 + n'/n} - 1 \right) \frac{T_e}{e} \approx u_m \left\{ 1 - \frac{j_0(\xi)T_e}{j_0^*(\xi)T_i} \left( 1 + \frac{n'}{n} \frac{T_i}{u_m} \right) \right\}.$$

Вычисление по формулам (29), (30) показывает, что при распределении Максвелла всегда  $u_i = u_m$ . Однако есть основания считать, что в рассматриваемых областях холодные ионы отсутствуют и  $f(v^2)$  имеет максимум. Рассмотрим, например, модель с

$$f(v^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} cv^2 \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_0^2} \right\}.$$

Несложные вычисления дают:

$$n = \frac{3}{4} cv_0^5, \quad p = \frac{5}{8} cv_0^5 M v_0^2, \quad n' = \frac{eu_m}{2Mv_0^2} cv_0^3$$

и

$$u_i = u_m \left[ 1 - \frac{5}{9} \frac{j_0(x)}{j_0^*(x)} \left( \frac{T_e}{T_i} \right) \right]. \quad (31)$$

В рассмотренном выше случае  $j_0(\xi) = j_0 \operatorname{ch}^{-2}\xi$

$$j_0^*(x) = j_0^* \left( \frac{1}{a+1} + \operatorname{ch}^{-2}\xi \right),$$

$$u_i = u_m \left\{ 1 - \frac{5}{9} \frac{j_0}{j_0^*} \left( \frac{T_e}{T_i} \right) \left[ 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 \xi}{a+1} \right]^{-1} \right\}. \quad (32)$$

При достаточно больших  $a$  почти во всей области осцилляций коэффициент в (32) постоянен. Если он положителен, то, учитывая, что  $u_i$  стоит в левой, а  $u_m$  — в правой части уравнения, можно заключить, что рассмотренный процесс приводит к увеличению эффективного значения  $\Gamma$ :

$$\Gamma_{\text{эфф}} = \Gamma \left[ 1 - \frac{5}{9} \left( \frac{j_0}{j_0^*} \right) \left( \frac{T_e}{T_i} \right) \right]^{-1}. \quad (33)$$

Если  $j_0 \rightarrow \frac{9}{5} j^* \frac{T_i}{T_e}$ , то порог неустойчивости резко снижается. Если же  $j_0 > \frac{9}{5} j^* \frac{T_i}{T_e}$ , то в центре полосы неустойчивость исчезает, зато на ее краях возникают две бесконечно глубокие потенциальные ямы, в каждой из которых может сформироваться по несколько узких полос.

Базируясь на полученных выше результатах, можно утверждать, что для исследования неустойчивости произвольного одномерного распределения тока  $j_0(\xi) = j_0 F(\xi)$  достаточно ограничиться анализом уравнения

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = -\frac{j_0 e}{\kappa^2 \Sigma_{\Pi} T_i} F(\xi) \left[ 1 - \alpha \frac{j_0 F(\xi)}{j_0^* n(\xi)/n_{\max}} \right]^{-1} w, \quad (34)$$

где входящий в (31) безразмерный множитель  $\sim 1$ , зависящий от функции распределения (в (31) он равен 5/9);  $n(\xi)$  — невозмущенная плотность,  $n_{\max}$  — ее наибольшее значение,  $j_0^*$  — соответствующий  $n_{\max}$  ток (7)). Это уравнение имеет дискретный, как правило, конечный набор решений, соответствующих определенным значениям  $j_{0n} > 0$ . Если  $F(\xi)$  и знаменатель в (34) всюду положительны, то можно утверждать, что номер решения соответствует числу нулей  $w$ , если же коэффициент в правой части (34) меняет знак, то требуется специальное исследование. Методы решения таких задач хорошо разработаны в квантовой механике.

Решение (34) соответствует реальной неустойчивости, если масштабы осцилляций  $\lambda$  удовлетворяют условию

$$2\pi\delta > \lambda. \quad (35)$$

Если истинное значение  $j_0$  лежит между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м собственными значениями, то решение будет иметь  $n$  нулей, а отличие  $j_0$  от  $j_{0n}$  компенсируется появлением слабой зависимости от  $y$ . Дуги, на которые распадается полоса, ориентированы вдоль линий  $W = \text{const}$ .

Решение мало изменяется и в нелинейном случае. Установившаяся амплитуда соответствует условию, при котором минимальное значение установившегося продольного тока

$$j(x) = j_0(x) \left[ 1 - C \frac{e}{T_i} w(x) \right] \quad (36)$$

стремится к нулю. Отсюда находим константу  $C$ . Реализуются наиболее устойчивые решения с максимально возможным числом дуг (т. е. с наибольшим  $n$ ).

Яркость отдельных дуг пропорциональна  $j^2(x)$  и поэтому в максимумах она может быть заметно выше, а в минимумах — ниже яркости свечения невозмущенной полосы.

В случае, когда знаменатель в (34) меняет знак, мы провели (для модели с ямой Теллера) подробное, довольно громоздкое исследование. Задача сводится к уравнению Хойна [9, п. 2.329], и в случае узкой области отрицательных значений знаменателя решение может быть сшито из двух гипергеометрических функций. Справа и слева от центра полосы при этом появится по несколько дуг.

Итак, для решения вопроса об устойчивости продольного тока  $j(x) > 0$  необходимо знать ряд параметров. В [1] показано, что вероятные значения  $j_0$  в умеренно возмущенных условиях порядка одной абсолютной единицы, а полуширина  $\kappa^{-1}$  полосы  $j(x) > 0$  составляет около 100 км. Эти значения хорошо подтверждены экспериментом. Наблюдались значения  $j_0$  до 5–10 CGSE и  $\kappa^{-1}$  до 200 км. Температура электронов  $T_e$  в магнитосфере, над дугами составляет 0,5–1 кэВ, температура ионов  $T_i \sim 2$ –3 кэВ, плотность  $n \sim 1 \text{ см}^{-3}$ . Проводимость  $\Sigma_{\Pi}$  в ионосфере в районе сияний  $\sim 10^{13}$  абсолютных единиц и, вообще говоря, зависит от величины  $j(x)$ . Сияния происходят на силовых линиях с  $L \approx 10$ , и можно ожидать, что поле у экватора  $\sim 30$  нТл. Наблюдаемые дуги чаще всего являются одиночными (т. е. устойчивыми). Иногда наблюдается две параллельные дуги, что соответствует  $n = 2$ , реже — три довольно симметричных дуги ( $n = 4$ ). Больше число спокойных однородных дуг — явление исключительно редкое.

Рассмотрим прежде всего условие (35). Будем считать, что средняя скорость ионов  $\bar{v}_0 = 10^8 \text{ см/с}$  ( $T_i \approx 3 \text{ кэВ}$ ). Из (9) находим, что  $\delta \approx 10^6 \text{ см}$  ( $L = 10$ ,  $H_3 = 30 \text{ нТл}$ ,  $H_i \approx 5 \cdot 10^4 \text{ нТл}$ ).

Если обозначить через  $\lambda$  расстояние между соседними максимумами или минимумами свечения, то для выполнения условия (35) необходимо выполнение неравенства  $\lambda \leq 60$  км. Наиболее яркая часть дуги занимает  $\sim 1/3$  расстояния  $\lambda$ . Поэтому ширина самих дуг должна быть меньше  $\sim 20$  км. Этот результат соответствует данным наблюдений.

Рассмотрим реальные значения параметра  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{j_0 e}{\Sigma \kappa^2 T_i}. \quad (37)$$

Подставляя вероятные значения входящих в (37) величин в абсолютных электрических единицах ( $j_0 \approx 1$ ,  $e = 5 \cdot 10^{-10}$ ,  $\Sigma = 10^{13}$ ,  $\kappa \approx 10^{-7}$  см,  $T_i \approx 5 \cdot 10^{-9}$  эрг  $\rightarrow 3$  кэВ), получаем  $\Gamma \approx 1$ . Как уже отмечалось,  $j_0$  может быть в несколько раз больше, а  $\kappa$  — в два раза меньше. Поэтому значение  $\Gamma = 6$ , необходимое для раздвоения дуги, может быть достигнуто и без учета влияния разности потенциалов между магнитосферой и ионосферой. Однако для утроения дуги необходимы значительно более высокие значения  $\Gamma$ , порядка 20–40. В условиях умеренной возмущенности такие значения маловероятны (отметим, что существенное повышение  $\Gamma$  за счет уменьшения  $\kappa$  и  $T_i$  приводит к противоречию с критерием (35)). Поэтому причину повышения кратности дуг следует искать в уменьшении знаменателя в (34). Согласно (7), при  $n = 1$  см $^{-3}$  и  $T_e = 500$  эВ,  $j_0^* \approx 0,2$  абс. ед. Следовательно, при  $j_0 \sim 1$ ,  $T_i \sim 3$  кэВ и  $\alpha = 0,5$ –1 легко достижимы условия малости или изменения знака знаменателя в (34). В магнитосфере Земли, таким образом, основным критерием появления кратных дуг является условие

$$\alpha \left( \frac{j_0}{j_0^*} \right) \frac{T_e}{T_i} > 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (38)$$

Оценим светимость дуг. С помощью (6) получаем, что поток переносимой электронами энергии  $j(U_i - U_m)$  в максимумах дуг ( $j \approx 2j_0$ ) при условии (38) и  $\alpha = 0,5$  по порядку величины есть  $4j_0 T_i / e$ . На высотах  $\sim 120$  км от Земли концентрация  $N_2$  в 4–5 раз выше, чем  $O_2$ . Принимая, что на один акт ионизации расходуется  $\sim 50$  эВ и учитывая, что почти на каждый акт ионизации  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $O$  возникает один фотон с длиной волны  $5577 \text{ \AA}$ , получаем, что интенсивность в этой линии (при  $j_0 = 1$  CGSE,  $T_i = 3$  кэВ) порядка 100 килорелей. Значения интенсивности в полосе  $N_2^+$  ( $3914 \text{ \AA}$ ) имеют примерно ту же величину.

Развитая выше теория объясняет основные свойства спокойных однородных дуг. Кроме того, из нее следует вывод о расслоении горячей плазмы в магнитосфере над дугами. Вблизи плоскости экватора в этих районах плотность такой плазмы и, возможно, магнитное поле должны испытывать заметные периодические вариации с длиной волны  $\sim 1000$  км.

Выше отмечалось, что ширина дуг, согласно данной теории, порядка 10 км. Анализ показывает, что уменьшать ее до величины  $\leq 1$  км практически невозможно. Кроме того, даже с учетом вариаций проводимости в рамках изложенной концепции невозможно объяснить сильное расслоение в направлении  $y$  и частые изменения знака электрического поля. Поэтому причину появления лучистых форм следует искать на иных путях. В таких формах колебания электрического поля достигают  $\sim 100$  мВ/м на расстояниях  $\sim 10^4$  см. Соответствующие амплитуды колебаний потенциала не превышают нескольких десятков вольт и не могут сильно повлиять на магнитосферную

плазму. Следовательно, лучистые формы вряд ли связаны с возмущениями продольного тока. Возможные причины образования лучей рассмотрены в [4].

### Литература

1. *Tverskoy B. A.* Solar-Terrestrial Physics/1970, ed. by E. R. Dyer (Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1972), 297.
2. *Тверской Б. А.* ДАН СССР. **188**, 575 (1969).
3. *Тверской Б. А.* Геомагнетизм и аэрономия. **22**, 991 (1982).
4. *Тверской Б. А.* Геомагнетизм и аэрономия. **23**, 542 (1983).
5. *Knight L.* Planet. Space Sci. **21**, 741 (1973).
6. *Антонова Е. Е., Тверской Б. А.* Геомагнетизм и аэрономия. **15**, 85 (1975).
7. *Lyons L. R., Evans D. E., Lundin R. J.* Geophys. Res. **84**, 457 (1979).
8. *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики. 3, ч. 2. М.: Гостехиздат, 1951.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.



## О ЛУЧИСТЫХ ФОРМАХ ПОЛЯРНЫХ СИЯНИЙ

### Аннотация

Исследована неустойчивость дрейфа холодной неоднородной ионосферной плазмы в скрещенных полях на границах областей положительных продольных токов и связанных с ними высыпаний электронов типа перевернутого  $V$ . Показано, что при достаточно большой скорости дрейфа и наличии резкого градиента невозмущенной электронной концентрации плазма собирается в эллиптические цилиндры. Центры направляющих этих цилиндров лежат на внешней границе области с крутым градиентом электронной концентрации, причем большие оси составляют с этой линией угол  $\pi/8$ .

В [1] было показано, что мелкомасштабные (лучистые) формы полярных сияний не порождают заметных продольных токов. Поэтому причину возникновения лучистых форм следует искать в неустойчивости дрейфа неоднородной ионосферной плазмы в скрещенных полях. Мы рассмотрим эту задачу в ее простейшем варианте, считая, что основные процессы развития неустойчивости протекают в динамо-слое. При этом ионы и электроны можно считать холодными, плазму — квазинейтральной, а движение электронов — бесстолкновительным.

Рассмотрим для определенности северное полушарие (можно показать, что в южном полушарии картина полностью идентична). Введем систему координат с осью  $z$ , направленной вертикально от Земли, и будем считать, что магнитное поле имеет лишь  $z$ -компоненту:  $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$  (в северном полушарии  $H < 0$ ). Выберем далее ось  $x$  вдоль невозмущенного электрического поля  $\mathbf{E}_0$ :  $\mathbf{E}_0 = \{E_0, 0, 0\}$  и будем считать, что невозмущенное распределение электронной концентрации  $n_0$  также не зависит от  $y$ :  $n_0 = n_0(x, z)$ . Поскольку скорость электронов определяется только электрическим дрейфом, распределение суммы возмущенных и невозмущенных значений электронной концентрации  $n$  определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V}n = q - \alpha n^2, \quad \mathbf{V} = \frac{c[\mathbf{H} \nabla U]}{H^2}, \quad (1)$$

$U$  — полное значение электрического потенциала; считаем, что  $\partial U / \partial z = 0$ . В соответствии со сделанными выше предположениями заданная величина скорости ионообразования  $q$  не должна зависеть от  $y$ . Выберем ее в виде

$$q = q(x)f_1(z).$$

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 23. № 1. 48–54 (1983).

Тогда невозмущенное значение  $n_0$  есть

$$n_0 = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} = n_0(x) f_2(z). \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = \alpha(z)$  — коэффициент рекомбинации.

Помимо (1), должны выполняться уравнения движения ионов и условие квазинейтральности. В случае когда возмущения продольного тока  $j_{||}$  отсутствуют, эти уравнения сводятся к уравнению непрерывности поперечного тока  $j_{\perp} = -\sigma_{\Pi} \nabla U + \sigma_X [\nu \nabla U]$ :

$$\operatorname{div} \{ \sigma_{\Pi} \nabla U - \sigma_X [\nu \nabla U] \} = \frac{\partial}{\partial z} j_{||}. \quad (3)$$

Здесь  $\nu$  — единичный вектор вдоль оси  $Oz$ , а знаки выбраны так, чтобы проводимость Холла  $\sigma_X$  была положительной (проводимость Педерсена  $\sigma_{\Pi} > 0$  — по определению). В невозмущенных условиях

$$-\frac{d}{dx} \sigma_{\Pi_0} \frac{dU_0}{dx} = \frac{d}{dx} \sigma_{\Pi_0} E_0 = -\frac{\partial j_{||}}{\partial z}. \quad (4)$$

Положим  $n = n_0 + n_1$ ,  $U = U_0 + u$ , где  $n_1$  и  $u$  — малые возмущения ( $\partial u / \partial z = 0$ ), и линеаризуем (1) и (3) по  $n_1$ ,  $u$  с учетом соотношений (2) и (4). Получаем:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} V_0 n_1 + c \frac{\operatorname{div} n_0 [H \nabla U]}{H^2} = -2\alpha n_0 n_1, \quad V_0 = \frac{c[E_0 H]}{H^2}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \{ \sigma_{\Pi_0} \nabla u - \sigma_{X_0} [\nu \nabla U] \} - \operatorname{div} \frac{n_1}{n_0} \{ \sigma_{\Pi_0} E_0 - \sigma_{X_0} [\nu E_0] \}. \quad (6)$$

При выводе (6) использована прямая пропорциональность между  $\sigma_{\Pi}$ ,  $\sigma_X$  и электронной концентрацией.

Коэффициенты уравнений (5), (6) не зависят от  $t$  и  $y$  и поэтому решение можно искать в виде

$$n_1 = n_1(x, z) \exp \{ \gamma t + iky \}, \quad u = u(x) \exp \{ \gamma t + iky \}, \quad (7)$$

где  $k$  — вещественная, а  $\gamma$  — комплексная константы. Неустойчивость возникает при  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ .

Задача резко упрощается, если в (5) можно пренебречь рекомбинационным затуханием в правой части. Допустим, что мы получили в этом приближении решение. Достаточным условием его справедливости будет тогда выполнение неравенства

$$\operatorname{Re} \gamma \gg \max \{ 2\alpha n_0 \}, \quad (8)$$

хотя практически, по-видимому, необходимо простое неравенство.

Рассмотрим область частот  $w = -\operatorname{Im} \gamma$ , при которых зависимостью  $\sigma_{\Pi}$  и  $\sigma_X$  от  $w$  можно пренебречь (фактически мы уже использовали это предположение при выводе (6)). Для этого достаточно потребовать, чтобы проинтегрированное по высоте динамо-слоя значение проводимости Педерсена значительно превышало соответствующий интеграл по высоте слоя  $F$ , где движение ионов можно считать бесстолкновительным. Используя приведенные в [2] формулы, получаем следующий критерий:

$$w \ll \left( \frac{N_{D_0}}{N_{F_0}} \right) \Omega_H, \quad (9)$$

где  $N_{D_0}$  — число электронов на квадратный сантиметр в динамо-слое, а  $N_{F_0}$  — в слое  $F$  ( $\Omega_H$  — ионная гирочастота). В области полярных сияний концентрации электронов в динамо-слое и слое  $F$  одного порядка величины, а толщина последнего на порядок больше. Поэтому условие (9) приводит к ограничению возможных частот величиной  $\sim 1$  Гц (гирочастота ионов  $O_2^+$  и  $N_2$  около  $2 \cdot 10^2$ ). Поскольку холловская проводимость в слое  $F$  убывает с уменьшением  $w$  быстрее, чем педерсеновская, условие (9) с запасом обеспечивает малую зависимость  $\sigma_\chi$  от  $w$ . Отметим, что при нарушении неравенства (9) в слое  $F$  возникнут интенсивные альвеновские волны, уносящие энергию из ионосферы. Поэтому условие (9) обеспечивает также отсутствие дополнительных источников затухания.

Проинтегрировав с учетом сделанных замечаний уравнения (5) и (6) по высоте, получаем:

$$E_0(x)N(x) = \frac{ikV(x)}{\gamma - ikV(x)} \frac{dN_0}{dx} u_0(x), \quad V(x) = c \frac{E(x)}{H}, \quad (10)$$

$$N_0 \left\{ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - k^2 u(x) \right\} + \frac{dN_0}{dx} \frac{du}{dx} + i\chi k \frac{dN_0}{dx} u = \frac{d}{dx} N E_0 - ik\chi N E_0, \quad (11)$$

где  $N_0$  и  $N$  — соответственно проинтегрированные по высоте ионосферы невозмущенная плотность электронов и ее возмущение, а  $\chi$  — отношение проинтегрированных по высоте проводимостей Холла и Педерсена. Обычно  $\chi = 1-2$ . Исключая  $N(x)$ , получаем для  $u$  дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} N_0 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} - k^2 u \right\} + \frac{dN_0}{dx} \frac{du}{dx} + i\chi k \frac{dN_0}{dx} u = \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{ikV(x)}{\gamma - ikV(x)} \frac{dN_0}{dx} u \right\} + \frac{\chi k^2 V(x)}{\gamma - ikV} \frac{dN_0}{dx} u. \end{aligned} \quad (12)$$

Видно, что нетривиальные решения существуют только тогда, когда  $dN_0/dx \neq 0$ .

Рассмотрим теперь конкретную модель распределения  $N(x)$  и  $V(x)$ , характерную для областей вблизи границы электронных высыпаний типа перевернутого  $V$ . Часто эти высыпания характеризуются наличием протяженного плато  $j_{||}(x) = \text{const}$  с шириной  $\sim 60-200$  км и резким спадом  $j_{||}(x)$  на краях плато с масштабом изменения в  $e$  раз порядка нескольких километров. Ток  $j_{||}(x)$  или, точнее говоря, создающие его электроны являются основным источником ионизации. Поскольку энергия этих электронов пропорциональна плотности тока, их энерговыделение в ионосфере (скорость ионообразования  $q$ ) квадратично по  $j_{||}(x)$ , а создаваемая ионизация пропорциональна  $j_{||}(x)$  (см. (2)). Электрическое поле  $E(x)$  формируется током, возникающим в динамо-слое вследствие растекания  $j_{||}(x)$ . Подавляющая часть этого горизонтального тока формируется в области плато, а добавкой, возникающей на краях (в областях спада  $j_{||}(x)$ ) можно пренебречь. При этом вне плато горизонтальный ток не зависит от  $x$ , а электрическое поле растет обратно пропорционально проводимости Педерсена (т. е.  $N_0(x)$ ). Примем, что в области спада ( $x < 0$ ) плотность тока  $j_{||}$  и  $N_0(x)$  убывают экспоненциально:  $N(x) = N^{(0)} e^{x/\lambda}$ . На рис. 1 дано соответствующее распределение  $N_0(x)$  и  $E_x$ . Асимптотические значения  $N^{(1)}$  и  $E^{(1)}$  формируются за счет высыпания мягких электронов. Примеры данных такого типа были получены в экспериментах на ракете "Polar-3" [3] и ИСЗ «Эксплорер-С» [4].

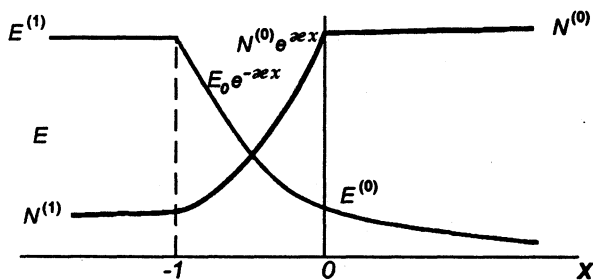


Рис. 1

В областях  $x > 0$  и  $x < -l$ , где  $dN_0/dx = 0$ , решения имеют вид:

$$u = u_0 e^{-|k|x} \quad (x > 0), \quad u = u_1 e^{|k|x} \quad (x < -l). \quad (13)$$

На границах  $x = 0$  и  $x = -l$  должны быть непрерывны потенциалы и их производная по  $x$ . Отсюда с помощью (13) получаем следующие граничные условия для решения  $u$  в интервале  $[-l, 0]$ :

$$\frac{du}{dx} = -|k|u \Big|_{x=0}, \quad \frac{du}{dx} = |k|u \Big|_{x=-l}. \quad (14)$$

Подставим в (11)  $N_0 = N^{(0)} e^{\alpha x}$ ,  $V = V^{(0)} e^{-\alpha x}$  ( $V^{(0)} = cE^{(0)}/H < 0$ ) и введем новую переменную

$$z = \frac{\gamma}{ikV_0} e^{\alpha x} \equiv z_0 e^{\alpha x}, \quad (15)$$

а также безразмерную константу  $\Lambda = k/\kappa$ . Получаем:

$$z^2(z-1)^2 u'' + z(z-1)(2z-3)u' + [-\Lambda^2(z-1)^2 + i\chi\Lambda z(z-1) + 1]u = 0. \quad (16)$$

Это уравнение сводится к гипергеометрическому подстановкой

$$u = z^\lambda (z-1)^\mu \psi. \quad (17)$$

Подстановка не меняет форму уравнения, изменяя лишь численные значения коэффициентов. Введем для новых коэффициентов специальные обозначения, чтобы уравнение приняло вид

$$z^2(z-1)^2 \psi'' + z(z-1)[(a+b+1)z-c]\psi' + [abz(z-1) + Gz + F]\psi = 0,$$

и подберем  $\lambda$  и  $\mu$  так, чтобы  $G$  и  $F$  обратились в нуль. Сократив на  $z(z-1)$ , получим гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\psi'' + [c-(a+b+1)z]\psi' = ab\psi = 0. \quad (18)$$

Вычисления дают

$$\lambda = \pm \lambda - 1, \quad \mu = 1, \quad a+b=c=1 \pm 2\Lambda, \quad ab=\Lambda \quad (i\chi \neq 1).$$

Можно выбрать любой знак и, в частности, положить

$$\lambda = |\Lambda| - 1 \equiv S - 1, \quad S > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lambda &= S - 1, \quad a = S + \frac{1}{2} + \sqrt{S^2 + isS + \frac{1}{4}}, \\ b &= S + \frac{1}{2} - \sqrt{S^2 + isS + \frac{1}{4}}, \quad c = 2S + 1,\end{aligned}\quad (19)$$

где  $s = \chi\Lambda/|\Lambda|$ .

Поскольку  $dz/dx = \kappa z$ , граничные условия (14) принимают вид:

$$\left[ z_0 \frac{du}{dz} + Su \right]_{z=z_0} = 0, \quad \left[ z_1 \frac{du}{dz} - Su \right]_{z=z_1} = 0, \quad z_1 = z_0 e^{-\kappa l}. \quad (20)$$

Нас интересуют решения с большими инкрементами и поэтому естественно искать их в области, где  $|z_0| \gg 1$ . Можно показать, что решения, при которых и  $|z_1| \gg 1$ , отсутствуют. Мы рассмотрим сначала идеализированный случай  $|z_1| \ll 1$ , который может реализоваться лишь при малых значениях величины  $\eta = \exp\{-\kappa l\}$ . Реальный перепад электронной концентрации, согласно [3, 4], не превышает порядка величины.

Общее решение (18) при  $|z| < 1$  имеет вид [5]:

$$\psi = AF(a, b, c, z) + Bz^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z),$$

где  $F$  — гипергеометрические ряды. Соответственно

$$u = Az^{S-1}(1-z)F(a, b, c, z) + Bz^{S-c}(1-z)F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z). \quad (21)$$

При  $|z| \ll 1$  в коэффициентах при  $F$  можно оставить лишь члены с наименьшей степенью  $z$ , а сами функции  $F$  считать равными единице (поскольку  $dF/dz \sim F$ , члены с  $F'$  в (21) будут иметь более высокий порядок малости). Таким образом, при  $z \rightarrow z_1$

$$u \approx Az^{S-1} + Bz^{-S-1} \quad (c = 2S + 1).$$

Подставляя во второе условие (20), находим:

$$B = -\frac{1}{c}A(-z_1)^{2S} \quad (22)$$

(мы ввели знак минус перед  $z_1$  для удобства сопряжения с условием при  $z \rightarrow z_0$ ; очевидно,  $(-1)^{2S} = 1^S = 1$ ).

При  $|z| > 1$  решение (21) переходит в

$$\begin{aligned}u &= Az^{S-1}(1-z)\Gamma(G) \left\{ \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(b)\Gamma(-b)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-b, 1-b+a, \frac{1}{z}\right) + \right. \\ &+ \frac{\Gamma[-(a-b)]}{\Gamma(a)\Gamma(-a)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-a, 1-a+b, \frac{1}{z}\right) \Big\} + \\ &+ Bz^{-S+1}(1-z)\Gamma(2-c) \left\{ \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(a-1)} (-z)^{b-1} \Gamma\left(1-b, a, 1+a-b, \frac{1}{z}\right) + \right. \\ &+ \frac{\Gamma[-(a-b)]}{\Gamma(1-b)\Gamma(b-1)} (-z)^{a-1} F\left(1-a, b, 1-a+b, \frac{1}{z}\right) \Big\}.\end{aligned}$$

При этом должно выполняться условие [5]

$$-\pi < \arg(-z) < \pi. \quad (23)$$

Вблизи  $z = z_0$  (поскольку  $|z_0| \gg 1$ ) можно положить  $F = 1$  (поскольку  $F' \sim z^{-2}$ ) и ограничиться в коэффициентах при  $F$  наивысшими степенями  $z$  с точностью до постоянного множителя  $A(-1)^{S+1}$ .

$$u \approx \left[ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(-b)} - \frac{(-z_1)^{2S}\Gamma(2-c)}{c\Gamma(1-a)\Gamma(a-1)} \right] \Gamma(a-b)(-z)^{S-a} + \\ + \left[ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(-a)} - \frac{(z_1)^{2S}\Gamma(2-c)}{c\Gamma(1-b)\Gamma(b-1)} \right] \Gamma[-(a-b)](-z)^{S-b}.$$

Преобразуя  $\Gamma$ -функции с помощью формулы Вейерштрасса  $\Gamma(\zeta)\Gamma(-\zeta) = -\pi/\zeta \sin \pi\zeta$  и используя соотношения между  $a, b, c$  и  $S$  (19), получаем

$$u \approx - \left\{ \frac{\Gamma(c)}{\pi} b \sin \pi b + \frac{(-z_1)^{2S}(c-1)(a-1) \sin \pi a}{\sin \pi c \Gamma(c+1)} \right\} (-z)^{S-a} \Gamma(a-b) + \\ + \left\{ \frac{\Gamma(c)}{\pi} a \sin \pi a + \frac{(-z_1)^{2S}(c-1)(b-1) \sin \pi b}{\sin \pi c \Gamma(c+1)} \right\} \times \\ \times \frac{\pi}{\Gamma(a-b+1) \sin \pi(a-b)} (-z)^{S-b}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в граничное условие (20), приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$(b-1) \left\{ \frac{\Gamma(c)}{\pi} b \sin \pi b + \frac{\eta^{2S}(-z_0)^{2S}(c-a)(a-1) \sin \pi a}{\sin \pi c \Gamma(c+1)} \right\} \Gamma(a-b) = \\ = (a-1) \left\{ \frac{\Gamma(c)}{\pi} a \sin \pi a + \frac{\eta^{2S}(-z_0)^{2S}(c-1)(b-1) \sin \pi b}{\sin \pi c \Gamma(c+1)} \right\} \times \\ \times \frac{\pi}{\Gamma(a-b+1) \sin \pi(a-b)} (-z_0)^{a-b}. \quad (25)$$

Отметим прежде всего, что члены с  $\eta^{2S}$  пренебрежимо малы в сравнении с первыми членами в скобках. Даже при  $|z_1| \approx 1$  отношение этих членов  $\sim \Gamma^{-2}(c)$ . Приведенные формулы теряют силу при целочисленных значениях  $c$ , однако вывод о малости членов с  $\eta^{2S}$  сохраняет силу (это можно доказать с помощью предельных формул для  $F(a', b', c', z)$  при  $c' \rightarrow -p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ). Дополнительный анализ показывает также, что данный вывод справедлив и при  $|z_1| \sim 1$ , хотя граничное условие в виде (22) здесь неприменимо и следует учитывать производные гипергеометрических функций. Итак, при  $|z_0| \gg 1$ ,  $|z_1| \lesssim 1$  характеристическое уравнение (25) сводится к

$$(-z_0)^{a-b} = \frac{b(1-b)}{\pi} \frac{1}{a(a-1)} \frac{\sin \pi b \sin \pi(a-b)}{\sin \pi a} \Gamma(a-b) \Gamma(a-b+1). \quad (26)$$

В случае когда  $S \gg s$  (см. (19)),

$$a \approx 2S + \frac{(1+is)}{2}, \quad b = \frac{(1-is)}{2}.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга

$$\Gamma(\zeta) \approx \sqrt{2\pi} \left(\frac{\zeta}{e}\right)^{\zeta} \sqrt{\zeta^{-1}}$$

(здесь и ниже  $e$  — число Непера) и формулами Эйлера для синусов, получаем:

$$(-z_0)^{a-b} = \frac{1+\chi^2}{8S^2} e^{\pi\chi} \cdot i \frac{|s|}{s} \left[ \left( \frac{a-b}{e} \right)^2 \right]^{a-b} \quad (27)$$

(мы отбросили в  $a(a-1)$  члены  $\sim 1/(4S^2)$  и учли, что при  $\chi = 1-2$  величина  $e^{-\pi\chi}$  мала, так что в формулах Эйлера можно отбросить члены такого порядка). При решении (27) можно опустить в показателе члены порядка  $b/S^2$ . Тогда

$$z_0 = - \left[ \frac{1+\chi^2}{8S^2} e^{\pi\chi} \right]^{\frac{1}{2}S} \frac{4S^2}{e^2} \exp \left\{ \frac{i}{S} \left( s + \pi p + \frac{\pi |s|}{4} \right) \right\} \quad (28)$$

и

$$\gamma = k|V^{(0)}| \left[ \frac{1+\chi^2}{8S^2} e^{\pi\chi} \right]^{\frac{1}{2}S} \frac{4S^2}{e^2} \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} + \frac{i}{S} \left( s + \pi p + \frac{\pi |s|}{4} \right) \right\}. \quad (29)$$

Здесь  $p \in (-p_1, -(p_1-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, p_2)$  — целые числа, а значения  $p_1$  и  $p_2$  определяются из условия  $|\arg(-z_0)| < \pi$ .

Допустимые значения  $s = 2S+1$  определяются указанными ранее требованиями

$|z_0| \gg 1$ ,  $|z_1| = \eta|z_0| \lesssim 1$ . Величина  $\left[ \frac{1+\chi^2}{8S^2} e^{\pi\chi} \right]^{\frac{1}{2}S}$  в интересующих нас случаях ( $\chi = 1-2$ ,  $S \sim 5-7$ ) всегда близка к единице. Максимальное значение  $S$  определяется условием  $|z| \approx 1$ :

$$S_{\max} \approx \frac{e}{2} \sqrt{\eta} \quad (30)$$

(поскольку можно показать, что при  $|z_1| \gg 1$  решение не существует). При данном  $S$  наибольший инкремент достигается при таких значениях  $p$ , когда показатель экспоненты в (29) наиболее близок к нулю (при  $k > 0$ ) или к  $\pi$  (при  $k < 0$ ). С учетом (30)

$$\gamma_{\max} \approx \left( \frac{e\chi}{2\sqrt{\eta}} \right) |V^{(1)}|, \quad V^{(1)} = \frac{V^{(0)}}{\eta}. \quad (31)$$

Поскольку отклонения показателя от указанных значений заключены в пределах  $\pm i\pi/(2S)$  (что соответствует изменению  $p$  на единицу), частоты  $\omega$  и фазовые скорости  $V_f = \omega/k$  будут лежать в пределах

$$|\omega| \leq \left| \frac{\pi}{2S} k V^{(1)} \right|, \quad |V_f| \leq \left| \frac{\pi}{2S} V^{(1)} \right|. \quad (32)$$

Фазовые скорости оказываются при этом заметно меньшими, чем скорость электрического дрейфа  $V^{(1)}$ , и могут в принципе стать равными нулю.

Амплитуда потенциала асимптотически убывает в обе стороны от максимума как  $\exp\{-|k|x'\}$ , где  $x' = x - x_m$ , а  $x_m$  — положение максимума (в случае волн с наибольшим инкрементом  $x_m \sim -l$ ). При переходе через максимум показатель

получает добавку  $\pm i\pi/2$  (знак плюс соответствует  $k > 0$ ). Поэтому зависимость потенциала от  $x$  можно представить интерполяционной формулой

$$u(x') = (e^{|k|x'} \pm ie^{-|k|x'})^{-1}. \quad (33)$$

Картина распределения  $N(x', y')$ , где  $y' = y - V_f(t)$ , соответственно примет вид (см. (10)):

$$N(x', y') = \frac{e^{kx}}{V^{(1)} - iV(x)} \frac{e^{iky'}}{e^{|k|x'} \pm ie^{-|k|x'}}.$$

Поскольку  $N(k) = N^*(-k)$ , можно считать, что  $k > 0$  и разделить в (32) и (33) вещественную и мнимую части. Каждая из них будет решением исходных уравнений. Заменяя для простоты медленно меняющиеся (при  $k \gg \kappa$ ) функции  $e^{kx}$  и  $V(x)$  их значениями при  $x' = 0$ , получаем (с точностью до постоянного множителя):

$$N_1(x', y') = \operatorname{Re} N(x', y') = \frac{\cos ky' \operatorname{ch} kx' - \sin ky' \operatorname{sh} kx'}{\operatorname{ch} 2kx'}. \quad (34)$$

Мнимая часть совпадает с (34) со сдвигом по  $y'$  на  $-\pi/(2k)$ . Очевидно, что максимумы  $N_1$  находятся в точках  $x' = 0$ ,  $y' = 2\pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Рассмотрим ход линий  $N_1 = \operatorname{const}$  вблизи максимума  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ . Полагая

$$N_1 = N_{\max}(1 - \varepsilon) = \operatorname{const}, \quad \varepsilon \sim k^2 x'^2 \sim k^2 y'^2 \ll 1$$

и разлагая (34) в ряд Тейлора вблизи  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ , с точностью до квадратичных членов получаем:

$$3x'^2 + 2x'y' + y'^2 = \frac{2\varepsilon}{k^2}. \quad (35)$$

Стандартное исследование показывает, что кривая (35) — эллипс с полуосями

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{k} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,85 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{k}, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{k} \sqrt{2(2 - \sqrt{2})} \approx 1,1 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{k}.$$

Большая полуось образует с осью  $y$  угол  $\pi/8$ .

Таким образом, рассмотренная неустойчивость приводит к собиранию электронов и ионов в эллиптические цилиндры. В этих цилиндрах возрастает скорость рекомбинации. Поскольку почти в каждом акте диссоциативной рекомбинации возникает возбужденный атом кислорода в состоянии  $S^1$ , цилиндры будут интенсивно излучать в зеленой линии с длиной волны  $5577 \text{ \AA}$ . Высота области свечения определяется наличием большого числа электронов и заметной концентрацией молекул  $N_2$  и  $O_2$ . При температурах верхней атмосферы  $\sim 2000 \text{ K}$  высота столбов может составлять сотни километров.

Внешний вид и яркость сияния зависят от места наблюдения. Если смотреть на него издали, в направлении ориентации больших осей, мы увидим лучистую дугу с размером лучей, соответствующим малой оси. При других ориентациях луча зрения будут видны более широкие, но менее яркие лучи. Если смотреть под малым углом к дуге, когда столбы будут частично заслонять друг друга, увидим типичную картину драпри, а если сияние находится в зените, то будет наблюдаться корона. В двух последних случаях видимая яркость сияния много больше, чем при наблюдении отдельных лучей сбоку, так как на луче зрения окажется гораздо больше излучающих атомов.



В заключение приведем ряд численных оценок. Пусть

$$n^{(0)} = 10^6 \text{ см}^3, \quad n^{(1)} = 2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}, \quad V^{(1)} = 5 \cdot 10^4 \text{ см/с}, \\ (E^{(1)} = 50 \text{ мВ/м}), \quad \kappa = 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}, \quad \alpha = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}.$$

При этом  $k \approx 3\kappa$ ,  $\lambda \approx 2\kappa^{-1} = 6 \cdot 10^5 \text{ см}$ . Если принять за границу свечения область с  $\varepsilon = 1/2$ , то минимальная полуширина лучей будет около 700 м. Критерий  $\gamma > 2\alpha n_0$  заведомо выполняется, даже если плотность возрастает в два раза и достигнет величины (в максимуме)  $\sim 4 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ . Объемная светимость достигнет величины  $\sim 5 \cdot 10^4 \text{ фотонов/см}^2 \cdot \text{с}$  ( $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ ), максимальная яркость отдельного луча — 10 килорелей, яркость драпри и короны (при эффективной высоте столба  $\sim 50 \text{ км}$ ) соответственно до 50 и 200 килорелей.

Таким образом, существует неустойчивость дрейфа холодной неоднородной плазмы в скрещенных полях, которая проявляется в рекомбинационном излучении в виде ряда типичных форм лучистых сияний (внешний вид и яркость сияния при одной и той же физической картине сильно зависят от места наблюдения). Вместе с тем наличие более тонких лучей (с размерами  $\sim 10 \text{ м}$ ) не укладывается в данную теорию. Возможно, что слабое поле  $E_y$  (которое в наших уравнениях даст член с малым параметром при третьей производной) может привести к появлению еще более тонких структур.

### Литература

1. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. 22, 966 (1982).
2. Хансон В. Б. Структура ионосферы // Околоземное космическое пространство. М.: Мир, 1966. 92.
3. Beaujardiere O. de la, Vondrak R., Hals R., Hanson W., Hoffman R. J. Geophys. Res. 86, 4671 (1981).
4. Evans D. S., Maynard N. C., Troim T., Yacobsen T., Egeland A. J. Geophys. Res. 82, 499 (1977).
5. Умттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. 2. М.: Физматгиз, 1963. Изд. 3, М.: УРСС, 2002.

# МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ КОЛЬЦЕВОГО ТОКА МАГНИТНЫХ БУРЬ\*

## Аннотация

Рассмотрены следствия закономерности, связывающей амплитуду  $D_{st}$ -вариации с положением  $L_{\max}$  максимума интенсивности пояса релятивистских электронов, возникающего сразу по окончании бури. Считая, что  $L_{\max}$  соответствует положению максимума давления плазмы кольцевого тока в момент максимальной амплитуды главной фазы бури, рассчитана структура этого плазменного образования и обоснована выдвинутая автором ранее из теории магнитосферно-ионосферного взаимодействия концепция адиабатического заброса облака плазмы вглубь магнитосферы во время суббури и последующей симметризации облака. Показано, что наличие исходной закономерности означает наличие некоторой границы, на которой энтропия, отнесенная к силовой трубке магнитного поля с единичным магнитным потоком, всегда имеет одно и то же значение. Обоснована применимость теории плазмы низкого давления к данной проблеме.

1. Одной из основных нерешенных задач физики магнитосферы остается проблема формирования равновесного плазменного облака, создающего кольцевой ток магнитной бури. Временные и пространственные масштабы этих процессов ( $\sim 10$  мин – 1 ч;  $2-5 \cdot 10^4$  км) таковы, что по законам баллистики для экспериментального изучения такого облака необходимо одновременное использование большого числа ИСЗ. К такому выводу, в частности, еще в 1987 г. пришли участники Международного московского симпозиума, посвященного 30-летию запуска первого спутника Земли.

Практически нет и количественных закономерностей, описывающих какие-либо явления в данной области. Гораздо лучше изучены возмущения кольцевого тока (процессы магнитосферно-ионосферного взаимодействия).

Поэтому представляет большой интерес проанализировать одну из немногих таких закономерностей, касающуюся связи между положением максимума интенсивности возникающих после бури потоков захваченных релятивистских электронов и амплитудой  $D_{st}$ -вариации во время главной фазы бури [1].

Известно [2], что во время главной фазы бури потоки релятивистских электронов во внешнем поясе резко убывают, но после восстановления поля могут появляться вновь, часто превышая исходные значения. Такая картина довольно типична, хотя бывают случаи, когда сразу после бури восстановления не происходит. Сущность обнаруженной в [1] и многократно подтвержденной закономерности состоит

---

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 37. № 5. 29–34 (1997).

в следующем. Пусть  $|D_{st}|_{\max}$  — максимальное (по модулю) значение  $D_{st}$ -вариации во время данной бури. Если восстановление поля привело к появлению потоков релятивистских электронов, то положение максимума  $L_{\max}$  этих потоков сразу после восстановления поля (через несколько часов — сутки после максимума  $D$ ) определяется соотношением

$$|D_{st}|_{\max} = 2,75 \cdot 10^4 L_{\max}^{-4} \text{ нТл.} \quad (1)$$

Соотношение (1) получено с помощью анализа поля точек с абсциссами  $L_{\max}$  и ординатами, соответствующими  $|D_{st}|_{\max}$  в двойном логарифмическом масштабе методом наименьших квадратов. Примерно 20 точек с  $L_{\max}$  в интервале от  $\approx 2,5$  до  $\approx 5,5$  и  $|D_{st}|_{\max}$  от 40 до 400 нТл достаточно равномерно и кучно ложатся на данную кривую [3].

Качественная интерпретация указанной закономерности связана с концепцией адиабатических вариаций потоков частиц в радиационных поясах [4]. В ослабленное во время главной фазы магнитное поле каким-то образом попадают энергичные электроны (это могут быть адиабатически замедленные при ослаблении поля исходные частицы, а также проникшие вдоль разомкнутых во время бури дрейфовых орбит или ускоренные при пересоединении в хвосте электроны). По мере восстановления и усиления поля энергия этих частиц растет. При крутом спектре, характерном для релятивистских электронов, даже сравнительно слабое усиление поля способно вызвать значительное возрастание потоков. С этой точки зрения область  $L_{\max}$  соответствует области максимального относительного ослабления поля при наибольшем значении  $|D_{st}|_{\max}$  и, возможно, характеризует максимальное давление плазмы кольцевого тока.

Ниже мы проанализируем соотношение (1) в аксиально-симметричном приближении для случая плазмы с давлением, близким к изотропному.

2. Задача о связи величины  $D_{st}$  с энергией плазмы кольцевого тока рассматривалась в приближении низкого давления плазмы в ряде работ (основные из них — [5–7]). Мы рассмотрим эту задачу в аксиально-симметричном случае, не предполагая первоначально малости давления плазмы. В качестве исходной примем сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с центром в диполе и полярной осью вдоль его оси. Введем эйлеровы потенциалы магнитного поля  $\alpha, \varphi$ , где  $\varphi$  — азимутальный угол. В силу сделанных предположений о симметрии поля и изотропии давления  $p$ , имеем  $p = p(\alpha)$ . По определению потенциал  $\alpha$  постоянен на силовых линиях.

В данной геометрии все используемые векторы  $\nabla\alpha, ds, \nabla\varphi$  и т. д. ортогональны или коллинеарны, все функции являются одночленами и известно, что окончательный результат для магнитного поля возмущения в плоскости экватора является вектором, антипараллельным невозмущенному полю. Это позволяет упростить вычисления, и вместо векторов в большинстве случаев пользоваться их абсолютными величинами.

Исходим из известной формулы для магнитного поля  $dh$  элемента кольцевого тока  $dJ$  на оси тока. На рис. 1 за точку наблюдения принят диполь. Элемент тока  $dJ$  — ток, протекающий через площадку  $dS = \frac{ds d\alpha}{|\nabla\alpha|}$  вблизи участка силовой линии  $\alpha$ , в точке  $R, \theta$ . Из условия гидростатического равновесия с учетом сделанных замечаний имеем для плотности тока  $j_\varphi \equiv j$ :

$$|\nabla p| \equiv \frac{dp}{d\alpha} |\nabla\alpha| = \frac{1}{c} j H, \quad j = \frac{c}{H} \frac{dp}{d\alpha} \cdot |\nabla\alpha| \quad (2)$$

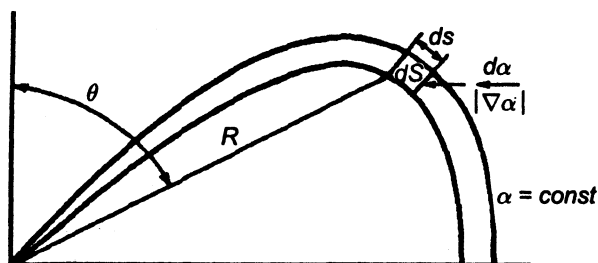


Рис. 1. Система координат, в которой ведется рассмотрение:  $\theta$  — полярный угол,  $ds$  — элемент дуги,  $dS = \frac{ds d\alpha}{|\nabla\alpha|}$  — элемент поверхности вблизи участка силовой линии  $\alpha$

и

$$dJ = j dS = c \frac{dp}{d\alpha} \cdot \frac{ds}{H} d\alpha. \quad (3)$$

Согласно известной формуле для поля кольцевого тока на оси в нашей геометрии

$$dh = \frac{2\pi \sin^2 \theta}{c R} dJ = 2\pi \frac{dp \sin^2 \theta}{d\alpha R} \frac{ds}{H} d\alpha. \quad (4)$$

Как известно, в поле диполя величина  $\sin^2 \theta / R$  постоянна на силовой линии и равна  $(aL)^{-1}$ , где  $a$  — радиус Земли, а  $L$  — параметр Мак-Илвайна. Имеем

$$h = \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{dp}{d\alpha} \cdot \frac{1}{L(\alpha)} W(\alpha) d\alpha = \frac{2\pi}{a} \int \frac{W(p)}{L(p)} dp, \quad (5)$$

где  $W = \int \frac{ds}{H}$  — удельный объем силовой трубки с единичным магнитным потоком.

Анализ показывает, что если давление имеет резкий максимум при некотором  $L = L_m$ , то формула (5) с ошибкой менее 5 % справедлива даже при давлении в максимуме:  $p_m = \frac{2 H_m^2}{3 8\pi}$  ( $H_m$  — магнитное поле диполя в плоскости экватора при  $L = L_m$ ).

В поле диполя

$$W = \frac{32 a L^4}{35 H_0} \equiv W_0 L^4 \quad \left( W_0 = \frac{32 a}{35 H_0} \right), \quad (6)$$

где  $H_0 \approx 0,32$  Гс — поле диполя у экватора Земли. Выражение (5) можно преобразовать, считая независимой переменной  $W$ . Если  $pW/L$  стремится к нулю при  $W \rightarrow 0$  и  $W \rightarrow \infty$  (последнее условие соответствует условию отсутствия конвекции Кадомцева) получаем (по модулю):

$$h = \frac{2\pi}{a} \int_0^\infty p(W) \frac{dW}{dW} \frac{W}{L} dW. \quad (7)$$

Напомним, что условием применимости к (7) теории плазмы низкого давления является близость к единице выражения  $(W/W_d)^{1/4}$ , где  $W_d$  — приведенное выше

значение (6) удельного объема трубки с единичным магнитным потоком в поле диполя, а  $W$  — реальный объем данной трубки с учетом обжатия поля, диамагнитных эффектов и т. д. Поскольку последние эффекты существенны лишь вблизи плоскости экватора, соответствие участков трубок  $W$  и  $W_d$  можно установить из их совпадения на малых и средних высотах. Пренебрегая отличием множителя  $32/35$  от единицы, имеем  $W_d = (a/H_0)L^4$ . Преобразуем (7) к виду

$$h = \frac{2\pi}{a} \int_0^{\infty} p(W) \frac{d}{dW} \left[ W^{3/4} \cdot \left( \frac{W}{W_d} \right)^{1/4} \right] \left( \frac{H_0}{a} \right)^{-1/4} dW. \quad (8)$$

Если форма силовой линии искажена слабо, а магнитное поле в плоскости экватора не более чем в два раза отличается от дипольного, множитель  $(W/W_d)^{1/4}$  отличается от единицы менее чем на 20 %. Поэтому приближением плазмы низкого давления

$$h = \frac{3\pi}{2a} \left( \frac{H_0}{a} \right)^{-1/4} \int_0^{\infty} p(W) \cdot W^{-1/4} dW \quad (9)$$

можно пользоваться при довольно больших отклонениях реального поля от дипольного.

Предположим, что кольцевой ток формируется путем заброса в область захваченной радиации облака плазмы с установившимся после симметризации распределением давления

$$p = k \frac{H_0^2}{8\pi} \left( \frac{H_0 W}{a} \right)^{-\gamma} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{\beta} \left( \frac{W}{W_m} \right)^{-\beta} \right\} \quad (10)$$

(асимметричная стадия такого заброса довольно подробно рассмотрена в квазилинейном приближении в [8]). Здесь  $k$  — безразмерный неизвестный коэффициент, множитель с  $W^{-\gamma}$  описывает инжекцию по политропическому закону на внешнем краю области кольцевого тока, а экспоненциальный множитель позволяет моделировать широкий класс структур спада давления на малых расстояниях. Константы выбраны так, что при  $W = W_m$  давление автоматически имеет максимум.

Подставим (10) в (9), сделав попутно подстановку  $W = W_m x^{-1}$ . Тогда

$$h = \frac{3k}{16} H_0 \cdot \left( \frac{H_0 W_m}{a} \right)^{-\gamma + \frac{3}{4}} \cdot \int_0^{\infty} x^{\gamma - \frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{\beta} x^{\beta} \right\} dx.$$

В приближении плазмы низкого давления  $(H_0 W_m/a) = L_m^{-4}$ , где  $L_m$  — положение максимума давления, учитывая, что  $h = \frac{2}{3} |D_{st}|_{\max}$  (множитель  $2/3$  соответствует усилению  $D_{st}$  по сравнению с  $h$  за счет скин-экранировки), из (1) находим, что  $\gamma = 7/4$ . Вычисляя интеграл, имеем:

$$|D_{st}|_{\max} = \frac{9k}{32} H_0 L_m^{-4} \cdot I, \quad (11)$$

где  $I = 0,55$  при  $\beta = 1$ , а при  $\beta > 1,5$  практически равен единице. В дальнейшем будем считать, что  $\beta > 1,5$  и  $I = 1$  вне зависимости от  $\beta$ . Сопоставляя (11) и (1), находим эмпирическое значение  $k \approx 3$ .

С учетом полученных результатов, получаем следующее выражение для давления  $p_m$  в максимуме:

$$p_m = \frac{H_0}{8\pi L_m^7} 3 \exp \left\{ -\frac{7}{4\beta} \right\} = \frac{H_d^2(L_m)}{8\pi} \frac{3}{L_m} \exp \left\{ -\frac{7}{4\beta} \right\}, \quad (12)$$

где  $H_d(L_m) = H_0 L_m^{-3}$  — поле диполя при  $L = L_m$ . Зависимость  $p_m$  от  $\beta$  (параметра, характеризующего крутизну спада  $p$  при малых  $L$ ) более существенна чем в случае  $h$  и выходит на асимптотическое значение лишь при  $\beta \gg 1$ . В случае, когда инжекция имеет причиной один или несколько импульсов электрического поля короткой по сравнению с периодом магнитного дрейфа частиц кольцевого тока длительностью, имеет место аналогия с внезапными импульсами [9] и  $\beta = 2$ . Тогда множитель  $3 \exp \{-7/(4\beta)\}$  равен 1,3. При  $\beta = 1,5$  и 3 этот множитель соответственно равен 1 и 1,65. Таким образом, при наиболее разумном значении  $\beta = 2$  приближение низкого давления хорошо применимо при  $L_m > 2$  и, соответственно,  $|D_{st}|_{\max} < 2000$  нТл (насколько нам известно, реально наблюдались лишь  $|D_{st}|_{\max} \leq 600$  нТл).

Полученная нами формула для  $h$  относится к точке диполя. Можно проверить, однако, что почти то же значение имеет магнитное поле во всей экваториальной области внутри кольца (при  $\beta \geq 2$  граница достаточно четкая). По известной формуле, во внутренней области плоскости симметрии кольцевого тока  $r < r_0$

$$h(r) \sim \frac{1}{r + r_0} \left[ K + \frac{r_0 + r}{r_0 - r} E \right], \quad (13)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода от аргумента  $k^2 = \frac{4rr_0}{(r + r_0)^2}$ . Легко проверить, что  $h(r)$  почти постоянно вплоть до  $r \leq 0,8r_0$ .

Постоянство  $h(r)$  в рассматриваемой области численно установлено для одной из моделей в работе [7]. Учитывая, что внутренняя кромка тока узкая (при  $\beta = 2$  спад от максимума в  $e$  раз происходит на расстоянии  $L = 0,9L_{\max}$ ) для нахождения поля при  $L = L_{\max}$  можно воспользоваться одномерным приближением  $H^2 + 8\pi p = \text{const}$ . С помощью (12) легко найти, что  $h(L_{\max}) \approx 5/(3h)$ :

$$h = 1,8 \cdot 10^4 L_{\max}^{-4} \text{ нТл}, \quad h(L_{\max}) \approx 3 \cdot 10^4 L_{\max}^{-4}. \quad (14)$$

Проанализируем, наконец, полученный полнотропический закон распределения давления на внешней кромке кольцевого тока

$$p(W) \sim W^{-7/4}. \quad (15)$$

Учитывая, что  $p(W) = n(W) \cdot W^{-1} \cdot \varepsilon(W)$ , где  $n$  и  $\varepsilon$  — плотность и средняя энергия частиц плазмы кольцевого тока, заключаем, что нарастание  $\varepsilon(W)$  чрезвычайно близко соответствует адиабатическому ускорению частиц при перемещении их из трубки с некоторым граничным объемом  $W_b$  в трубки с меньшими объемами  $W$ . Так, в поле диполя, где  $W \sim L^4$ ,  $\varepsilon \sim L^3$ . Как показано в [10] (см. также [9]), по такому закону изменяется энергия подавляющего большинства частиц с не слишком малыми поперечными импульсами в плоскости экватора при сохранении двух адиабатических инвариантов.

Закон (15) соответствует безразличному конвективному равновесию плазмы во внешней части ловушки. В [8] (см. также [11]) показано, что только при таком

законе спада  $p$  во внешней части магнитосферного плазменного облака возможно формирование двух узких зон продольных токов суббурь (при этом обе эти зоны расположены на внутренней кромке).

Таким образом, имеется много убедительных аргументов в пользу интерпретации эмпирической закономерности (1) в рамках концепции конвективного заброса облака плазмы кольцевого тока в глубь магнитосферы. В частности, подтверждено, что при  $L_{\max}$  происходит наиболее сильная вариация напряженности магнитного поля. Следовательно соотношение, использованное в [1] при анализе положения максимума интенсивности потоков релятивистских электронов, возникающих сразу после спада  $D_{st}$ , является надежным индикатором положения максимума давления плазмы кольцевого тока в максимуме  $D_{st}$ .

Изложенные выше соображения представляются достаточно естественными за одним нетривиальным исключением. Для выполнения закона [1], помимо указанных выше естественных общих закономерностей конвекции плазмы в ловушках, необходимо еще одно условие. Должна существовать некая граница или пограничная область, в которой всегда величина  $P_b \cdot W_b^{7/4}$  имеет одно и то же значение. Только при этом заброс плазмы во время бури будет формировать облако плазмы кольцевого тока с заданными параметрами.

3. В заключение просуммируем полученные результаты, представив их на графике рис. 2. Это идеализированный график, где исходное поле предполагается дипольным, а вносимое плазмой возмущение  $h$  приведено в нижней части рисунка. В верхней части рисунка дано соответствующее распределение давления. Звездочкой обозначено максимальное возмущение магнитного поля в максимуме бури и соответствующее ему положение максимума пояса релятивистских электронов после бури.

Не следует придавать значения возможным расхождениям приведенных кривых с данными эксперимента при больших  $L$ . Как неоднократно отмечалось, развитая теория при больших  $L$  соответствует реальным значениям  $W$ , которые растут с расстоянием медленнее  $L^4$  из-за возрастающей роли обжатия магнитосферы. Это должно приводить к более медленному спаду  $W$  и  $p$  с ростом  $L$  и может привести

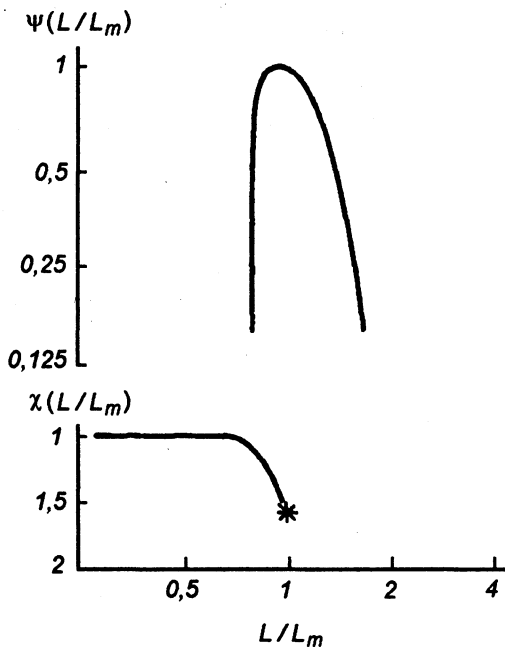


Рис. 2. Верхняя часть: распределение давления  $p = 0,06 L_m^{-7} \cdot \psi(L/L_m)$  эрг/см<sup>3</sup> в предположении дипольности поля. Нижняя часть: вносимое плазмой возмущение  $h = 1,8 \cdot 10^4 L_m^{-7} \chi$  нТл. Звездочкой обозначено максимальное возмущение магнитного поля в максимуме бури и соответствующее ему положение максимума пояса релятивистских электронов после бури

к расхождению кривых  $p(L)$  из-за расхождения зависимости  $W(L)$  при разных степенях обжатия.

При очень сильных бурях на асимметричной стадии возникают продольные токи и мощные потоки ионосферных ионов внутрь кольцевого тока. Это требует более тщательного анализа истинного положения  $L_{\max}$ . Однако при бурях средней интенсивности с  $L_{\max} \sim 3,5-4,5$  теория дает близкую к действительности картину кольцевого тока.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России» (программа СОЛМАГ) и проекта РФФИ № 95-02-04205-а.

### Литература

1. *Тверская Л. В.* О границе инжекции электронов в магнитосферу Земли // Геомагнетизм и аэронавигация. 26, 864 (1986).
2. *Van Allen J. A.* Charged Particles in the magnetosphere, in Magnetospheric Physics, ed. by D. J. Williams and G. D. Mead (Am. Geophys. Un., 1969), 233 (also Rev. Geophys. 7, 233 (1969)).
3. *Tverskaya L. V.* The latitude position dependence of the relativistic electron maximum as a function of  $D_{st}$  // Adv. Space Res. 18, 135 (1996).
4. *Тверской Б. А.* Динамика радиационных поясов Земли // Геомагнетизм и аэронавигация. 4, 436 (1964).
5. *Dessler A. J., Parker E. N.* Hydromagnetic theory of geomagnetic storms // J. Geophys. Res. 64, 2239 (1959).
6. *Schopke N.* A general relation between energy of trapped particles and the disturbance field over the Earth // J. Geophys. Res. 71, 3125 (1966).
7. *Akasofu S. I., Chapman S.* The ring current geomagnetic disturbance and Van Allen radiation belts // J. Geophys. Res. 66, 1321 (1961).
8. *Tverskoy B. A.* Electric fields in the magnetosphere and origin of trapped radiation Solar-Terr. Phys./1970 (Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1972), 297.
9. *Тверской Б. А.* Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
10. *Крымов Ю. С., Тверской Б. А.* Об изменении энергии частиц в поле диполя при переходах между различными дрейфовыми поверхностями // Геомагнетизм и аэронавигация. 4, 397 (1964).
11. *Антонова Е. Е., Тверской Б. А.* О природе электрических полей во внутренней магнитосфере // Геомагнетизм и аэронавигация. 36, 1 (1996).



### Глава III

## **Статистические механизмы ускорения заряженных частиц в космической плазме. Солнечные и галактические космические лучи**

### **К ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ФЕРМИ\***

#### **Аннотация**

Показано, что при ускорении Ферми выполняется принцип детального равновесия и ускорение сводится к диффузии частиц в импульсном пространстве. Выведено кинетическое уравнение для ускоряемых в турбулентной плазме частиц и получены условия, при которых эффективная длина свободного пробега не зависит от импульса, а функция распределения изотропна. Рассмотрены нестационарные решения без учета потерь и показано, что асимптотика спектров при больших энергиях имеет универсальный характер. Исследован эффект удержания быстрых частиц в турбулентной области за счет столкновений с волнами. Кратко обсуждены возможные приложения результатов к теории ускорения частиц при солнечных вспышках и в оболочках сверхновых звезд.

Ферми указал эффективный механизм ускорения частиц в турбулентной плазме (столкновения с движущимися магнитными неоднородностями) и дал оценку скорости роста средней энергии частиц при таком процессе [1]. Оценка основана на сравнении вероятностей «встречного» и «догоняющего» столкновений, при которых энергия частицы соответственно увеличивается и уменьшается. При данной скорости частицы вероятность столкновения в единицу времени равна среднему значению отношения модуля относительной скорости частицы и облака к расстоянию между облаками  $L$  и при встречных столкновениях несколько больше, чем при догоняющих. Отсюда, согласно [1],

$$\frac{dE}{dt} \approx \left( \frac{\overline{u^2}}{Lc^2} \right) vE, \quad (1)$$

где  $E$  — полная (включающая энергию покоя) энергия частицы,  $c$ ,  $u$  и  $v$  — скорость света, облака и частицы.

Идея Ферми была использована затем во многих работах для объяснения генерации быстрых частиц при различных астрофизических процессах. В большинстве

---

\* Тверской Б. А. ЖЭТФ. Т. 52. Вып. 2. 483–497 (1967).

работ оценки основывались на соотношении (1). В [2, § 16] отмечена роль флуктуаций числа встречных и догоняющих столкновений.

Данная статья посвящена в основном анализу общих свойств фермиевского ускорения. Показано, что при столкновениях с магнитными неоднородностями выполняется принцип детального равновесия, и, следовательно, ускорение сводится к диффузии в импульсном пространстве. Рассмотрен вопрос о роли рассеяния частиц и определены условия, при которых функцию распределения можно считать изотропной. Вычислены коэффициенты диффузии в реальном и импульсном пространствах, проанализирована относительная роль магнитных пульсаций различных масштабов в динамике быстрых частиц и получено кинетическое уравнение. Этим вопросам посвящен раздел 1. В разделах 2 и 3 рассматриваются различные нестационарные решения. В разделе 4 исследованы стационарные процессы с учетом магнитно-тормозных потерь. В качестве иллюстраций рассмотрены некоторые задачи, представляющие интерес для физики космических лучей.

### 1. Основные уравнения

Рассмотрим некоторую область плазмы в магнитном поле, в которой средние значения напряженности  $H$ , плотности плазмы  $N$ , ее температуры  $T$  и характеристик турбулентности можно считать однородными (т. е. не зависящими от координат). Указанные параметры могут, вообще говоря, зависеть от времени. Будем считать, что  $NkT \lesssim \bar{H}^2/(8\pi)$  и  $Nu^2M \lesssim \bar{H}^2/(8\pi)$  ( $M$  — масса иона,  $u$  — скорость турбулентных пульсаций плазмы). При этих условиях турбулентность имеет характер совокупности гидромагнитных волн различной длины, а скорость распространения неоднородностей определяется по порядку величины альвеновской скоростью  $u_a = \bar{H}/\sqrt{4\pi MN}$ . Обозначим через  $L$  основной масштаб турбулентности и через  $H_m$  величину поля в волнах такого масштаба. Будем считать, что  $H_m$  является максимальной амплитудой возмущения магнитного поля.

В качестве внутреннего масштаба турбулентности естественно выбрать длину порядка ларморовского радиуса тепловых ионов, поскольку при таких длинах волн происходит интенсивная циклотронная диссипация. Характер изменения амплитуды пульсаций с уменьшением масштаба  $\lambda$  при волновой турбулентности не выяснен. Можно лишь утверждать, что амплитуда убывает быстрее, чем  $\lambda^{1/3}$  (закон Колмогорова—Обухова), так как в плазме, помимо нелинейного дробления волн, происходит образование ударных волн, сопровождающееся более быстрой перекачкой энергии крупномасштабных движений к мелкомасштабным пульсациям.

Столкновения частицы с отдельными волновыми пакетами будем считать статистически независимыми, так как при сильной турбулентности в плазме возможны быстрые перемещения частиц поперек силовых линий за счет дрейфа на фронтах ударных волн (скорость такого дрейфа порядка скорости частицы, если скачок поля порядка среднего поля, а ширина фронта мала или сравнима с ларморовским радиусом ускоряемого заряда). Кроме того, при широком спектре пульсаций возможны существенные изменения картины поля за время между двумя отражениями.

Помимо ускорения Ферми, в такой плазме должна происходить диффузия частиц в импульсном пространстве за счет черенковских и циклотронных резонансов с различными волнами. Однако ввиду существенных отличий резонансных волн и крупномасштабных пульсаций среднеквадратичное изменение импульса распадается на два независимых члена — фермиевский, связанный с отражением от длинных

сильных волн, и резонансно-статистический, определяемый квазилинейной теорией. Настоящая работа посвящена изучению ускорения Ферми. При исследовании реальных процессов ускорения следует, вообще говоря, учитывать и квазилинейные члены. Однако можно показать, что при условиях, определяющих возможность ускорения Ферми (см. формулу (13) и ниже), именно оно определяет асимптотику спектра.

Частицы, скорость которых  $v \gtrsim u_a$ , а ларморовские радиусы  $r_L \ll L$ , будут эффективно отражаться от волн с усиленным полем и ускоряться. В отсутствие рассеяния, однако, ускорение имеет жесткий предел. Обозначим через  $v_{\parallel}$  продольную к полю компоненту скорости частицы в области, где  $H = \bar{H}$ . Если  $v_{\parallel}^2 \geq v^2(H_m - \bar{H})/H_m$ , частицы перестают отражаться и ускоряться. Следовательно, при сформулированных выше условиях ускорение Ферми эффективно лишь при наличии быстрого рассеяния частиц. Рассеяние обусловлено волнами, длина которых порядка ларморовского радиуса частицы с данной скоростью.

Для построения кинетического уравнения, описывающего быстрые частицы, можно было бы вычислить среднее и среднеквадратичное изменение импульса частицы в единицу времени и построить уравнение Фоккера—Планка. Эта процедура весьма громоздка. Укажем, в частности, что среднее изменение энергии, помимо вычисленного Ферми члена (1), содержит член противоположного знака. Этот эффект также связан с тем, что при заданных продольной и поперечной скоростях частиц относительная скорость встречного столкновения больше, чем догоняющего. Поэтому при встречных столкновениях отражение возможно от волн, минимальная амплитуда которых несколько выше, чем при столкновениях вдогонку, и, следовательно, ускорение связано с более узким участком спектра волн и менее вероятно.

В случае ускорения Ферми вывод уравнения можно значительно упростить, если учесть, что вероятности изменения импульса  $p_{\parallel}$  от  $p_{\parallel}$  до  $p_{\parallel}'$  и обратно (от  $p_{\parallel}'$  до  $p_{\parallel}$ ) равны. В нерелятивистском случае этот вывод очевиден. Действительно, пусть при встречном столкновении с некоторой волной, продольная скорость которой есть  $u_{\parallel}$ , скорость  $v_{\parallel}$  возросла до величины  $v_{\parallel} + 2u_{\parallel}$ . Ясно, что при догоняющем столкновении с такой же волной скорость изменяется от  $v_{\parallel} + 2u_{\parallel}$  до исходного значения  $v_{\parallel}$ . Вероятность (при равных  $v_{\perp}$ ) полностью определяется относительной скоростью, которая в первом случае есть  $v_{\parallel} + u_{\parallel}$ , а во втором  $v_{\parallel} + 2u_{\parallel} - u_{\parallel} = v_{\parallel} + u_{\parallel}$ . Следовательно, вероятность встречного столкновения частицы со скоростью  $v_{\parallel}$  равна вероятности «догоняющего» столкновения при скорости  $v_{\parallel} + 2u_{\parallel}$ .

Рассмотрим этот же вопрос в релятивистском случае. Обозначим через  $p$  и  $\epsilon$  импульс и полную энергию частицы и будем считать, что  $p$  измеряется в единицах  $Mc$ , а  $\epsilon$  — в  $Mc^2$ , и что они являются, таким образом, безразмерными величинами. Через  $\beta_0$  обозначим  $u_{\parallel}/c$  и положим, что при встречном столкновении  $\beta_0 > 0$ , а при догоняющем  $\beta_0 < 0$ . Переходя в систему координат, в которой волна неподвижна, получаем, что после отражения  $p_{\parallel}$  и  $\epsilon$  будут иметь следующие значения:

$$p'_{\parallel} = -\frac{p_{\parallel} + \beta_0 \epsilon}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad \epsilon' = \frac{\epsilon + \beta_0 p_{\parallel}}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \quad (2)$$

Совершая обратное преобразование Лоренца к исходной системе координат, находим, что после столкновения

$$p''_{\parallel} = -\frac{p_{\parallel}(1 + \beta_0^2) + 2\beta_0 \epsilon}{1 - \beta_0^2}, \quad \epsilon'' = \frac{\epsilon(1 + \beta_0^2) + 2\beta_0 p_{\parallel}}{1 - \beta_0^2}. \quad (3)$$

Если принять теперь в качестве начальных значений  $p_{||}''$  и  $\epsilon''$  и изменить знак  $\beta_0$ , то конечными значениями окажутся  $p_{||}$  и  $\epsilon$ . Следовательно, встречное и догоняющее столкновения являются прямым и обратным процессами, при последовательном осуществлении которых частица возвращается к исходному состоянию. Вероятности этих процессов определяются величиной  $|p'|$ . Если начальные значения —  $p$  и  $\epsilon$ , а  $\beta_0 > 0$ , то  $|p_{отн}| = \frac{p_{||} + \beta_0 \epsilon}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$ . Если же начальные значения —  $|p''|$  и  $\epsilon''$ , а  $\beta_0 < 0$ , то

$$|p_{отн}| = \left| \frac{|p_{||}''| - \beta_0 \epsilon''}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \right| = \frac{p_{||}(1 + \beta_0^2) + 2\beta_0 \epsilon - \beta_0 [\epsilon(1 + \beta_0^2) + 2\beta_0 p_{||}]}{(1 - \beta_0^2)^{3/2}} = \left| \frac{p_{||} + \beta_0 \epsilon}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \right|.$$

Таким образом, и в релятивистском случае прямой и обратный переходы равновероятны.

Отсюда следует (см., например, [3, 4]), что изменение функции распределения имеет чисто диффузионный характер и, поскольку  $p_{\perp}$  остается постоянным, уравнение для функции распределения быстрых частиц имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_{||}} \frac{(\Delta p_{||})^2}{\Delta t} \frac{\partial f}{\partial p_{||}} + \text{члены, учитывающие другие эффекты.} \quad (4)$$

Здесь функция  $f$  определена обычным образом ( $\int f d^3 p = n$ , где  $n$  — число быстрых частиц в единице объема).

Пусть  $K(h)$  — величина, обратная среднему минимальному расстоянию вдоль силовой линии между точками, в которых  $H - \bar{H} = h$ . Обозначим через  $\theta$  угол между импульсом частицы и полем в точках, где  $H = \bar{H}$ . Тогда число отражений в единицу времени (при  $v \gg u$ ) в линейном по  $u$  приближении будет равно <sup>1)</sup>  $|v_{||}| \cdot K(h)|_{h=\bar{H} \text{ctg} \theta}$ . Величина  $(\Delta p_{||}^2)$  с точностью до членов  $\sim u^2$ , согласно (3), равна  $4\beta_0^2 \epsilon$ . Отсюда изменение  $f$  за счет фермиевских столкновений есть

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_F = \frac{\partial}{\partial p_{||}} 2\beta_0^2 \epsilon |v_{||}| \cdot K(h) \Big|_{h=\bar{H} \text{ctg} \theta} \frac{\partial f}{\partial p_{||}}. \quad (5)$$

Учтем теперь рассеяние, введя в (5) оператор вида  $\tau_s^{-1}(p) \hat{S}_\theta$ , где  $\tau_s(p)$  — среднее время рассеяния частицы с импульсом  $p$  на угол  $\sim \pi$ , а оператор  $\hat{S}$  действует на угловую часть  $f$  и приводит к установлению изотропного распределения скоростей. Из последнего условия вытекает, что нулевое собственное значение оператора  $\hat{S}_{\sigma_0} = 0$ , а соответствующая собственная функция  $\psi_0 = \text{const}$ .

Запишем уравнение (5) с учетом рассеяния в сферической системе координат в импульсном пространстве  $p, \theta$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\beta_0^2 c \left\{ \cos \theta \frac{\partial}{\partial p} \epsilon p |\cos \theta| K(\theta) \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \right.$$

<sup>1)</sup> Учет изменения  $v_{||}$  при движении в неоднородном поле несколько уменьшает частоту столкновений, но не вносит принципиальных изменений в сторону уравнения.

$$-\frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \varepsilon p |\cos \theta| K(\theta) \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \Bigg\} + \frac{1}{\tau_s(p)} \widehat{S}_\theta f \quad (6)$$

(мы учли, что  $|p_z| = p |\cos \theta|$  и  $\varepsilon v_z = \varepsilon p_z$ ).

Как уже отмечалось, ускорение Ферми особенно эффективно в том случае, когда рассеяние является сильным (время рассеяния частицы с импульсом  $p$  на угол  $\sim \pi$  много меньше времени ускорения до такой величины импульса). При этом функция распределения  $f$  близка к изотропной. Разложим  $f$  по собственным функциям оператора  $\widehat{S}$ , которые обозначим через  $\psi_n(\theta)$ . Соответствующие собственные значения обозначим через  $(-\sigma_n^2)$ . Подставляя в (6)  $f$  в виде

$$f = \bar{f}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(p) \psi_n(\theta)$$

и интегрируя по поверхности единичной сферы, получим

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = 2\beta_0^2 c \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \varepsilon p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^3 \theta K(\theta) d\theta - \frac{1}{p} \varepsilon p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \cos^2 \theta K(\theta) d\theta \right\}, \quad (7)$$

$$a_n(p) = \frac{\beta_0^2 c \tau_s(p)}{\sigma_n^2} \int_0^{\pi} \psi_n(\theta) \sin \theta \frac{\partial}{\partial p} \varepsilon p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \times \\ \times \left( \cos^2 \theta |\cos \theta| K(\theta) - \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta |\cos \theta| K(\theta) \right) d\theta \quad (8)$$

(расчет проведен в предположении  $a_n \ll \bar{f}$ , т. е. почти изотропного распределения). Интегрируя в (7) выражение с  $\partial/\partial \theta$  по частям, получаем:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = D_F \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^3 \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial p}, \quad D_F = 2\beta_0^2 c \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^3 \theta K(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Из сопоставления (7) и (8) видно, что рассеяние можно считать сильным при условии

$$\frac{D_F \tau_s(p)}{\sigma_1^2} \frac{\varepsilon}{p} \ll 1. \quad (10)$$

Исследование рассеяния частиц на гидромагнитных волнах (см., например, [5, 6]) показывает, что

$$\tau_s(p) \approx \frac{1}{\Omega_H} \left[ \frac{\bar{H}}{h(r_L(p))} \right]^2, \quad (11)$$

где  $\Omega_H$  — циклотронная частота, а  $h(r_L(p))$  — средняя амплитуда пульсаций с масштабом порядка ларморовского радиуса частицы  $r_L = \frac{Mc^2 p}{e\bar{H}}$ . Поэтому условие (10) можно конкретизировать, если задан спектр пульсаций. Этот вопрос мы обсудим несколько ниже.

При вычислении  $D_F$  также необходимо задать спектр пульсаций. Очевидно, что величина  $K(h)$  равна среднему числу волн с амплитудой, больше  $h$  на единице длины. Допустим, что зависимость  $K(h)$  можно представить в виде степенного закона

$$K(h) = L^{-1} \left( \frac{h_m}{h} \right)^\nu, \quad (12)$$

где  $L$  — основной масштаб турбулентности,  $h_m = H_m - \bar{H}$ . Как уже отмечалось, можно считать, что  $\nu < 3$ . Подставляя (12) в (9), мы видим, что интеграл  $D_F$  есть

$$D_F = \frac{2\beta_0^2 c}{L} \left( \frac{h_m}{\bar{H}} \right)^\nu \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^3 \theta \operatorname{tg}^{2\nu} \theta d\theta = \frac{\beta_0^2 c}{2L} \left( \frac{h_m}{\bar{H}} \right)^\nu \Gamma(\nu+1)\Gamma(2-\nu) \quad (13)$$

при  $\nu < 2$  и расходится при  $\nu \geq 2$  на верхнем пределе. Смысл этого результата состоит в том, что при  $\theta \rightarrow \pi/2$  отражение происходит от волн сколь угодно малой амплитуды и при достаточно слабой зависимости амплитуды от масштаба время между столкновениями стремится к нулю. Фактически в (13) следует обрезать интеграл на длине волны, соответствующей ларморовскому радиусу частицы. При  $\nu = 2$  это приведет к логарифмической зависимости  $D_F$  от  $p$ , а при  $\nu > 2$  вид зависимости будет существенно зависеть от формы спектра.

Таким образом, чисто фермиевское ускорение (отражение частиц от длинных волн) имеет место лишь при достаточно быстро убывающих с масштабом амплитудх пульсаций ( $h(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  быстрее, чем  $\sqrt{\lambda}$ ). В этом случае величина  $D_F$  не зависит от импульса, а коэффициент диффузии в импульсном пространстве пропорционален  $\epsilon p$ . При стремлении  $\nu$  к 2 величина  $D_F$  резко возрастет. Так, при  $\nu$  равном 1; 1,5 и 1,7 интеграл в (13) есть соответственно 0,26; 0,6 и 1,5.

Что же касается параметра  $\beta_0^2$  в (13), то его величина определяется усреднением квадрата проекции групповой скорости различных волн  $u_g$  на поле по всем возможным ориентациям  $u_g$ . В случае альвеновских волн всегда  $\beta_0 = u_a/c$ .

Рассмотрим теперь более подробно условие сильного рассеяния (10). Считая, что  $\sigma_1 \sim 1$ ,  $h(\lambda) = h_m(\lambda/L)^{1/\nu}$  и  $D_F \approx u_a^2/(Lc)$ , можно преобразовать (10) к виду

$$p \gg \beta_0 \left( \frac{\sqrt{\epsilon} \bar{H}}{h_m} \right)^{2\nu/(\nu+2)} \left( \frac{r_0}{L} \right)^{(\nu-2)/(\nu+2)} \quad (14)$$

где  $r_0 = u_a/\Omega_H = c/\Omega_0$  — внутренний масштаб турбулентности,  $\Omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/M}$  — ионная плазменная частота.

В астрофизических условиях обычно  $r_0 \ll L$ . Поэтому при  $\nu > 2$  условие (14) выполнено при любых  $p > \beta_0$ . В режиме фермиевского ускорения ( $\nu < 2$ ) условие (14) справедливо лишь выше некоторого интервала значений  $p > \beta_0$ . Однако если  $\nu$  близко к 2, соответствующие значения  $p$  близки к  $\beta_0$ . Например, в верхней хромосфере Солнца, где при вспышках значение  $L \sim 10^7$  см, а плотность плазмы  $N \sim 10^{10}$  см<sup>-3</sup>, при  $h_m \sim \bar{H}$ ,  $\epsilon \sim 1$  и  $\nu$  равном 1,5 и 1,75 критические значения  $p$  соответственно равны  $\sim 4,5\beta_0$  и  $\sim 2\beta_0$ , хотя  $r_0/L \sim 3 \cdot 10^{-5}$ .

Указанные оценки условий сильного рассеяния относятся к тяжелым частицам. В случае электронов резонансные длины волн ( $\lambda \sim r_L$ ), как правило, меньше внутреннего масштаба, однако поскольку время рассеяния (при данном  $h(r_L)$ ) для

электрона в  $M/m = 1800$  раз меньше, чем для иона, можно предположить, что и в этом случае имеется область значений  $p$ , в которой функция распределения ускоряемых электронов изотропна.

Интенсивное ускорение Ферми способствует удержанию быстрых частиц в турбулентной области, так как регулярное движение вдоль силовых линий переходит при этом в диффузию.

Средняя длина свободного пробега может быть выражена через  $D_F$ . Считая, что  $D_F \approx 2\beta_0^2 c / \bar{\lambda}$ , получаем  $\bar{\lambda} \approx 2\beta_0^2 c / D_F$ . Средняя скорость  $|\bar{v}_z| = v/2 = cp/(2\varepsilon)$ . Поэтому (с точностью до безразмерного множителя  $q \sim 1$ ) коэффициент диффузии в реальном пространстве  $D_z = \frac{1}{2} |\bar{v}_z| \bar{\lambda}$  есть

$$D_0 = \frac{q \beta_0^2 c^2 p}{2 D_F \varepsilon}. \quad (15)$$

Таким образом, при  $\nu < 2$  и сильном рассеянии изменение функции распределения  $f$  за счет фермиевских столкновений определяется уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_F \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \varepsilon p^3 \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{q \beta_0^2 c^2 p}{2 D_F \varepsilon} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (16)$$

где  $z$  — координата вдоль силовой линии невозмущенного поля (поскольку в дальнейшем всюду рассматривается только изотропная часть  $f$ , мы опускаем черту над  $f$  и считаем, что  $\bar{f} \equiv f$ ).

Из уравнения (16) легко подучить основные формулы Ферми. В нерелятивистском случае, например,  $\overline{dp}/\overline{dt} = \text{const}$ , а в ультрарелятивистском —  $\overline{dp}/\overline{dt} = \text{const} \cdot p$ . Численные значения этих констант по порядку величины совпадают с соответствующей постоянной в (1). В то же время для анализа более тонких вопросов (например, формы спектра) необходимо применять уравнение (16). Отметим, что принцип детального равновесия накладывает ряд ограничений на спектр.

Из приведенного анализа следует, что имеется широкий класс физических условий, при которых имеет место ускорение Ферми. Весьма вероятно, что сюда относится развитая волновая турбулентность в плазме при наличии магнитного поля. Уравнение (16) позволяет исследовать асимптотику функции распределения в области достаточно больших значений импульса. Рассмотрим некоторые решения (16).

## 2. Нестационарное ускорение без учета потерь

Рассмотрим ускорение частиц в условиях импульсного возбуждения и последующего затухания турбулентности. Предположим сначала, что диффузией частиц по силовым линиям и другими потерями можно пренебречь, и будем считать, что  $D_F = 0$  при  $t < 0$ , при  $t = 0$  возрастает скачком до некоторого конечного значения

и затем убывает до нуля по заданному закону. Полагая  $\tau = \int_0^t D_F(t') dt'$  и опуская диффузионный член в (16), получаем, что в нерелятивистском случае ( $\varepsilon = 1$ )

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = p \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 3 \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет частные решения вида

$$f_q = e^{-\kappa^2 \tau} p^{-1} J_2(2\kappa\sqrt{p}), \quad (18)$$

ограниченные в нуле. Общее решение можно представить в форме

$$f(p, \tau) = \frac{1}{p} \int_0^\infty \psi(\kappa) e^{-\kappa^2 \tau} J_2(2\kappa\sqrt{p}) \kappa d\kappa. \quad (19)$$

Пусть  $f(p, 0) = f_0(p)$ :

$$p f_0(p) = \int_0^\infty \psi(\kappa) J_2(2\kappa\sqrt{p}) \kappa d\kappa.$$

Применяя теорему Фурье—Бесселя, получаем

$$\psi(\kappa) = \int_0^\infty p' f_0(p') J_2(2\kappa\sqrt{p'}) 2\sqrt{p'} d(2\sqrt{p'}) = 2 \int_0^\infty f_0(p') J_2(2\kappa\sqrt{p'}) p' dp'.$$

Подставляя в (19) и интегрируя по  $\kappa$ , имеем

$$f(p, \tau) = \frac{1}{p\tau} \int_0^\infty f_0(p') \exp\left\{-\frac{p+p'}{\tau}\right\} I_2\left(\frac{2\sqrt{pp'}}{\tau}\right) p' dp' \quad (20)$$

( $I_2$  — функция Бесселя от мнимого аргумента). Соотношение (20) определяет функцию источника для уравнения (17).

В большинстве астрофизических задач можно предположить, что функция инжекции  $f_0$  отлична от нуля в области  $p \lesssim p_0 \ll 1$ . При этом асимптотика  $f(p, \tau)$  при больших  $\tau$  и  $p \gg p_0$  имеет универсальный вид. Разлагая  $I_2$  в ряд Лорана и полагая  $e^{-p'/\tau} \approx 1$ , получаем

$$f(p, \tau) \approx \frac{1}{2\tau^3} e^{-p/\tau} \int_0^\infty f_0(p') p'^2 dp' = \frac{1}{\tau^3} e^{-p/\tau} \frac{n_0}{2\pi}, \quad (21)$$

где  $n_0$  — полное число инжектированных частиц в  $1 \text{ см}^3$ . Плотность частиц в пространстве в процессе ускорения не меняется, что видно непосредственно из (17).

Интенсивность частиц с импульсом  $> p$  есть

$$S(>p) = 4\pi c \int_p^\infty p^3 f(p, \tau) dp = 3n_0 c \tau \left(1 + \frac{p}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\tau^2} + \frac{1}{6} \frac{p^3}{\tau^3}\right) e^{-p/\tau} \quad (22)$$

и имеет широкое плато при малых  $p/\tau$  ( $S(>p) \approx 3n_0 c \tau (1 - (1/24)p^4 \tau^{-4} + \dots)$ ).

Если турбулентность затухает достаточно быстро, так что интеграл  $\tau_0 = \int_0^\infty D_F(t) dt$  существует, спектр ускоренных частиц стремится к пределу, определяемому (22) при  $\tau = \tau_0$ .



Величина  $S(> 0)/(n_0 c) = 3\tau$  определяет  $\bar{p}$ . Этот результат можно получить из формулы Ферми (1) (с точностью до множителя  $\sim 1$ ). Однако учет флуктуаций числа «встречных» и «догоняющих» столкновений показывает, что спектр тянется в область значительно больших  $p$ . Интенсивность падает на порядок по сравнению с  $\bar{p}$  лишь при  $p \approx 8\tau$ . Энергия таких частиц в семь раз выше, чем при  $p = \bar{p}$ .

Помимо рассмотренной задачи с начальными условиями представляет интерес исследовать вид  $f$  при наличии постоянного потока частиц в импульсном пространстве, идущего из области малых  $p$ . Такая задача качественно моделирует непрерывную инжекцию частиц за счет затухания турбулентности. При этом решение в области малых  $p$  пропорционально  $p^{-2}$ :  $f = p^{-2}\varphi(p, \tau)$ . Функция  $\varphi$  должна быть автомодельной и зависеть от одной комбинации  $p$  и  $\tau$ , так как в условиях задачи отсутствуют параметры с размерностью времени (точнее говоря, они могут быть исключены введением переменной  $\tau$ ).

Положим  $\varphi = \varphi(\xi)$ , где  $\xi = p\theta(\tau)$ . Подставляя  $f = p^{-2}\varphi(\xi)$  в (17), получим, что  $\theta(\tau) = 1/\tau$  и

$$\xi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (\xi - 1) \frac{d\varphi}{d\xi} = 0. \quad (23)$$

Отсюда

$$\varphi = A(1 + \xi)e^{-\xi} \quad (24)$$

и

$$f = \frac{A}{p^2}(1 + \xi)e^{-\xi} = \frac{A}{p^2} \left(1 + \frac{p}{\tau}\right) e^{-p/\tau}. \quad (25)$$

При  $\xi \rightarrow 0$  решение стационарно ( $f \sim 1/p^2$ ), а при  $\xi \gtrsim 1$  формируется экспоненциальный спектр скоростей. В размерных переменных установившийся спектр характеризуется средней скоростью

$$\bar{v} = c D_F t_0 = \frac{u_a^2}{2L} \left(\frac{h_m}{H}\right)^\nu t_0 \Gamma(\nu + 1) \Gamma(2 - \nu), \quad (26)$$

где  $t_0$  — характерное время затухания турбулентности.

Таким образом, спектр скоростей  $f \propto e^{-v/\bar{v}}$  с  $\bar{v} \propto t$  является типичным для нерелятивистской области энергий при отсутствии потерь.

В ультрарелятивистском случае ( $\varepsilon \approx p$ ) уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^4 \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (27)$$

Положим  $p = e^\sigma$  и  $f = p^{-3/2} \varphi e^{-9\tau/4}$ . Уравнение (27) принимает форму одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} \quad (28)$$

с функцией Грина

$$G(\sigma, \sigma', \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\sigma - \sigma')^2}{4\tau} \right\}. \quad (29)$$

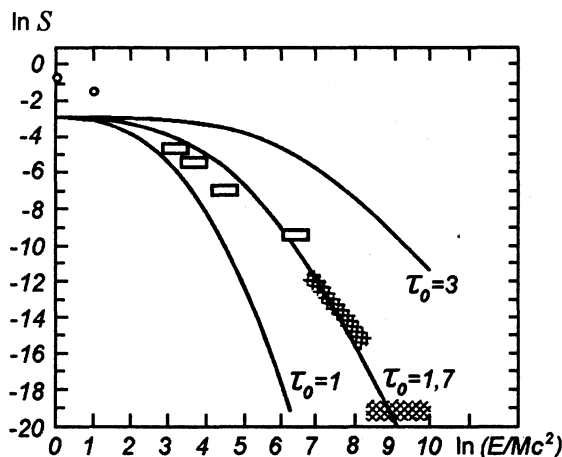


Рис. 1

Отсюда следует, что при ускорении частиц в области с затухающей турбулентностью ( $\tau \rightarrow \tau_0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) от малых  $p$  устанавливается спектр вида

$$f_{\infty} = A p^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 p}{4\tau_0} \right\}. \quad (30)$$

Интенсивность частиц с импульсом больше  $p$  есть

$$S(>p) = c \int_p^{\infty} f p^2 dp = B \left\{ 1 - \Phi \left( \frac{\ln p - 3\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right) \right\}, \quad (31)$$

где  $\Phi$  — интеграл вероятности, а  $A$  и  $B$  — константы, не зависящие от  $p$ . При  $\tau_0 \approx u_a^2 t_0 / (Lc) \sim 1$  спектр (31) становится очень жестким. На рисунке 1 приведены распределения частиц при  $\tau_0 = 1$ ; 1,7 и 3 ( $S$  — в  $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{стер}^{-1}$ ), а также для сравнения экспериментальные данные [7] об энергетическом спектре космических лучей (точки, прямоугольники и заштрихованные полосы). Для удобства сравнения положено, что в (31)  $B = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{стер}^{-1}$ . Спектр (31) получен в предположении импульсной инжекции ускоренных частиц и однородности характеристик турбулентности. Если инжекция происходит непрерывно, то число частиц малых энергий заметно возрастает. В то же время форма спектра при  $p > \bar{p} = e^{4\tau_0}$  практически не меняется. Соответствующим выбором функции инжекции можно устранить расхождение между спектром (31) при  $\tau_0 = 1,7$  и спектром космических лучей при малых  $p$ .

Полученные результаты показывают, что ускорение Ферми в принципе может сформировать наблюдаемый спектр космических лучей даже без учета потерь. Однако форма спектра чрезвычайно сильно зависит от величины  $\tau_0$ . Поэтому при попытках объяснения спектра космических лучей фермиевским механизмом без потерь необходимо предположить, что либо ускорение произошло в процессе одного сверхмощного взрыва, либо вследствие серии взрывов с близкими характеристиками ( $\tau_0 \approx 1-1,7$ ). В разделе 4 будет, в частности, показано, что для Крабовидной туманности  $\tau_0$  имеет примерно такое значение.

Рассмотренное в данном разделе ускорение без учета потерь может иметь место в хороших магнитных ловушках (например, в тороидальном поле). Однако ускорение может быть эффективным даже в том случае, когда характерный размер турбулентной области мал по сравнению с масштабом неоднородности поля. При этом удержание частиц обеспечивается самим фермиевским механизмом. Исследованию этой задачи посвящен следующий раздел.

### 3. Нестационарное ускорение с учетом диффузии в пространстве

Предположим, что при  $t = 0$  в некоторой области плазмы была возбуждена турбулентность, затухающая по заданному закону. Будем считать, что характеристики плазмы и турбулентности отличны от нуля при  $0 \leq z \leq \Lambda$ , и положим для простоты, что они не зависят в этом районе от  $z$ . Коэффициент  $D_F$  запишем в виде  $D_F = D_0 \theta(t)$ , где  $\theta(0) = 1$ , и введем вместо  $t$  безразмерную переменную  $\tau = D_0 t$ .

Имея в виду приложения к процессам типа солнечных вспышек, рассмотрим нерелятивистскую задачу ( $\epsilon = 1$ ). Уравнение ускорения с учетом диффузии (16) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \theta(\tau) \left( p \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 3 \frac{\partial f}{\partial p} \right) + \frac{q \beta_0^2 c^2}{2 D_0^2} \frac{p}{\theta(\tau)} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (32)$$

Ищем решение в виде

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(p, \tau) \sin \frac{n\pi z}{\Lambda}, \quad (33)$$

где  $\sin(n\pi z/\Lambda)$  — собственные функции оператора  $\partial^2/\partial z^2$ , удовлетворяющие условию  $f|_{z=0,\Lambda} = 0$ . Если при  $\tau = 0$  начальная функция  $f_0(p)$  не зависит от координат, то коэффициенты  $A_n$  в (33) равны

$$A_n = \int_0^{\Lambda} \sin \frac{n\pi z}{\Lambda} dz \bigg/ \int_0^{\Lambda} \sin^2 \frac{n\pi z}{\Lambda} dz = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \quad (34)$$

и отличны от нуля при  $n = 2m + 1$ .

Уравнение для  $f_m$  имеет вид

$$\frac{\partial f_m}{\partial \tau} = \theta(\tau) \left( p \frac{\partial^2 f_m}{\partial p^2} + 3 \frac{\partial f_m}{\partial p} \right) - \frac{a_m^2}{\theta(\tau)} p f_m, \quad (35)$$

где

$$a_m^2 = \frac{(2m+1)^2 q \beta_0^2 c^2}{2 \Lambda^2 D_0^2}. \quad (36)$$

Положим  $f_m = p^{-3/2} \varphi_m(p, \tau)$ . Получаем

$$\frac{1}{p} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau} = \theta(\tau) \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial p^2} - \frac{a_m^2}{\theta(\tau)} \varphi_m - \frac{3}{4} \frac{\theta(\tau)}{p^2} \varphi_m. \quad (37)$$

Из (37) видно, что существует асимптотическое решение вида  $\varphi_m = e^{p \Theta(t)}$ , справедливое при условии

$$p^2 \Theta^2 \gg 1. \quad (38)$$

Очевидно, что неравенство (38) выполняется при  $p \gg \bar{p}$ .

Функция  $\Theta$  удовлетворяет уравнению Рикатти

$$\dot{\Theta} = \theta(\tau)\Theta^2 - \frac{a_m^2}{\theta(\tau)}. \quad (39)$$

Рассмотрим случай экспоненциального затухания турбулентности:  $\theta = e^{-\gamma\tau}$ . Полагая  $\Theta = e^{\gamma\tau}\psi$ , получаем

$$\dot{\psi} + \gamma\psi = \psi^2 - a_m^2$$

и

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \gamma - \kappa \frac{e^{\kappa\tau} + \alpha}{e^{\kappa\tau} - \alpha} \right), \quad (40)$$

где  $\kappa = \sqrt{\gamma^2 + 4a_m^2}$ , а  $\alpha$  — постоянная интегрирования. Очевидно, что суперпозиция решений с различными  $\alpha$  вида

$$\varphi(p, \tau) = \int_{-1}^{+1} U(\alpha) \exp \left\{ -\frac{p\gamma}{2} \left( \kappa \frac{e^{\kappa\tau} + \alpha}{e^{\kappa\tau} - \alpha} \right) \right\} d\alpha \quad (41)$$

также удовлетворяет (при условии (38)) уравнению (37).

При  $\tau = 0$  имеем

$$\varphi_0(p) = \int_{-1}^{+1} U(\alpha) \exp \left\{ \frac{p\gamma}{2} - \frac{p\kappa}{2} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right\} d\alpha. \quad (42)$$

Представим  $\varphi_0(p)e^{-p\gamma/2}$  в виде преобразования Лапласа:

$$\varphi_0(p)e^{-p\gamma/2} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma p} W(\sigma) d\sigma$$

и положим  $\sigma = \frac{\kappa(1 + \alpha)}{2(1 - \alpha)}$ . Получаем

$$\varphi_0(p) = \kappa e^{p\gamma/2} \int_{-1}^{+1} W \left( \frac{\kappa}{2} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \exp \left\{ -\frac{\kappa}{2} p \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right\} \frac{d\alpha}{(1 - \alpha)^2}. \quad (43)$$

Из сравнения (42) с (43) следует, что

$$U(\alpha) = W \left( \frac{\kappa}{2} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{\kappa}{(1 - \alpha)^2}, \quad (44)$$

где  $W(x)$  — обратное преобразование Лапласа от  $\varphi_0(p)e^{-p\gamma/2}$ . Формулы (42) и (44) дают, таким образом, решение задачи с произвольным начальным условием.

Представляет интерес вычислить спектр  $F$ -частиц, излученных турбулентной областью за все время ускорения. Поток частиц на границах пропорционален  $\theta^{-1} \partial f / \partial z$ . Поэтому для каждой  $z$ -гармоники имеем

$$F_m(p) \propto p^{-3/2} \int_{-1}^{+1} U(\alpha) \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{p}{2} \left( \kappa \frac{e^{\kappa\tau} + \alpha}{e^{\kappa\tau} - \alpha} + \gamma\tau \right) \right\} d\tau d\alpha. \quad (45)$$

Вычисление интеграла (45) по времени методом перевала приводит к экспоненциальному спектру с весьма громоздким выражением в показателе. Однако эта зависимость довольно точно аппроксимируется формулой

$$F_m(p) \propto p^{-2} \int_{-1}^{+1} U(\alpha) \exp \left\{ -\frac{\gamma p}{2} \frac{1+\nu}{\nu} \alpha^\nu \right\} d\alpha, \quad (46)$$

где

$$\nu \propto \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 4a_m^2}}. \quad (47)$$

Если ускорение начинается от малых  $p$ , функция  $U(\alpha)$  должна иметь резкий максимум при  $\alpha \rightarrow 1$  и поэтому

$$F_m(p) \propto p^{-2} \exp \left\{ -\frac{\gamma p}{2} \frac{1+\nu}{\nu} \right\}. \quad (48)$$

Таким образом, и в этом случае асимптотический спектр имеет вид экспоненты по импульсу (ср. с разделом 2):

$$F_m \propto v^{-2} e^{-v/v_{0m}}, \quad (49)$$

где

$$v_{0m} = \frac{2c}{\gamma} \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{2cD_0 t_0}{1 + \left[ 1 + 2(2m+1)^2 \frac{q\beta_0^2 c^2 t_0^2}{\Lambda^2} \right]^{1/2}} \quad (50)$$

и  $t_0$  — время уменьшения величины  $D_F$  в  $e$  раз. Если принять, что  $t_0$  определяется излучением волн из турбулентного объема ( $u_a t_0 \approx \Lambda$ ), то окончательно получаем ( $m=0$ )

$$v_0 \approx cD_0 t_0. \quad (51)$$

При  $m \geq 1$  спектр значительно мягче.

Таким образом, фермиевский механизм обеспечивает достаточно эффективное удержание частиц в турбулентном объеме.

По-видимому, полученные результаты могут представлять большой интерес для теории генерации быстрых протонов при солнечных вспышках. В последние годы было установлено, что спектр таких протонов имеет вид (49), причем  $v_{0m}$  в зависимости от вспышки обычно лежит в пределах от  $10^9$  см · с<sup>-1</sup> до  $\sim 10^{10}$  см · с<sup>-1</sup> [8]. Установлено также, что в нижней короне при вспышках возникают условия, благоприятные для ускорения Ферми (плазма нагревается до температур  $\sim 10^3$  эВ, вследствие чего снимается проблема инжекции, возникают движения со скоростями  $\sim 10^8$  см · с<sup>-1</sup>). Магнитные поля в таких областях  $\sim 10$ – $100$  Э, а плотность плазмы  $\sim 10^9$ – $10^{10}$  см<sup>-3</sup>. Время ускорения  $t_0 \approx 10^2$  с, что соответствует времени распространения волн со скоростью  $\sim 10^7$ – $10^8$  см · с<sup>-1</sup> на расстояние порядка линейного масштаба вспышки ( $10^9$ – $10^{10}$  см). При  $v_0 = 5 \cdot 10^9$  см · с<sup>-1</sup> и  $t_0 \sim 10^2$  с из (51) следует, что

$$D_0 \approx \frac{u_a^2}{Lc} \approx \frac{v_0}{ct_0} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

При  $H = 10$  Э и  $N_0 = 10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-3}$  масштаб пульсаций  $L$  должен составлять  $10^7 - 10^8 \text{ см}$ .

Отметим, что в последнее время появилось много работ, в которых делаются попытки объяснить ускорение во вспышках электрическими полями (см., например, [9, 10]). Сравнение спектров протонов и ядер показывает, что средний импульс частиц пропорционален их заряду, а не массе [8]. Этот сравнительно небольшой эффект, однако, можно отнести за счет более быстрого выхода ядер из солнечной системы. Значительно более важным представляется сравнение спектров протонов и электронов. В случае ускорения электрическим полем их средние энергии должны быть одного порядка, а при ускорении Ферми — энергии протонов будут на три порядка выше. Ни прямые, ни косвенные данные не подтверждают существования во вспышках электронов с энергиями  $\sim 100 \text{ МэВ} - 1 \text{ ГэВ}$ . В то же время исследования нетеплового рентгеновского и радиоизлучения вспышек указывают на ускорение электронов до энергий порядка  $100 \text{ кэВ} - 1 \text{ МэВ}$ , что свидетельствует в пользу ускорения Ферми.

Ультррелятивистская задача с учетом пространственной диффузии значительно проще, так как коэффициент диффузии по  $z$  не зависит от импульса. Подстановкой

$$f_n = \psi_n \exp \left\{ -a_n^2 \int_0^t \frac{dt}{\theta} \right\}$$

уравнение сводится к рассмотренному в разделе 2 и дает спектры вида

$$\exp \left\{ -\frac{1}{4} \tau^{-1} \ln^2 p \right\}.$$

#### 4. Ускорение электронов с учетом магнитно-тормозного излучения

Рассмотрим стационарную задачу, в которой наряду с фермиевским ускорением учитывается магнитно-тормозное излучение. Эта задача представляет интерес в связи с интерпретацией нетеплового электромагнитного излучения оболочек сверхновых звезд. Полученное в данной статье уравнение позволяет уточнить форму спектра электронов. Учет потерь на излучение приводит к появлению в правой части уравнения (27) члена  $\frac{p^{-2} \partial(p^2 \dot{p} f)}{\partial p}$ , где

$$\dot{p} = \frac{2e^4 H^2}{9m^3 c^5} p^2 \quad (52)$$

— усредненная по углу между скоростью и полем скорость потери импульса за счет магнитно-тормозного излучения (напомним, что  $p$  измеряется в единицах  $Mc$ , где  $M$  — масса покоя рассматриваемой частицы, в данном случае — электрона). Уравнение принимает вид

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^4 \left( \frac{\partial f}{\partial p} + \mu f \right) = 0, \quad (53)$$

где

$$\mu = \frac{2e^4 H^2}{9m^3 c^5 D_F} \approx \frac{2e^4 H^2 L}{9m^3 c^4 u_a^2} = \frac{8\pi e^4}{9m^2 c^4} \frac{M}{m} L N \quad (54)$$

( $N$  — плотность холодной плазмы).

Решение, приводящее к ограниченной плотности энергии электронов, тривиально:

$$f = e^{-\mu p}. \quad (55)$$

Интенсивность излучения  $dI \sim f p^4 dp$ , откуда видно, что основной вклад дают электроны с  $p = 4/\mu$ . Излучение таких электронов сконцентрировано в области частот  $\omega = \frac{16eH}{mc\mu^2}$ . Таким образом, если известна область частот  $\omega \sim \omega_{\text{эфф}}$ , в которой излучается наибольшая энергия, и напряженность магнитного поля  $H$ , можно определить величину  $D_F$ :

$$D_F \approx \frac{1}{18} \frac{e^2}{mc^3} \omega_H^2 \sqrt{\frac{\omega_{\text{эфф}}}{\omega_H}} \quad (56)$$

( $\omega_H = eH/(mc)$  — нерелятивистская циклотронная частота).

В случае Крабовидной туманности  $\omega_{\text{эфф}} \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ;  $H \approx 10^{-3} \text{ Э}$ , и, следовательно,  $D_F \approx 10^{-10} \text{ с}^{-1}$ . Если принять, что характеристики турбулентности остаются примерно постоянными в течение времени  $t_0$  порядка возраста туманности ( $3 \cdot 10^{10} \text{ с}$ ), то параметр  $\tau_0 = D_F t_0$ , определяющий структуру спектра ускоряемых протонов (см. раздел 2), будет порядка единицы. Следовательно, Крабовидная туманность могла бы генерировать протоны и ядра, спектр которых соответствует первичным космическим лучам.

В заключение сформулируем вкратце основные результаты работы. В разделе 1 было доказано, что при ускорении Ферми выполняется принцип детального равновесия, и на этой основе получено кинетическое уравнение. Оказалось, что эффективная длина свободного пробега не зависит от скорости частиц, если амплитуда пульсаций поля  $h$  с масштабом  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow 0$  убывает быстрее, чем  $\sqrt{\lambda}$ . Определены условия, при которых угловое распределение частиц можно считать изотропным.

При грубых оценках скорости роста средней энергии частиц полученное уравнение приводит (с точностью до множителей порядка единицы) к тем же результатам, что и формулы Ферми. Однако при исследовании спектра (в особенности высокоэнергичного хвоста) необходимо применять точные уравнения.

Исследование различных нестационарных задач показывает, что при весьма общих предположениях асимптотика спектра при больших энергиях имеет универсальную форму ( $e^{-v/v_0}$  в нерелятивистском и  $\exp \{-1/(4\tau_0^{-1} \ln^2 p)\}$  в релятивистском случае). Эти спектры различаются лишь численным значением констант  $v_0$  или  $\tau_0$ , характеризующих интенсивность турбулентных пульсаций и время ускорения. Спектр космических лучей относится к рассмотренному типу.

Фермиевское ускорение увеличивает время жизни частиц в турбулентной области. Учет возможности выхода частиц не сказывается на форме спектра. Имеются серьезные основания (данные о форме спектра и соотношении между средними энергиями протонов и электронов) считать, что ускорение частиц при солнечных вспышках является фермиевским. Значение параметра, при котором релятивистский спектр совпадает с наблюдаемым спектром космических лучей, согласуется с данными об ускорении в Крабовидной туманности.

Рассмотренные в работе конкретные примеры имеют в основном иллюстративный характер и отнюдь не претендуют на полное объяснение явлений. В частности, мы совершенно не касались такого важного вопроса, как инжекция частиц. Тем

не менее полученные результаты показывают, что детальная разработка теории ускорения Ферми представляет большой интерес и является весьма перспективным направлением в физике космических лучей.

### Литература

1. *Fermi E.* Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
2. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* Происхождение космических лучей. М.: Изд. АН СССР, 1963.
3. *Ландау Л. Д.* ЖЭТФ. **7**, 203 (1937).
4. *Беляев С. Т.* В сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. **3**, Изд. АН СССР, 1958, 57.
5. *Chang D., Peaglstain L. J.* Geophys. Res. **70**, 3070 (1965).
6. *Kennel C. F., Petshek H. E. J.* Geophys. Res. **71**, 1 (1966).
7. *Linsley J., Scarsi L., Rossi B.* Proc. of Intern. Cosmic Ray Conf., Japan, A3, 91, 1962.
8. *Freier P. S., Webber W. R. J.* Geophys. Res. **68**, 1605 (1963).
9. *Roederer J. G.* Space Science Rev. **3**, 487 (1964).
10. *Сыроватский С. И.* ЖЭТФ. **51**, 1133 (1966).



# К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ\*

## Аннотация

Рассмотрено рассеяние, диффузия и ускорение нерелятивистских заряженных частиц в турбулентной плазме. Предполагается, что турбулентность является гидромагнитной и что ее основной масштаб много больше ларморовских радиусов ускоряемых частиц. Показано, что если спектр пульсаций  $dh^2/dk \propto k^{-\nu}$ , то при любых  $\nu$  рассеяние обусловлено циклотронным резонансом; при  $\nu > 2$  ускорение определяется механизмом Ферми, а при  $\nu \leq 2$  играют роль как механизм Ферми, так и циклотронный резонанс. В неограниченной плазме ускорение приводит к росту внутреннего масштаба турбулентности и к соответствующему уменьшению числа ускоряемых резонансных частиц. В ограниченной плазме устанавливается стационарное распределение, и диссипация энергии турбулентности обусловлена диффузией наиболее энергичных частиц из турбулентного объема. Рассмотрены эффекты турбулентной диффузии и ускорения частиц в межпланетной среде, по экспериментальным данным получен равновесный спектр гидромагнитных пульсаций  $dh^2/dk \propto k^{-2}$ , вычислен коэффициент диффузии и энергетические спектры ускоренных частиц и дана оценка соотношения между скоростью диссипации турбулентной энергии и параметрами спектра пульсаций.

## 1. Введение

Сопоставление результатов исследования генерации космических лучей, быстрых протонов и ядер солнечных вспышек, а также методов турбулентного нагрева плазмы наводит на мысль о том, что универсальным свойством плазменной турбулентности в магнитном поле является эффект турбулентного ускорения, т. е. передачи значительной части энергии гидромагнитных пульсаций исчезающе малой доле частиц. Представляется вероятным, что турбулентное ускорение играет важную роль в диссипации энергии пульсаций. Так, для объяснения энергетики космических лучей необходимо привлекать наиболее мощные галактические процессы — взрывы сверхновых. В лабораторных экспериментах турбулентное ускорение иногда препятствует турбулентному нагреву плазмы (передаче диссипируемой энергии основной массе частиц). Исследования быстрых ядер солнечных вспышек [1] показывают, что турбулентное ускорение даже на ранних стадиях имеет бесстолкновительную природу: химический состав ядер вспышек постоянен и соответствует составу атмосферы Солнца.

В астрофизической литературе широко обсуждается гипотеза ускорения частиц при аннигиляции антипараллельных магнитных полей [2–4], однако до сих пор

\* Тверской Б. А. ЖЭТФ. Т. 52. Вып. 4 (10), 1417–1430 (1967).

не указан удовлетворительный механизм такого процесса. В ряде работ (см. обзор Цытовича [5]) предпринимались попытки объяснить ускорение ленгмюровскими колебаниями. Наиболее существенной трудностью этой гипотезы является факт преимущественного ускорения ионов. Кроме того, при солнечных вспышках время затухания ленгмюровских колебаний за счет столкновений (плотность  $\sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , температура  $\sim 1 \text{ кэВ}$ ) составляет  $10^{-2} \text{ с}$ , что на четыре порядка меньше времени ускорения. Это приводит к энергетическим противоречиям.

В данной работе исследовано ускорение частиц крупномасштабной гидромагнитной турбулентностью — совокупностью взаимодействующих гидромагнитных волн с широким спектром и с основным масштабом, много большим ларморовских радиусов наиболее энергичных частиц. Как известно, во всех случаях турбулентного ускорения имеются волны такого типа.

Поскольку рассматриваются частицы, скорость которых много больше альевновской, черенковский резонанс не играет существенной роли и ускорение обусловлено механизмом Ферми или циклотронным резонансом. Соотношение между этими механизмами исследовано в разделе 2. Для простоты предполагается, что угловое распределение волновых векторов пульсаций не имеет максимумов при больших углах с полем. В этом случае циклотронный резонанс хорошо описывается одномерной моделью (волнами, бегущими вдоль поля).

В разделе 3 проведены расчеты ускорения стационарной турбулентностью в неограниченной плазме с учетом обратного влияния частиц на волны и получены выражения для спектра и полного числа ускоренных частиц, а также внутреннего масштаба турбулентности в зависимости от спектра пульсаций, скорости диссипации энергии и времени. В разделе 4 даны оценки стационарной функции распределения в ограниченной плазме с учетом диффузии. Заключительный раздел посвящен экспериментальной проверке теории на основе результатов исследований межпланетной среды. По измеренным спектрам пульсаций построены ожидаемые спектры частиц, дано объяснение ряда эффектов и предсказаны новые явления.

## 2. Турбулентная диффузия частиц в фазовом пространстве

Изучению циклотронного резонанса в плазме посвящено множество работ. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь тех вопросов, которые связаны с ускорением, рассеянием и диффузией частиц. В данном разделе эти вопросы исследуются в предположении, что спектр турбулентных пульсаций известен и не меняется во времени. Плазма считается холодной (давление  $p \ll H^2/(8\pi)$ ), а доля ускоряемых частиц малой. Предполагается, что основной масштаб турбулентности  $L$  много больше ларморовских радиусов быстрых частиц и поэтому с ростом энергии частицы возрастают амплитуды резонансных пульсаций. Если угловое распределение волновых векторов пульсаций имеет максимум вдоль силовых линий среднего поля  $H$  или изотропно (что в дальнейшем предполагается), то основной вклад в рассеяние и ускорение будут давать волны, бегущие под малыми углами к полю (при заданной скорости частицы резонанс с такими пульсациями соответствует наибольшему длине волн).

Уравнения квазилинейного приближения для данного случая были выведены в [6]. В нашем случае уравнение из [6] для усредненной по пульсациям функции

распределения быстрых частиц имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{e^2}{2M^2c^2} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{v_z - \sigma_i u}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} - v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \times \\ \times \Phi(|v_z - \sigma_i u|) \left( \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} - \frac{v_{\perp}}{|v_z - \sigma_i u|} \frac{\partial f}{\partial v_z} \right), \quad (1)$$

где  $e$  и  $M$  — заряд и масса протона;  $c$  — скорость света;  $v_{\perp}$  и  $v_z$  — скорости частицы поперек и вдоль среднего поля  $H$ ;  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = -1$ , а  $\Phi(|v_z - \sigma_i u|)$  — спектральная функция турбулентности  $dh^2/dk$  при  $k = \Omega_H/|v_z - \sigma_i u|$ . Два знака  $\sigma$  соответствуют двум направлениям распространения волн, абсолютная величина скорости которых есть  $u = H/\sqrt{4\pi\rho}$  ( $\rho$  — плотность холодной плазмы).

Поскольку рассматриваются частицы с  $v \gg u$ , можно разложить (1) по степеням  $u$ . Это разложение теряет силу при малых  $v_z \lesssim u$ . Как будет показано несколько ниже (см. формулы (6), (7)), это обстоятельство не вносит существенной погрешности в результаты. Проводя указанное разложение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{e^2}{M^2c^2} \left\{ \left( \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \Phi(|v_z|) \left( \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} - \frac{v_{\perp}}{|v_z|} \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) + \right. \\ \left. + u^2 \left[ \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{v_{\perp}}{|v_z|} \Phi(|v_z|) \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + \left( \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \frac{\partial \Phi(|v_z|)}{\partial v_z} \frac{v_{\perp}}{v_z^2} \frac{\partial f}{\partial v_z} \right] \right\}. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь различные эффекты, описываемые уравнением (2).

#### А. Рассеяние и диффузия

В нулевом приближении по  $u^2$ , полагая  $v_{\perp} = v \sin \theta$ ,  $v_z = v \cos \theta$  (угол  $\theta$  отсчитывается от  $H$ ), имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e^2}{M^2c^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left| \frac{\Phi(v \cos \theta)}{v \cos \theta} \right| \frac{\partial f_0}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает чистое рассеяние. Его решения — стационарное изотропное распределение, а также дискретный набор экспоненциально затухающих угловых гармоник. Первая гармоника  $f_{01}$  и соответствующее ей время затухания  $\tau_s$  (которое является максимальным) характеризуют изотропизацию углового распределения. Если спектр пульсаций имеет степенной вид ( $dh^2/dk = h_0^2 L(kL)^{-\nu}$ , где  $L$  — основной масштаб), то

$$\tau_s = \frac{1}{\lambda_1 \Omega_H} \left( \frac{H}{h_0} \right)^2 \left( \frac{v}{\Omega_H L} \right)^{1-\nu}, \quad (4)$$

где  $\lambda_1$  — первое собственное значение оператора

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta |\cos \theta|^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

При  $\nu = 1$  собственными функциями являются полиномы Лежандра от  $\cos \theta$ . В частности,  $f_{01} = \cos \theta$ , а  $\lambda_1 = 2$ . При  $\nu > 1$  коэффициент диффузии по  $\theta$  пропорционален  $|\cos \theta|^{\nu-1}$  и стремится к нулю при  $\theta \rightarrow \pi/2$  (т.е. при малых продольных скоростях). Поэтому, вообще говоря, следует различать изотропизацию при

симметричных и не симметричных относительно  $\theta = \pi/2$  начальных распределений. В первом случае изотропизация в обеих полусферах происходит независимо, а во втором — должна сопровождаться переходом частиц из одной полусферы в другую, причем у границы  $\theta = \pi/2$  коэффициент диффузии стремится к нулю. Этот вопрос требует дополнительного исследования и имеет большое значение для расчета коэффициента диффузии частиц вдоль силовых линий. В данной статье изучаются спектры пульсаций с  $\nu \leq 2$  (см. п. Б данного раздела), и мы рассмотрим лишь случай с  $\nu = 2$ . Ясно, что если при таком  $\nu$  имеет место эффективный обмен частицами между полусферами, то он тем более будет происходить и при  $\nu < 2$ .

Полагая в (3)

$$\nu = 2, \quad f_0 = \exp \left\{ -\frac{\lambda t}{\lambda_1 \tau_s} \right\} \psi \quad \text{и} \quad \cos \theta = x,$$

получаем

$$\frac{d}{dx} |x| (1 - x^2) \frac{d\psi}{dx} + \lambda \psi = 0. \quad (5)$$

В области малых  $x$  ( $|x| < x_0 \sim u/v$ ) за счет фермиевских столкновений имеется конечная вероятность перехода частиц через точку  $x_0$ . Покажем, что при наличии сколь угодно малой вероятности такого перехода время изотропизации близко к (4) и при асимметричном начальном распределении.

Пусть при  $|x| > x_0$  функции  $\psi$  описывается уравнением (5), а при  $|x| < x_0 \ll 1$  будет  $x_0 \psi'' + \lambda \psi = 0$ . Построим антисимметричные по  $\theta$  гармоники. Если  $\psi_1^+(x)$  — симметричная гармоника с наименьшим собственным значением  $\lambda = \lambda_1$ , то при  $|x| \gg x_0$  уравнению (5) удовлетворяет функция

$$\psi_1^{-(0)} = \begin{cases} \psi_1^+(x), & x > 0, \\ -\psi_1^+(x), & x < 0. \end{cases}$$

В области  $|x| \ll |x_0|$  антисимметричное решение имеет вид  $\psi = ax$ . Действительно, время затухания  $\psi_1^{(-)}$  есть  $\tau_s$ , а время установления стационарного режима в слое шириной  $2x_0$  при заданной разнице значений  $\psi$  на краях порядка  $x_0^2 \tau_s / x_0 \ll \tau_s$  (коэффициент диффузии при  $|x| < x_0$  есть  $x_0 \tau_s$ ). Таким образом, необходимо сшить решение  $\psi_1 = \psi_1^{-(0)}(x)$  при  $|x| \gg x_0$  с  $\psi_1 = ax$  при  $x \leq x_0$ . Общее решение (5) при  $|x| \ll 1$  имеет вид

$$J_0 \left( \frac{\sqrt{\lambda |x|}}{2} \right) + \alpha N_0 \left( \frac{\sqrt{\lambda |x|}}{2} \right),$$

где  $J_0$  и  $N_0$  — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. На больших расстояниях ( $|x| \sim 1$ )  $J_0$  переходит в ограниченное в нуле решение  $\psi_1^+(x)$ , а  $N_0$  — в некоторое решение (5)  $\psi_1^*(x)$ , имеющее логарифмическую особенность в нуле.

Искомое решение при  $x > x_0$  имеет вид  $\psi_1 = \psi_1^+ + \alpha \psi_1^*(x)$ , причем в точке  $x_1$  функция

$$\psi_1 \approx A \left[ J_0 \left( \frac{\sqrt{\lambda_1 x_1}}{2} \right) + \alpha N_0 \left( \frac{\sqrt{\lambda_1 x_1}}{2} \right) \right] = ax_1,$$

а ее производная

$$\psi_1' \approx \frac{A}{4} \sqrt{\frac{\lambda_1}{x_1}} \left[ J_1 \left( \frac{\sqrt{\lambda_1 x_1}}{2} \right) + \alpha N_1 \left( \frac{\sqrt{\lambda_1 x_1}}{2} \right) \right] = a.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение для  $\alpha$  (условие обращения в нуль детерминанта системы):

$$\alpha = - \frac{J_0(\xi) + \frac{1}{2}\xi J_1(\xi)}{N_0(\xi) + \frac{1}{2}\xi N_1(\xi)},$$

где  $\xi = \sqrt{\lambda_1 x_1}/2$ . Используя разложения  $J_{0,1}$  и  $N_{0,1}$  при малых  $\xi$ , находим

$$\alpha = \frac{\pi}{4 \ln \frac{\pi}{\lambda_1 x_1}} \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\psi_1^- = \psi_1^{-(0)} + \frac{\pi}{4 \ln \frac{\pi}{\lambda_1 x_1}} \psi^*(x). \quad (7)$$

При  $x \sim 1$  поправка логарифмически мала, а при  $x = x_0$  формируется переходный слой с резким градиентом. Поправка к  $\lambda$  по порядку величины равна  $\alpha$  и потому не существенна. Следовательно, при  $\nu \leq 2$  просачивание частиц через барьер  $\theta = \pi/2$  идет с той же скоростью, что и изотропизация. Однако при больших  $\nu$  этот вывод неверен; в частности, при  $\nu \geq 3$  скорость просачивания резко падает.

С помощью  $\tau_s$  и  $f_1(\theta)$  легко вычислить коэффициент диффузии частиц по силовым линиям. Воспользовавшись методом, изложенным в [7], получаем

$$D_{\parallel} = v^2 \tau_s \left( \int_0^{\pi} f_1^{(-)} \sin \theta \cos \theta d\theta \right)^2 / \int_0^{\pi} f_1^{(-)2} \sin \theta d\theta; \quad (8)$$

при  $\nu = 1-2$  величина  $D_{\parallel} \approx v^2 \tau_s/3$ . Коэффициент диффузии поперек поля

$$D_{\perp} = \frac{D_{\parallel}}{1 + (\Omega_H \tau_s)^2}.$$

### Б. Ускорение

В нулевом приближении по  $u^2/v^2$  ускорение отсутствует. Поэтому за время изотропизации энергии частиц с  $v \gg u$  существенно не меняются. Этот результат имеет ясный физический смысл: время рассеяния  $\tau_s$  пропорционально обратному квадрату силы Лоренца, т. е.  $c^2/(e^2 v^2 h^2)$ , а время ускорения  $\tau_e$  — обратному квадрату электрической силы, равному  $1/(e^2 E^2)$ . В гидромагнитных волнах  $E \sim uh/c$  и  $\tau_s \sim u^2 \tau_e/v^2$ . Следовательно, при исследовании ускорения функцию распределения (обозначим ее через  $F$ ) можно считать изотропной ( $F = F(v, t)$ ). Подставив  $F$  в (2) и усреднив коэффициенты по телесному углу, получим искомое уравнение ускорения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D(v) \frac{\partial F}{\partial v}, \quad (9)$$

где коэффициент диффузии в пространстве скоростей есть

$$D(v) = \frac{e^2 u^2}{M^2 c^2 v} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \Phi(v \cos \theta) d\theta. \quad (10)$$

При

$$\Phi(v \cos \theta) = \frac{dh^2}{dk} \Big|_{k=\Omega_H/|v \cos \theta|} = h_0^2 L \left( \frac{v}{L\Omega_H} \right)^\nu |\cos \theta|^\nu$$

имеем

$$D(v) = \Omega_H^2 \frac{u^2 L}{v} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \left( \frac{v}{L\Omega_H} \right)^\nu \frac{2}{\nu(\nu+2)} = \frac{2}{\nu(\nu+2)} \frac{u^2 v}{L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \left( \frac{v}{L\Omega_H} \right)^{\nu-2}. \quad (11)$$

Решение уравнения диффузии типа (9) при степенной зависимости коэффициента диффузии от координаты и при начальном условии  $F_{t=0} \propto \delta(v)$  имеет вид (см., например, [8])

$$F(v, t) = \text{const} \cdot v^{3(\nu-1)/(3-\nu)} [D(v)t]^{-3/(3-\nu)} \exp \left\{ -\frac{v^2}{(3-\nu)^2 D(v)t} \right\}. \quad (12)$$

Так, при  $\nu = 1$  асимптотически формируется максвелловский спектр, при  $\nu = 2$  — спектр протонов солнечных вспышек вида  $e^{-v/v_0}$  [9]. Значения  $\nu > 2$  не представляют интереса, поскольку (см. следующий пункт) в этом случае ускорение определяется не циклотронным резонансом, а механизмом Ферми. Существенно отметить, что если константа  $\nu$  остается неизменной, то спектр (12) формируется и при произвольной зависимости  $H, L, u$  и  $h_0$  от времени: полагая  $D(v) = D_0(v) \cdot \varphi(t)$  и вводя переменную

$$\tau = \int_0^t \varphi(t) dt,$$

можно свести уравнение для нестационарной турбулентности к (9). В частности, если  $\varphi(t)$  флуктуирует, то ускорение определяется средним значением  $\varphi$ .

### В. Соотношение между циклотронным резонансом и механизмом Ферми

Как уже отмечалось, при скоростях частиц  $v \gg u$  роль черенковского резонанса мала. Можно показать, что черенковский коэффициент диффузии в пространстве скоростей примерно в  $u^2/v^2$  раз меньше (10). Поэтому единственным конкурирующим процессом является механизм Ферми, т. е. ускорение при адиабатическом отражении частиц от волн с масштабом, большим  $Av/\Omega_H$ , где параметр адиабатичности  $A$  обозначает отношение масштаба неоднородности поля к ларморовскому радиусу, начиная с которого сохраняется магнитный момент. Как показывают недавние экспериментальные исследования [10],  $A \sim 10$ . Теория ускорения Ферми в турбулентной плазме рассматривалась в [11], где, в частности, показано, что рассеяние частиц при циклотронном резонансе существенно повышает эффективность фермиевского механизма в разреженной плазме (как известно, в отсутствие рассеяния механизм Ферми не приводит к существенному ускорению). В [11] было также показано, что если спектр турбулентности имеет вид  $h(\lambda) \propto \lambda^\mu$  ( $h(\lambda)$  — средняя амплитуда пульсаций с масштабом  $\lambda$ ), то при  $\mu > 1/2$  основная роль в ускорении принадлежит столкновениям с длинными волнами, а при  $\mu \leq 1/2$  — с волнами, длина которых  $\sim Av/\Omega_H$ . Поскольку  $h(\lambda) = \sqrt{k} \frac{dh^2}{dk} \Big|_{k=2\pi/\lambda}$ , показатель  $\mu$  связан с введенным выше  $\nu$  соотношением  $\mu = (\nu - 1)/2$  и  $\mu > 1/2$  при  $\nu > 2$ . Эти результаты получены в предположении статистической независимости последовательных отражений.

В случае  $\nu > 2$  такая гипотеза представляется вероятной, так как при больших временах столкновений  $\sim L/v$  сказывается зазубренность гребней крупномасштабных волн и быстрый дрейф частиц на ударных фронтах. При  $\nu < 2$  статистическая независимость фермиевских столкновений обеспечивается рассеянием.

Если  $\nu > 2$ , фермиевский коэффициент диффузии в пространстве скоростей есть  $\approx u^2 v/L$  при  $h_0 \sim H$  и  $u^2 v h_0/(LH)$  при  $h_0 \ll H$ , и, как видно из сравнения с (11), примерно в  $Hh^{-1}(L\Omega_H/v)^{\nu-2}$  раз больше циклотронно-резонансного (по предположению,  $L \gg v/\Omega_H$ ). Вместе с тем, как показано в [11], при не слишком больших значениях  $\nu - 2$  циклотронный резонанс обеспечивает необходимое для механизма Ферми рассеяние уже при скоростях частиц больше нескольких  $u$ , хотя за время отражения рассеяние мало. Диффузия частиц вдоль поля при  $h_0 \sim H$  определяется фермиевскими столкновениями. Длина свободного пробега порядка  $L$  и не зависит от скорости частиц.

При  $\nu \leq 2$  интеграл [11]

$$D(v) = 2u^2 v \int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos^3 \theta \left. \frac{d\theta}{\lambda(h)} \right|_{h=H \operatorname{ctg}^2 \theta} \quad (13)$$

расходится при  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ . Здесь  $\lambda(h)$  — средняя длина волны с амплитудой  $h$ . В случае степенного спектра пульсаций  $\lambda(h) = 2\pi L(h/h_0)^{(\nu-1)/2}$ . Предел  $\theta_0$  определяется условием  $\lambda(h = H \operatorname{ctg}^2 \theta) = Av/\Omega_H$ . Подставляя в (13) и считая, что  $\pi/2 - \theta_0 \ll 1$ , получаем

$$D(v) = \frac{u^2 v}{4\pi L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \left( \frac{A}{2\pi} \right)^{\nu-2} \frac{\nu-1}{2-\nu}. \quad (14)$$

При  $\nu \rightarrow 2$

$$D(v) = \frac{u^2 v}{4\pi L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \ln \frac{L\Omega_H}{Av}. \quad (15)$$

Формулы (14), (15) справедливы при статистической независимости столкновений. Можно показать (с помощью (3)), что если  $\nu$  не слишком близко к двум, время изотропизации в элементе телесного угла  $\pi/2 + \theta_0 \geq \theta \geq \pi/2 - \theta_0$  много меньше времени фермиевских столкновений частиц с такими  $\theta$ , и статистическая независимость имеет место. При  $\nu \rightarrow 2$  время рассеяния в малом телесном угле  $\gamma$  вблизи  $\theta = \pi/2$  есть  $\tau_s \gamma$  и сравнимо с временем столкновений. В этом случае эффективное время фермиевских столкновений несколько увеличивается: частота равна  $\gamma/(\gamma\tau_s) = 1/\tau_s$ . Множитель  $\gamma$  определяет вероятность пребывания частицы в телесном угле  $\gamma$  при изотропии углового распределения. Учитывая, что  $\delta v = \delta v_z v_z/v$  и  $\delta v_z = 2u$ , получаем

$$D(v) = \frac{1}{2} \frac{\overline{(\Delta v)^2}}{\Delta t} = \frac{2}{\tau_s} u^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{u^2}{\tau_s}.$$

Таким образом, при  $\nu \leq 2$  механизм Ферми проявляется в основном через столкновения частиц с малыми  $v_z (\ll v)$  с короткими волнами. Зависимость  $D(v)$  от параметров задачи с точностью до численного множителя та же, что и при циклотронном резонансе (см. (14) и (11)). Весьма существенно, что с ростом  $v$  увеличивается  $D(v)$ , т. е. скорость поглощения энергии волн, отнесенная к одной частице.

### 3. Турбулентное ускорение в неограниченной плазме

В разделе 5 будет приведен ряд аргументов в пользу того, что параметр  $\nu$  в спектре пульсаций близок к двум. Следовательно, взаимодействие частиц с волнами сосредоточено в коротковолновой области спектра. Покажем, что в данном случае турбулентное ускорение является универсальным свойством турбулентности в плазме и обусловлено наиболее фундаментальными особенностями соответствующих процессов, а именно:

- а) резонансным характером рассеяния частиц на волнах;
- б) непрерывностью потока турбулентной энергии в пространстве волновых чисел;
- в) ростом  $D(v)$  с  $v$ .

Действительно, отсюда следует, что наиболее эффективная диссипация связана с жестким хвостом функции распределения, и что по мере ускорения число частиц, необходимых для поглощения постоянного потока турбулентной энергии в пространстве волновых чисел  $\epsilon$ , должно убывать. При этом диссипация будет связана в основном с некоторой группой быстрых частиц, скорости которых ограничены снизу растущей во времени величиной  $w$ . Волновое число  $k_0 = \Omega_H/w$  характеризует внутренний масштаб турбулентности. При  $k > k_0$  спектр пульсаций резко обрывается, и частицы с  $v < w$  перестают ускоряться вследствие исчезновения резонансных волн (фермиевское ускорение также прекращается из-за отсутствия рассеяния).

Если предположить, что граница спектра  $k_0$  достаточно крутая, можно рассмотреть этот эффект количественно. При  $v > w(t)$  имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D(v) \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (16)$$

При  $v < w$  функция  $F$  стационарна и определяется из непрерывности  $F$  при  $v = w$ . Величина  $w(t)$  является самосогласованной переменной и определяется из условия постоянства числа частиц:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v^\infty v^2 F(v) dv = 0 \quad (17)$$

при любом  $v < w$ .

Наконец, введем условие, определяющее число частиц с  $v > w$ . Это условие имеет вид

$$\dot{\epsilon} = \frac{M}{2} \int_w^\infty v^2 \frac{\partial}{\partial v} D(v) v^2 \frac{\partial F}{\partial v} dv. \quad (18)$$

Здесь  $\dot{\epsilon}$  — энергия турбулентных пульсаций, диссипируемая в  $1 \text{ см}^3$  за секунду, а интеграл в правой части дает скорость роста энергии частиц с  $v > w$ , которая определяется из (16). Величина  $\dot{\epsilon}$  задается свойствами турбулентности в длинноволновом участке спектра и не зависит от  $F$ . Уравнение (16) и условие непрерывности  $F$  при  $v = w$  определяют  $F$  с точностью до постоянного множителя. Этот множитель и  $w$  определяются из условий (17), (18).



Рассмотрим более подробно случай  $\nu = 2$  ( $D(v) \approx (u^2/L)(h_0/H)^2 v \equiv \Lambda v$ ). Уравнения (16), (18) имеют теперь вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\Lambda}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 \frac{\partial F}{\partial v}, \quad \dot{\epsilon} = \frac{\Lambda M}{2} \int_w^\infty v^2 \frac{\partial}{\partial v} v^3 \frac{\partial F}{\partial v} dv$$

и (при  $w \gg u$ ) не содержат каких-либо масштабных параметров с размерностью  $v$  или  $t$ . Поэтому решение автомодельно и, как показано в [11], автомодельной переменной является  $x = v/(\Lambda t)$ . Ищем решение в виде  $w = \Lambda t x_0$  ( $x_0 = \text{const}$ ),  $F = t^{-n} \psi(x)$ . Из (18) (при  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ ) находим, что  $n = 4$ . Тогда уравнения принимают вид

$$x\psi'' + (3+x)\psi' + 4\psi = 0 \quad (x > x_0), \quad (19)$$

$$2\dot{\epsilon}\Lambda^{-5}M^{-1} = \int_{x_0}^\infty x^2 \frac{d}{dx} x^3 \frac{d\psi}{dx} dx. \quad (20)$$

Из непрерывности  $F$  при  $x = x_0$  следует, что при  $x < x_0$

$$\psi(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^4 \psi(x_0). \quad (21)$$

Функция распределения  $F$  при  $x = x_0$ , как видно из (21), стационарна и равна  $F(v) = \Lambda^4 x_0^4 \psi(x_0) v^{-4}$ .

Вырожденное гипергеометрическое уравнение (19) имеет аналитическое решение

$$\psi(x) = (x-3)e^{-x}, \quad (22)$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Второе решение (см., например, [12]) при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид  $x^{-4}$ , приводит к расходимости энергии частиц и поэтому должно быть отброшено.

Из (18) и (21), (22) находим, что  $x_0 = 4$ . Наконец, положив  $\psi(x) = Q(x-3)e^{-x}$  и подставляя в (20), получаем

$$\psi(x) = \frac{e^4}{11536} \dot{\epsilon} \Lambda^{-5} M^{-1} (x-3)e^{-x}.$$

Функция распределения есть

$$F(v, t) = \begin{cases} \frac{1}{1848} \frac{\dot{\epsilon}}{\Lambda M} \frac{1}{v_0^4} \left(\frac{v}{v_0} - 3\right) e^{-v/v_0+4}, & v > w = 4v_0, \\ \frac{32}{231} \frac{\dot{\epsilon}}{\Lambda M} \frac{1}{v^4}, & v < w. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь  $v_0 = \Lambda t$ .

Поскольку в основном масштабе ( $k = 2\pi/L$ )  $h^2(L) = h_0^2/(2\pi)$ , а плотность энергии  $\frac{h^2(L)}{4\pi} = \frac{h_0^2}{8\pi^2}$ , параметр  $\dot{\epsilon}$  по порядку величины равен  $\frac{h_0^2 u}{16\pi^3 L} \left(\frac{h_0}{H}\right)^2$  (т. е. энергии в основном масштабе, деленной на время турбулентного распада). Учитывая,

что  $\Lambda \approx \frac{u^2}{L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2$ , и вводя плотность холодной плазмы  $N$ , можно преобразовать множитель  $\frac{\dot{\epsilon}}{\Lambda M}$  к виду  $\frac{Nu}{4\pi^2} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2$ .

Полное число частиц со скоростями, большими  $v$ , есть

$$n(>v) = \int_v^{\infty} F(v, t) v^2 dv.$$

При  $v \geq w$  и  $v < w$  имеем

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{1848} \frac{Nu}{4\pi^2 v_0} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \left( \frac{v}{v_0} \right)^3 e^{-v/v_0+4}, \quad v \geq w, \\ n &= \frac{2N}{231\pi^2} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \frac{u}{v}, \quad v < w. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотренный процесс начинается при  $v_0$  порядка нескольких  $u$  (когда роль черенковского резонанса становится малой). Как видно из (24), уже при  $v_0 \sim 3-5u$  количество ускоряемых частиц ( $v > w$ ) составляет лишь  $\sim 10^{-3}$  от полного числа и быстро убывает с ростом  $w$ . Таким образом, действительно имеет место эффект ускорения малой доли частиц.

Представляет интерес вычислить интегральный спектр интенсивности ускоренных частиц

$$S(>v) = \int_v^{\infty} v^3 F dv. \quad (25)$$

При  $v > w$

$$S(>v) = \frac{1}{1848} \frac{Nu}{4\pi^2} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 (x^4 + x^3 + 3x^2 + 6x + 6) e^{-x+4} \quad \left( x = \frac{v}{v_0} \right), \quad (26)$$

а при  $v < w$

$$S(>v) = \left( \frac{32}{231} \ln \frac{4v_0}{v} + \frac{199}{924} \right) \frac{Nu}{4\pi^2} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2. \quad (27)$$

При  $v < w$  интенсивность зависит от  $v$  очень слабо, а при  $v > w$  она круто падает. Отсюда следует, в частности, что при прошествии некоторого времени (порядка  $10u/\Lambda$ ) интенсивность частиц со скоростями  $\sim 10u$  достигает величины  $\sim (Nu/200)(h_0/H)^2$  и в дальнейшем почти не изменяется.

В заключение отметим, что аналогичный эффект роста внутреннего масштаба турбулентности и ускорения убывающего числа частиц должен иметь место при ускорении электронов при циклотронном резонансе с пульсациями высокочастотной ветви быстрых магнитнозвуковых волн, а также при черенковском резонансе с ленгмюровскими волнами. В последнем случае из-за сильной дисперсии каждому значению скорости частицы соответствует определенная длина волны ( $kv \sim \omega_0$ ). Если спектр ленгмюровских волн таков, что с ростом  $k$  амплитуда падает, будет иметь место аналогичный эффект ускорения.

#### 4. Ускорение в ограниченной плазме. Роль диффузии

В ограниченной плазме процесс роста энергии частиц на хвосте функции распределения приостанавливается за счет диффузии, и функция распределения становится стационарной. Диссипируемая энергия идет на восполнение быстрых частиц, диффундирующих из турбулентной области. В этом случае процесс приближенно описывается уравнениями

$$\frac{u^2}{L} \left( \frac{h}{H_0} \right)^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\pi^2 L}{32 z_0^2} \left( \frac{H}{h_0} \right)^2 F = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\pi^2 M L}{64 z_0^2} \left( \frac{H}{h_0} \right)^2 \int_0^\infty v^5 F(v) dv = \dot{\epsilon}. \quad (29)$$

В уравнении (28) мы заменили оператор диффузии  $D_{||} \partial^2 / \partial z^2$  на декремент затухания основной гармоники  $\frac{\pi^2 D_{||}}{4 z_0^2}$  ( $2 z_0$  — длина турбулентной области вдоль  $H$ ) и выразили  $D_{||}$  через  $v$ ,  $L$  и  $h_0$  с помощью формул раздела 2. Численный расчет для  $\lambda_1$  при  $\nu = 2$  дает  $\lambda_1 \approx 2,6$ . Уравнение (29) описывает баланс энергии. Интеграл в левой части дает скорость утечек энергии за счет диффузии частиц.

Из (28) получаем

$$F = \frac{C}{v} K_1 \left( \frac{v}{w} \right), \quad w = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} u \frac{z_0}{L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2, \quad (30)$$

где  $K_1$  — функция Макдональда. Подставляя в (29), интегрируя и полагая

$$\dot{\epsilon} = \frac{h_0^2 u}{8 \pi^2 L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2,$$

находим  $C$  и получаем

$$F = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{4096} \left( \frac{L}{z_0} \right)^3 \frac{N H^4}{h_0^4} \frac{1}{u^2 v} K_1 \left( \frac{v}{w} \right). \quad (31)$$

Концентрация быстрых частиц в плазме  $q$  есть

$$q = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 F dv = \frac{\sqrt{2} L}{128 z_0} \quad (32)$$

и зависит только от соотношения между размером турбулентной области и основным масштабом. Время удержания плазмы

$$\tau = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{q} \frac{z_0^2}{D_{||}} = \frac{128 \sqrt{2}}{\pi^3} \left( \frac{z_0}{L} \right)^2 \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 \frac{z_0}{w} \quad (33)$$

по условию задачи должно быть достаточно большим в сравнении с временем ускорения частиц до скорости  $\sim w$ . Поскольку  $w \approx \frac{u^2}{L} \left( \frac{h_0}{H} \right)^2 t$ , условие применимости результатов есть  $t \ll \tau$  или, после подстановки значений  $w$ ,

$$z_0 \gg L. \quad (34)$$

При этом концентрация быстрых частиц всегда будет малой.

Результаты разделов 3 и 4 показывают, что причиной ускорения малой доли частиц является рост амплитуды пульсаций с длиной волны, откуда следует, что по мере ускорения увеличивается эффективность взаимодействия частицы с волнами. Данный эффект может быть использован для ускорения частиц до энергий  $\sim Mw^2/2$  (см. (30)) с высоким коэффициентом полезного действия. Однако поскольку скорость частиц не может превосходить  $L\Omega_H$ , в лабораторных условиях ( $L \lesssim 10$  см,  $\Omega_H \lesssim 10^7$  рад/с) получаемые энергии невелики ( $\lesssim 50$  кэВ). Совершенно иное положение имеет место в космосе, где благодаря огромным размерам турбулентных областей могут достигаться весьма высокие энергии частиц.

## 5. Приложения к космофизическим проблемам

В настоящее время имеются некоторые данные о спектрах плазменной турбулентности в межпланетной среде и накоплен большой материал по быстрым частицам различной природы, наблюдаемым в этом районе. Исследование плазменной турбулентности с помощью автоматических межпланетных станций является весьма перспективным. Рассмотрим некоторые приложения развитой выше теории к космофизическим проблемам.

### А. Распространение быстрых частиц солнечных вспышек в межпланетной среде

Как показывает эксперимент, при солнечных вспышках генерируются быстрые частицы с энергиями вплоть до  $\sim 1$  ГэВ. Распространение этих частиц в межпланетной среде хорошо описывается сферической диффузионной волной от мгновенного точечного источника:

$$S(>v) = \text{const} \cdot (D_R t)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{R^2}{4D_R t} \right\}, \quad (35)$$

где  $D_R$  — коэффициент диффузии,  $t$  — время с момента вспышки,  $R$  — гелиоцентрическое расстояние. Поскольку в действительности диффузия идет вдоль силовых линий,  $D_R = D_{\parallel}(dr/ds)^2$ , где  $ds$  — дифференциал дуги силовой линии, а  $D_{\parallel}$  определяется соотношениями (4) и (8) раздела 2. Измерения проводятся, как правило, вблизи орбиты Земли, и  $R = R_0 \approx 1,5 \cdot 10^{13}$  см фиксировано, а (35) описывает временную зависимость интенсивности. Максимум достигается при  $t = t_0 = R^2/(6D_R)$ . Если измерено  $S(>v, t)$  для ряда энергий, то можно определить  $D_R(v)$  и отсюда построить спектр пульсаций в районе земной орбиты.

В работе [13] приведены результаты исследований ряда вспышек в 1961–1962 гг. и показано, что если в (35) заменить  $t$  на  $x = vt$ , то в интервале энергий от 3 до 400 МэВ диффузионные кривые  $S(>v, x)$  совпадают с точностью до нормировочного множителя, зависящего от  $v$  и определяющего спектр инжекции. Максимум достигается при  $x_0 = vt_0 = 1,5 \cdot 10^{14}$  см. Поскольку при этом  $D_R \propto v$ , спектр пульсаций имеет вид  $dh^2/dk \propto k^{-\nu}$  с  $\nu \geq 2$ . Если принять, что  $\nu = 2$ , то с помощью (4) и (8) получаем  $dh^2/dk = 6 \cdot 10^{-22} k^{-2} [\text{Э}^2 \cdot \text{см}]$  (при  $x_0 = 1,5 \cdot 10^{14}$  см). Этот спектр изображен на рис. 1 кривой I. Для сравнения приведен спектр, измеренный экспериментально на автоматической станции «Маринер IV» [14]<sup>1)</sup>. Коэффици-

<sup>1)</sup> Экспериментально измеряется зависимость  $h^2$  от времени и строится частотный спектр  $dh^2/df$ , где  $f = (k/2\pi)(U + u)$ ,  $u \sim 5 \cdot 10^6$  см/с — альвеновская скорость,  $U = 3 \cdot 10^7$  см/с — скорость солнечного ветра,  $f$  — доплеровская частота.

ент диффузии, вычисленный по этим спектрам, хорошо соответствует величине  $5 \cdot 10^{21} \text{ см}^2/\text{с}$  при энергии 100 МэВ, полученной при анализе ряда вспышек в [15].

Однако указанный вид спектра соответствует спокойному состоянию солнечного ветра, а при возмущениях на Солнце, спектр существенно меняется. Так, в октябре 1962 г. на станции «Маринер II» [16] был получен спектр, соответствующий кривой II на рис. 1. Как видно из рисунка, в области коротких волн спектр также имеет вид  $dh^2/dk \propto k^{-2}$ . По-видимому, равновесный спектр крупномасштабной гидромагнитной турбулентности, соответствующий постоянному во времени потоку энергии в пространстве волновых чисел, имеет вид  $dh^2/dk \propto k^{-2}$ , а спектр II на рис. 1 в области длинных волн еще не успел сформироваться и сохраняет начальную форму. Если вспышка происходит в момент, когда имеется спектр пульсаций типа II, то диффузионная волна частиц малых энергий будет сильно растянута во времени по сравнению с типичными случаями.

### Б. Ускорение в межпланетной среде

Наличие турбулентности в солнечном ветре должно приводить к ускорению частиц.

При скоростях солнечного ветра  $U \sim 3\text{--}4 \cdot 10^7 \text{ см/с}$  и размерах крупномасштабных неоднородностей  $5 \cdot 10^{12} \text{ см}$  вблизи орбиты Земли в течение времени  $t \sim 1\text{--}2 \cdot 10^5 \text{ с}$  спектр турбулентности и среднее поле можно считать стационарными. Если  $dh^2/dk = Ak^{-2}$ , то параметр  $v_0$  (см. раздел 3) можно представить в виде

$$v_0 = \frac{Au^2t}{H^2} = \frac{At}{4\pi MN}.$$

При  $A = 6 \cdot 10^{-22}$  (спектр I, рис. 1)  $v_0 = 10^6$ , что в 30 раз меньше скорости солнечного ветра и в 5 раз меньше альвеновской скорости (типичные параметры солнечного ветра  $H = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Э}$ ,  $N = 5 \text{ см}^{-3}$ ,  $u = 5 \cdot 10^6 \text{ см}$ ). Однако при более мощной турбулентности (спектр II) ускорение становится достаточно эффективным,  $v_0 = 10^8 \text{ см/с}$ . Спектр частиц, соответствующий параметрам  $H = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Э}$ ,  $N = 5 \text{ см}^{-3}$ ,  $t = 2 \cdot 10^5 \text{ с}$  и спектру пульсации II, представлен на рис. 2 (кривая 1). Расчет проведен на основе формул раздела 3. Величина  $\epsilon$  определяется по участку спектра с  $k \sim 1\text{--}2 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1}$ , где, по нашему предположению,  $\epsilon$  перестает зависеть от  $k$ . Как видно из рисунка, интенсивности частиц с энергиями порядка сотен кэВ весьма велики и составляют  $\sim 10^4 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .

При полетах ряда советских и американских автоматических станций в 1964–1965 гг. были обнаружены вспышки интенсивности протонов с энергиями  $\sim 500 \text{ кэВ}$  –  $1 \text{ МэВ}$ , при которых потоки возрастали от фона до величины  $\sim 10^3 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  [17–19]. Спектры этих вспышек оказались очень мягкими. Так, при энергиях, больших 30 МэВ, отчетливо заметны спады интенсивности космических лучей на несколько процентов, сопровождающие вспышки протонов с энергиями  $\sim 1 \text{ МэВ}$ . Эти спады, как известно, указывают на появление возмущенной плазмы [20, § 26]. Поэтому можно предположить, что вспышки малознергичных протонов связаны не с ускорением на Солнце, а с турбулентностью в межпланетной среде.

Следует иметь в виду, что приведенные выше экспериментальные результаты были получены в годы низкой солнечной активности. Возможно, что в годы максимума (при наличии мощных и частых хромосферных вспышек) мощность турбулентных пульсаций иногда бывает значительно более высокой. В связи с этим

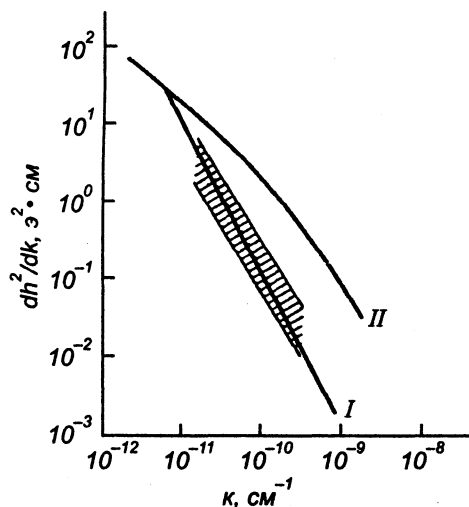


Рис. 1

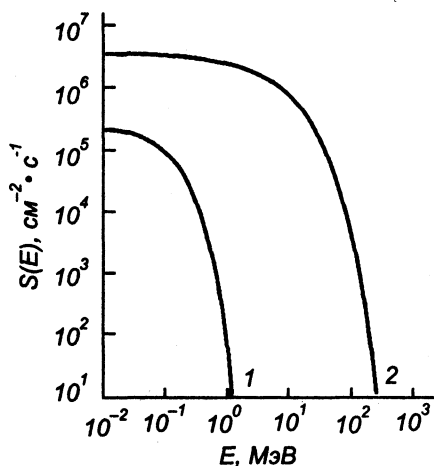


Рис. 2

укажем, что при возрастании амплитуд пульсаций в три раза по сравнению со спектром пульсаций *II* рис. 1 за время  $\sim 10^5$  с частицы будут ускоряться до  $v_0 \approx 10^9$ . Спектр при  $v_0 \approx 10^9$  см/с также приведен на рис. 2 (кривая 2). В этом случае появляются мощные потоки протонов с энергиями в десятки МэВ. Подобные явления наблюдались с помощью шаров-зондов в 1959–1960 гг. [15, 21]. Вслед за диффузионной волной протонов солнечной вспышки (максимум которой наблюдается через несколько часов), спустя сутки, возникал новый максимум с более мягким спектром. Этот максимум всегда связан с приходом к Земле возмущенной плазмы. В [22] был указан ряд трудностей, с которыми сталкивается попытка объяснения данного эффекта ускорением на Солнце. Вероятно, эти эффекты являются случаями наиболее мощного турбулентного ускорения в межпланетной среде.

## 6. Заключение

Приведенное исследование показывает, что при крупномасштабной гидромагнитной турбулентности в бесстолкновительной плазме происходит ускорение небольшой доли частиц до высоких энергий. Несмотря на известную неопределенность некоторых характеристик турбулентности, теория позволяет количественно объяснить ряд эффектов, связанных с турбулентным ускорением. В частности, анализ различных явлений на основе данной теории приводит к важному заключению о виде равновесного спектра такой турбулентности, которое подтверждается прямыми измерениями.

В заключение воспользуюсь случаем, чтобы выразить сердечную признательность С. Н. Вернову, Б. Б. Кадомцеву и Л. И. Рудакову за ряд ценных замечаний.

## Литература

1. Biswas S., Fichtel C. E. Space Sci. Rev. 4, 709 (1965).
2. Sweet P. 6 IAU Symposium. Stockholm, 1956. 123 (1958).

3. *Dungey J. W.* Phil. Mag. **44**, 725 (1953).
4. *Сыроватский С. И.* Астроном. журн. **43**, 3 (1966).
5. *Цытович В. И.* УФН. **89**, 89 (1966).
6. *Веденов А. А., Сагдеев Р. З., Велихов Е. П.* Ядерный синтез. **1**, 81 (1961).
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1944.
8. *Паркер Е.* Динамические процессы в межпланетной среде. М.: Мир, 1965.
9. *Frier P. S., Webber W. R.* J. Geophys. Res. **68**, 1605 (1963).
10. *Дубинина А. Н.* Диссертация. Институт ядерной физики СО АН СССР. Новосибирск, 1967.
11. *Тверской Б. А.* ЖЭТФ. **52**, 483 (1967).
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
13. *Briant D. A., Cline T. L., Desai O. D., McDonald F. B.* Astrophys. J. **14**, 478 (1965).
14. *Siscoe E. L., L. Davis, Smith E. J., Coleman P. J.* Thesis of STP Conf. Belgrad. 25 (1966).
15. *Чарахчян А. Н.* УФН. **83**, 35 (1964).
16. *Gloecker G., Jokipii J. R.* Phys. Rev. Lett. **17**, 203 (1966).
17. *Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Логачев Ю. И., Любимов Г. П., Переслегина Н. В.* ДАН СССР. **171**, 847 (1966).
18. *Van Allen J. A., Krimigis S. M.* J. Geophys. Res. **70**, 5737 (1965).
19. *Van Allen J. A., Krimigis S. M.* Phys. Rev. Lett. **17**, 419 (1966).
20. *Дорман Л. И.* Вариации космических лучей и исследование космоса. М.: Изд. АН СССР, 1963.
21. *Ney E. R., Stein W. A.* J. Geophys. Res. **67**, 2087 (1962).
22. *Parker E.* Phys. Rev. Lett. **14**, 55 (1965).

## К ТЕОРИИ УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ\*

### Аннотация

На основе кинетического уравнения проведено рассмотрение ускорения заряженных частиц в нестационарных магнитных полях при рассеянии на гидромагнитной турбулентности. Получено в общем виде уравнение диффузии частиц в импульсном пространстве, установлена связь коэффициента альвеновской диффузии со спектром турбулентности и параметрами нестационарного магнитного поля. Для нахождения спектра волн и частиц сформулирована самосогласованная система уравнений, описывающих квазилинейное нарастание колебаний и релаксацию функции распределения под воздействием колебаний. Решена самосогласованная система уравнений для ультрарелятивистских электронов с учетом магнитно-тормозного излучения, сделан вывод об области эффективного ускорения, а также исследованы границы применимости альвеновского механизма ускорения. Показана возможность применения альвеновского механизма ускорения, обеспечивающего наблюдаемую мощность синхротронного рентгеновского излучения, к Крабовидной туманности и пульсару NP0532, приведены оценки ряда параметров плазмы и излучения этих объектов.

В работах [1–3] рассмотрена кинетическая теория ускорения заряженных частиц в нестационарных магнитных полях (магнитная накачка Альвена [4]). В квазилинейном приближении получено уравнение диффузии частиц в импульсном пространстве. В [2] подробно обсужден вопрос об источнике турбулентности и решена самосогласованная задача альвеновского ускорения для случая сильного рассеяния.

А. Б. Михайловский любезно обратил наше внимание на необходимость использования при решении самосогласованной задачи нахождения спектра частиц и турбулентности точного уравнения для скорости роста спектральной функции  $\Phi = dh^2/dk$  [5]. Решению этой более общей задачи и посвящена данная работа. С этой целью, во-первых, выводится более общее уравнение диффузии частиц в пространстве импульсов. Далее формулируется самосогласованная система уравнений, описывающих квазилинейное нарастание колебаний и релаксацию функции распределения быстрых частиц под воздействием этих колебаний.

Затем решается самосогласованная задача ускорения ультрарелятивистских частиц с учетом магнитно-тормозного излучения, делается вывод об области эффективного ускорения  $p \approx p_0$ . Исследуются границы применимости альвеновского ускорения. Все результаты данной работы получены для бесстолкновительной плазмы при тех же условиях, которые использованы в [2], и для магнитного поля,

---

\* Бахарева М. Ф., Ломоносов В. Н., Тверской Б. А. Геомагнетизм и астрономия. Т. 13. № 5. 769–776 (1973).



изменяющегося по закону

$$B = B_0(1 + \beta \cos Wt), \quad \beta < 1. \quad (1)$$

Рассмотрены также приложения исследуемого механизма ускорения частиц к Крабовидной туманности и пульсарам.

### Вывод диффузионного уравнения ускорения

Уравнение для усредненной по турбулентным пульсациям функции распределения быстрых частиц  $f(p, \theta, t)$  в квазилинейном приближении при наличии переменного магнитного поля  $B(t)$ , изменение которого происходит с сохранением адиабатических инвариантов  $p_\perp^2/B = \text{const}$ ,  $p_z = \text{const}$ , исходя из работ [1, 6] может быть записано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \sin \theta \frac{\dot{B}}{2B} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\cos \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{e^2}{4m^2 c^4 \epsilon} \hat{S}, \quad (2)$$

$$\hat{S} = \left\{ \frac{cp_z - \epsilon \sigma c_A}{p_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} p_\perp - cp_\perp \frac{\partial}{\partial p_z} \right\} \frac{\Phi}{|cp_z - \epsilon \sigma c_A|} \left\{ (cp_z - \epsilon \sigma c_A) \frac{\partial f}{\partial p_\perp} - cp_\perp \frac{\partial f}{\partial p_z} \right\},$$

где  $p$  и  $\epsilon$  — безразмерный импульс и энергия частицы, выраженные в единицах  $mc$  и  $mc^2$ ,  $e$  — заряд,  $m$  — масса покоя частицы,  $\Phi(|cp_z - \epsilon \sigma c_A|)$  — спектральная функция турбулентности, определенная при условии  $k = \frac{\omega_B}{|cp_z - \epsilon \sigma c_A|}$ . Коэффициент  $\sigma$  определен в следующем виде:

$$\sigma = \frac{|p_z|}{p_z} = \begin{cases} 1, & p_z > 0, \\ -1, & p_z < 0. \end{cases} \quad (3)$$

В (2)  $p_z = p \cos \theta$ ,  $p_\perp = p \sin \theta$  — импульс частицы вдоль и поперек внешнего магнитного поля  $B$ ,  $\theta$  — угол между  $p$  и  $B$ .

В соответствии с работой [7] представим квазилинейный член в правой части (2) в виде разложения по параметру  $(c_A/v)$  ( $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$  — альвеновская скорость,  $\rho$  — плотность холодной плазмы,  $v = cp/\epsilon$  — скорость частицы) с точностью до членов  $(c_A/v)^2$  включительно:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{S}_0 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2; \\ \hat{S}_0 &= \frac{c^2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{(\sin \theta) \Phi}{|cp \cos \theta|} \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ \hat{S}_1 &= -\frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot \epsilon \sigma c_A \frac{\partial \Phi}{\partial cp_z} \frac{\sigma}{p \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\Phi \sin \theta \cdot \epsilon \sigma c_A}{|cp_z| p \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \\ &\quad - \frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\Phi \cdot \epsilon \sigma c_A}{|cp_z|} \frac{\partial}{\partial p_\perp} - \frac{\epsilon c_A \sigma}{p_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} p_\perp \frac{\Phi \sigma}{p \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ \hat{S}_2 &= -\frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\Phi \cdot (\epsilon \sigma c_A)^2}{cp_z |cp_z|} \frac{\partial}{\partial p_\perp} - \frac{\epsilon c_A \sigma}{p_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} p_\perp \frac{\Phi \cdot \epsilon c_A \sigma}{|cp_z| p \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon c_A \sigma}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} \frac{\Phi \cdot \varepsilon c_A \sigma}{|c p_z|} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot \varepsilon \sigma c_A \frac{\partial \Phi}{\partial c p_z} \frac{\varepsilon c_A \sigma}{|c p_z| p \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\
& + \frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot \varepsilon \sigma c_A \frac{\partial \Phi}{\partial c p_z} \frac{\varepsilon \sigma c_A}{|c p_z|} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{\varepsilon c_A \sigma}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} \varepsilon c_A \frac{\partial \Phi}{\partial c p_z} \frac{1}{|p_z|} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\
& + \frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cdot c p_z \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon \sigma c_A)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial |c p_z|^2} \frac{1}{c p_z} + \frac{\Phi}{|c p_z|} \left( \frac{\varepsilon \sigma c_A}{c p_z} \right)^2 \right] \frac{1}{p \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

Операторы  $\widehat{S}_0, \widehat{S}_1, \widehat{S}_2$  являются членами соответственно нулевого, первого и второго порядков по параметру  $(c_A/v)$ . Решаем уравнение (2) в квазилинейном приближении, производя усреднение по периоду  $T = 2\pi/W$  изменения магнитного поля (1). Представим решение уравнения (2) в виде

$$f(p, \theta, t) = \bar{f}(p, t) + f_c(p, \theta, t) + f_a(p, \theta, t), \quad (5)$$

где  $\bar{f}(p, t)$  — изотропная функция распределения, однородная в пространстве и не зависящая от  $\theta$ ,  $f_c(p, \theta, t)$ ,  $f_a(p, \theta, t)$  — симметричная и несимметричная относительно  $\theta = \pi/2$  добавки к  $\bar{f}(p, t)$  (черта сверху означает усреднение по  $T$ ).

Использование общих свойств функций  $f_c$  и  $f_a$ , рассмотренных в [1, 2] и приводящих при  $\widehat{S}_0 f_c \neq 0$ ,  $\widehat{S}_0 f_a = 0$  к равенству нулю среднего по телесному углу от симметричной функции при условии сильного рассеяния, аналогичном условию в работе [2], и при  $f_c \ll \bar{f}$ ,  $f_a \ll \bar{f}$ , приводит к следующему линеаризованному кинетическому уравнению для  $f_c$ :

$$\begin{aligned}
p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \frac{\dot{B}}{2B} (\sin^2 \theta - \langle \sin^2 \theta \rangle_{\theta}) + \frac{e^2 c_A}{4m^2 c^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \cdot \sigma \Phi \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} = \\
= \frac{c^2}{4m^2 c^2 \varepsilon \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \Phi}{|c p \cos \theta|} \frac{\partial f_c}{\partial \theta}.
\end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя (6) дважды по  $\theta$ , представляем решение  $f_c$  в виде

$$\begin{aligned}
f_c &= f_{c_1} + f_{c_2}; \\
f_{c_1} &= \varepsilon p \frac{\dot{B}}{2B} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \cdot \left( -\frac{4}{3} \frac{m^2 c^2}{e^2} \int \frac{\cos \theta \sin \theta |c p \cos \theta| d\theta}{\Phi(|c p \cos \theta|)} \right); \\
f_{c_2} &= -\varepsilon \frac{c_A}{c} \sigma \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \cos \theta.
\end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение для  $\bar{f}(p, t)$  получим, подставив (5) в (2) и усреднив уравнение (2) по телесному углу и по периоду  $T$ . Учтываем, при этом, что  $\langle \widehat{S} f_a \rangle_T = 0$  и  $\langle \widehat{S} f_{c_1} \rangle_T = 0$ , а также  $\langle \widehat{S}_1 \bar{f} \rangle_{T, \theta} + \langle \widehat{S}_0 f_{c_2} \rangle_{T, \theta} = 0$ , и непосредственным интегрированием легко убеждаемся, что  $\langle \widehat{S}_1 f_{c_2} + \widehat{S}_2 \bar{f} \rangle_{T, \theta} = 0$ . Тогда правая часть уравнения (2) после интегрирования по  $T$  и  $\theta$  обращается в нуль. В квазилинейном приближении, сохраняя члены, квадратичные по пульсациям с периодом  $T$ , и используя свойства  $f_c$ , после усреднения по телесному углу  $\theta$  получаем для функции распределения  $\bar{f}(p, t)$  уравнение ускорения диффузионного типа:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 D(p) \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \right], \quad (8)$$

где  $D(p)$  — коэффициент, равный

$$D(p) = \frac{m^2 c^2 p^2 \varepsilon_2}{3e^2} \left\langle \left( \frac{\dot{B}}{2B} \right)^2 \right\rangle_T \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int \frac{\cos \theta |cp \cos \theta| \sin \theta d\theta}{\Phi(|cp \cos \theta|)}. \quad (9)$$

По своему виду уравнение диффузии (8), полученное при учете членов 1-го и 2-го порядков в разложении оператора  $\hat{S}$ , не отличается от соответствующего уравнения диффузии в [1, 2].

### Самосогласованная задача о спектре волн и частиц

Решение уравнения (8) зависит от спектра турбулентности  $dh^2/dk$ . В переменном магнитном поле  $B(t)$  источником интенсивной турбулентности в плазме является циклотронная неустойчивость, связанная с анизотропией углового распределения частиц по скоростям [1–3, 8]. В работах [1, 2] сформулирована и решена самосогласованная задача для частного случая сильного рассеяния на границе устойчивости плазмы. В данной работе для получения самосогласованной системы уравнений в качестве одного из уравнений системы будем использовать точное уравнение квазилинейной теории для скорости роста спектральной функции [5]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\gamma_k \Phi, \quad (10)$$

где, согласно [8, 9], инкремент для волн круговой поляризации, бегущих вдоль поля, имеет вид

$$\gamma_k = -\frac{4\pi^3 e^2 c_A \omega}{mc^2} \frac{\omega}{k} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \left[ \bar{f} + \frac{\omega \varepsilon \pm \omega_B}{\omega \varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f}{\partial p_z^2} \right) p_\perp^2 \right] \delta(\pm \omega_B - ckp_x) p^2 dp dx. \quad (11)$$

В (11) знак «плюс» относится к волне, вектор  $E$  которой вращается в сторону ларморовского вращения протонов, а «минус» — к волне с противоположным направлением вращения,  $x = \cos \theta$ ,  $\omega_B = eB/(mc)$ .

Выражая анизотропию функции распределения  $\frac{\partial f}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f}{\partial p_z^2}$  через  $\partial f_c / \partial \theta$  [1, 2], используя выражение (7) для  $f_c$ , находим, что  $\gamma_k$  может быть преобразовано к виду

$$\gamma_k = \pm \frac{32}{3} \pi^3 c_A \omega_B^2 m \frac{\dot{B}}{2B} \frac{1}{k^2 \Phi} \int_0^\infty \int_{-1}^1 (1-x^2) \sigma(\omega_B^2 - k^2 c^2 p^2 x^2) p^3 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} k c p_x dp dx. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и интегрируя (10) по времени, находим следующее выражение для спектра турбулентности  $\Phi(k)$  (усредненное по периоду  $T$  изменения магнитного поля  $B(t)$ ):

$$\Phi = \frac{64}{3} \beta \pi^2 \frac{c_A}{c} m \omega_B^2 \frac{1}{k^3} \int_{\omega_B/kc}^\infty p \bar{f} dp. \quad (13)$$

Выражение (13) для  $\Phi$  получено для альвеновских волн, дисперсионное уравнение которых  $\omega^2 = k^2 c_A^2$ , при условии  $\omega \varepsilon \ll \omega_B$  и  $\bar{f} \rightarrow 0$ , когда  $p \rightarrow \infty$ . Уравнения

(8) и (13) образуют искомую самосогласованную систему уравнений для нахождения спектра частиц и спектра волн  $\Phi(k)$ . Мы используем усредненную по периоду накачки спектральную функцию и тем самым исключаем из рассмотрения малые промежутки времени  $\tau \ll T$ , когда возможна одновременная генерация волн с противоположными типами поляризаций.

### Ускорение ультрарелятивистских частиц с учетом магнитно-тормозного излучения

При учете потерь на излучение ультрарелятивистское уравнение диффузии в стационарном случае принимает вид [2, 3]

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 D(p) \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} + p^4 \eta \bar{f} \right] = 0, \quad \eta = \frac{\dot{p}}{p^2} = \frac{4 e^4 B^2}{9 m^3 c^5}, \quad (14)$$

где  $p$  — безразмерный импульс, выраженный в единицах  $mc$ ,  $\dot{p}$  — усредненная по углу  $\theta$  между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{p}$  скорость потери импульса за счет магнитно-тормозного излучения; при этом положим  $\varepsilon \simeq p$ .

Уравнения (13) и (14) образуют самосогласованную систему для определения  $\bar{f}(p)$  и  $\Phi(k)$ . Рассматриваемая область частот удовлетворяет условию  $\omega \varepsilon \ll \omega_B$ , при этом  $\cos \theta \simeq 1$ , так что условие резонанса примет вид  $p \simeq \omega_B / kc$ . Тогда для коэффициента диффузии имеем следующее выражение:

$$D_A = \frac{D(p)}{p^2} = \frac{W^2 \beta B I_0}{256 \pi^2 c_A e p} \left( \int_p^\infty \bar{f} p' dp' \right)^{-1}; \quad (15)$$

$$I_0 = \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int \cos \theta |\cos \theta| \sin \theta d\theta.$$

Подставляя (15) в (14), будем искать  $\bar{f}(p)$  как решение следующего нелинейного интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} + \mu \bar{f} \int_\xi^\infty \bar{f} d\xi = 0, \quad \xi = p^2, \quad (16)$$

где  $\mu = \frac{1}{4} \frac{\eta}{D_0}$  и  $D_0 = \frac{W^2 \beta B I_0}{256 \pi^2 c_A e}$ .

Как следует из [10], решением (16), ограниченным на бесконечности, является

$$\bar{f} = \frac{A}{(\xi + p_0^2)^2} \quad \text{при} \quad A = \frac{2}{\mu}. \quad (17)$$

Произвольную постоянную  $p_0$  выразим через концентрацию быстрых частиц

$$n = \int_0^\infty \bar{f} p^2 dp = \frac{\pi}{2 \mu p_0}.$$

Соответствующий самосогласованный спектр турбулентности (13) для полученного распределения частиц (17) принимает вид

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{\mu k^3} \left[ \left( \frac{\omega_B}{kc} \right)^2 + p_0^2 \right]^{-1}, \quad \Phi_0 = \frac{64}{3} \beta \pi^2 \frac{c_A}{c} m \omega_B^2, \quad (18)$$

а вычисление коэффициента диффузии  $D_A$  в ультрарелятивистском случае дает выражение

$$D_A = \frac{W^2 \beta B}{\pi c_A e n} \frac{7}{4608} \left( \frac{p^2 + p_0^2}{2 p p_0} \right). \quad (19)$$

Коэффициент диффузии (19) имеет минимум при  $p \approx p_0$  и равен

$$D_A = \left( \frac{7}{4608} \right) \left( \frac{W^2 \beta B}{\pi c_A e n} \right).$$

Дифференциальная плотность энергии электронов равна  $w_3 = p^3 m c^2 \bar{f}$  и имеет максимум при  $p = \sqrt{3} p_0$ , а соответствующая дифференциальная интенсивность синхротронного излучения электронов  $j = p^4 m c^2 \eta \bar{f}$ .

Можно показать, что для альвеновского ускорения наиболее эффективной является область вблизи  $p = p_0 = \pi/(2\mu n)$ , в которой коэффициент диффузии практически не зависит от  $p$  и спектр турбулентности близок к  $\Phi \sim 1/k^2$ . Действительно, область  $p \gg p_0$  малоэффективна для ускорения, так как в этой области малая концентрация частиц  $n$  и инкремент колебаний не может обеспечить необходимое для ускорения сильное рассеяние [2, 4]. Область  $p \ll p_0$  также малоэффективна для ускорения, так как мала плотность энергии электронов

$$w_3 = \int_0^\infty m c^2 p^3 \bar{f} dp.$$

Как будет показано ниже, именно при  $p \simeq p_0$  инкремент максимален и происходит наиболее эффективное рассеяние, необходимое для альвеновского ускорения частиц. Вывод, сделанный о существовании эффективной области ускорения вблизи  $p \simeq p_0$ , позволяет принять следующие приближенные выражения для плотности энергии электронов  $w_3$  и интенсивности  $J$  синхротронного излучения, хотя формально  $w_3$  и  $J$  расходятся для полученного распределения (17):

$$w_3 = m c^2 \sqrt{3} p_0 n, \quad J = \sqrt{3} \eta p_0 w_3. \quad (20)$$

При записи (20) учли, что  $\bar{w}_3$  максимальна при  $p = \sqrt{3} p_0$ . Заметим, что в области эффективного ускорения  $p \simeq p_0$  коэффициент альвеновской диффузии  $D_A = \eta p_0/2$ , и тогда из (20) следует связь  $w_3$  и  $J$  с  $D_A$ :

$$w_3 = 2\sqrt{3} m c^2 n D_A \eta^{-1}, \quad J = 2\sqrt{3} D_A w_3. \quad (21)$$

Оценка энергии турбулентных пульсаций для альвеновских волн  $\omega^2 = k^2 c_A^2$  в области эффективного ускорения  $p_0$  дает

$$\frac{h^2}{8\pi} = \int \frac{\Phi}{8\pi} dk = \frac{2}{3\pi} \beta B^2 \frac{\rho_3}{\rho} \frac{\omega_B}{\omega} \ln \left( 2 \frac{\omega_B}{\omega} \frac{c_A}{c} \right), \quad \rho_3 = m n. \quad (22)$$

Из (22) следует, что условие квазилинейности  $h^2 \ll B^2$  [5] выполняется при условии

$$\frac{\rho_3}{\rho} \beta \frac{\omega_B}{\omega} \ln \left( 2 \frac{c_A}{c} \frac{\omega_B}{\omega} \right) \ll 1.$$

Сравнение полученного коэффициента альвеновской диффузии в области эффективного ускорения с коэффициентом диффузии при фермиевском ускорении [11] показывает, что при условиях сравнения коэффициентов в [2]  $D_A \sim D_F$ . Сравнение коэффициента  $D_A$  с коэффициентом диффузии при турбулентном ускорении [7] показывает, что при аналогичных условиях  $\frac{D_A}{D_T} \approx \frac{1}{\beta} \frac{\rho}{\rho_3}$ .

### Исследование возможности альвеновского ускорения

Ранее было показано [2], что для эффективного ускорения необходимо выполнение условия

$$\gamma_0(\omega) \gg W, \quad (23)$$

где  $\gamma_0(\omega)$  — инкремент плазменных колебаний частоты  $\omega$  в случае отсутствия рассеяния,  $W$  — частота изменения поля  $B(t)$ . Условие (23) можно рассматривать как условие, налагаемое на минимальную концентрацию, при которой еще возможно ускорение.

Вычисление инкремента  $\gamma_0(\omega)$  резонансных колебаний для волн с дисперсионным уравнением  $\omega^2 = k^2 c_A^2$  и распределением (17) частиц дает

$$\gamma_0 = A_0 n G(x), \quad (24)$$

где

$$G(x) = \frac{x}{1+x^2} \left\{ x^2(1+3x^2) + x(1-3x^2)(1+x^2) \left( \frac{\pi}{2} - \arctg x \right) - \frac{c_A \pi}{\beta c} \right\},$$

$$A_0 = \frac{16\pi e^2 c_A \beta}{m \omega_B}, \quad x = \frac{\omega_B}{k c p_0}.$$

Используя условие резонанса, можно связать переменную  $x$  с безразмерным импульсом  $p$  частицы и эффективной частотой синхротронного излучения:

$$x = \frac{p}{p_0} = \left( \frac{0,2\pi\nu}{0,435\omega_B} \right)^{1/2} \frac{1}{p_0}. \quad (25)$$

Инкремент (24) имеет максимум при  $x = 1$ , т. е. при том значении импульса  $p = p_0$ , который определяет коэффициент диффузии (19) в области эффективного ускорения. Выражение для минимальной концентрации  $n_{\min}$  получим из уравнения  $\gamma_0(n_{\min}, p_{\max}) = W$ ; в результате имеем

$$n_{\min} = \frac{WB}{G(x_{\max}) \cdot 16\pi e c_A \beta}, \quad (26)$$

где  $x_{\max}$  является одним из корней уравнения  $\gamma_0 = W$  [3].

Другое условие возможности ускорения — ограничение на верхнее значение величины магнитного поля — аналогично условию, полученному в [3] (формула (41)).

### Приложение теории к астрофизическим объектам

Возможность применения механизма альвеновского ускорения к Крабовидной туманности и пульсарам обсуждалась в ряде работ [2, 3, 12, 13]. В приложениях к Крабовидной туманности принимаем, что в главном жгуте плотность энергии электронов  $w_e$  равна плотности магнитной энергии  $w_m$  [14]. Отсюда находим, что согласно (21) концентрация быстрых частиц

$$n = \frac{\eta w_m}{2\sqrt{3}mc^2 D_A}, \quad (27)$$

а мощность излучения  $P = JV$  может быть выражена в виде

$$P = 2\sqrt{3}D_A w_m V. \quad (28)$$

Коэффициент диффузии оценим по формуле (28), полагая в ней  $w_m = 3,3 \times 10^{-8}$  эрг/см<sup>3</sup>,  $P = 5 \cdot 10^{37}$  эрг/с [14, 15]. В результате находим  $D_A = 10^{-8}$  с<sup>-1</sup>. Замечаем, что такое же значение для рентгеновского излучения Крабовидной туманности получается по формуле (31) работы [2] при  $h\nu_{эфф} \sim 20$  кэВ. Для концентрации рентгеновских электронов по формуле (27) находим при среднем магнитном поле  $B = 9 \cdot 10^{-4}$  Э величину  $n = 2,5 \cdot 10^{-10}$  см<sup>-3</sup>. Оценка минимальной концентрации дает  $n_{min} = 1,1 \cdot 10^{-11}$  см<sup>-3</sup>. Таким образом, найденная минимальная концентрация  $n_{min}$  находится в области применимости данного типа ускорения ( $n_{min} < n$ ).

В приложении к пульсарам оценим величину среднего магнитного поля в области излучения. Приравняв выражения  $w_e$  и  $w_m$  и используя (19) при  $p \simeq p_0$ , выразим  $B$  через плотность плазмы в виде

$$B^4 = 0,25\sqrt{4\pi\rho} m^4 c^7 W^2 \beta e^{-5}. \quad (29)$$

Положив среднюю концентрацию плазмы  $n = 10^8$  см<sup>-3</sup> и  $\beta \sim 4$  для пульсара NP0532, получим  $B \sim 100$  Э. Оценка верхней границы магнитного поля, при котором возможно альвеновское ускорение, дает для  $T = 0,033$  с и  $\nu_{max} = 2,4 \cdot 10^{18}$  Гц значение  $B \leq 660$  Э. Оценки различных параметров, характеризующих плазму и излучение пульсара NP0532 при  $B = 100$  Э, дают значения  $D_A = 5,6$  с<sup>-1</sup>,  $\eta_{min} = 10^3$  см<sup>-3</sup> и  $V = 8 \cdot 10^{32}$  см<sup>3</sup> при наблюдаемой мощности излучения  $P = 6 \cdot 10^{35}$  эрг/с [16] и предположении равенства плотности энергии электронов  $w_e$  плотности магнитной энергии  $w_m$ .

### Литература

1. Бахарева М. Ф., Ломоносов В. Н., Тверской Б. А. Изв. АН СССР, сер. физ. 34, 2313 (1970).
2. Бахарева М. Ф., Ломоносов В. Н., Тверской Б. А. ЖЭТФ. 59, 2003 (1970).
3. Бахарева М. Ф., Ломоносов В. Н., Тверской Б. А. Астрон. ж. 48, 697 (1971).
4. Альвен Г., Фелтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.
5. Веденов А. А. Сб. Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. 123.
6. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Ядерный синтез. 1, 82 (1961).
7. Тверской Б. А. ЖЭТФ. 53, 1419 (1967).
8. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. ЖЭТФ. 39, 181 (1960).
9. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.

11. *Тверской Б. А.* ЖЭТФ. **52**, 483 (1967).
12. *Melrose D. B.* Astrophys. Space Sci. **4**, 164 (1969).
13. *Гинзбург В. Л., Железняков В. В., Зайцев В. В.* УФН. **98**, 201 (1969).
14. *Шкловский И. С.* Сверхновые звезды. М.: Наука, 1966.
15. *Scargle J. G.* Astron. J. **156**, 401 (1969).
16. *Bradt H., Rappaport S., Mayer W., Nather R. E., Warner B., Macfarlane M., Kristian J.* Nature. **222**, 728 (1969).



# УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ В МЕЖПЛАНЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ\*

## Обзор

### Введение

Во время мощных вспышек 1958–1961 гг. были обнаружены возрастания интенсивности космических лучей малых энергий, отличные от хорошо изученных ранее диффузионных волн. Эти всплески зарегистрированы при стратосферных исследованиях космических лучей [1, 2] и по данным о поглощении космических радиопомех [3]. Наиболее характерная особенность данных явлений — тесная связь с ударными волнами в межпланетной среде. Внемагнитосферные исследования показали, что в области энергий  $\lesssim 1$  МэВ такие всплески сопровождают каждую межпланетную ударную волну [4, 5]. За последние 10 лет зарегистрировано множество таких возрастаний, в том числе и на больших удалениях от Земли.

Первая попытка количественной интерпретации этих явлений предпринята в работе [6] на основе концепции турбулентного ускорения. Было рассмотрено статистическое ускорение на гидромагнитных волнах в нестационарном случае. Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D_v \frac{\partial F}{\partial v}, \quad D_v = \alpha \frac{u_0^2}{\lambda} v. \quad (1)$$

Здесь  $F$  — функция распределения частиц по скоростям  $v$ ;  $D_v$  — коэффициент диффузии в пространстве скоростей,  $\lambda$  — длина свободного пробега,  $u_0$  — скорость гидромагнитных волн,  $\alpha$  — безразмерный множитель, характеризующий спектр и угловое распределение волновых векторов турбулентных пульсаций. В этой же работе дан метод вычисления  $\lambda$  по спектру турбулентности. Оказалось, что при  $\lambda \approx 10^{-2}$  а. е. и  $\alpha \sim 1$  в течение суток формируется типичный спектр частиц, наблюдаемых за ударными волнами:

$$F \sim v^4 e^{-v/v_0}, \quad v_0 \approx 10^8 \text{ см/с}. \quad (2)$$

В конце 70-х гг. XX в. почти одновременно и независимо ряд авторов указали другой эффективный способ ускорения — механизм Ферми первого порядка, действующий вблизи фронта ударной волны [7–9]. Этот механизм приводит к формированию степенных спектров частиц

$$F \sim v^{-\nu}, \quad \nu = \frac{3u_1}{u_1 - u_2}. \quad (3)$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  — скорости плазмы перед и за фронтом ударной волны в системе координат, связанной с волной. В настоящее время имеется ряд превосходных

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 23. № 3. 48 (1983).

обзоров теоретических и экспериментальных исследований процессов ускорения частиц в межпланетной среде [10–13].

В последние годы особый интерес вызывает вопрос о соотношении ударного и турбулентного ускорения в случае, когда невозмущенное магнитное поле образует с фронтом ударной волны не слишком малый угол  $\theta$  ( $\theta > 10^\circ$ ). Это видно, в частности, из содержания двух обзорных докладов на V симпозиуме по солнечно-земной физике (Оттава, 1982) [14, 15]. Ниже попытаемся наметить пути решения данной проблемы.

### Случаи чисто ударного ускорения

Для анализа экспериментальных данных удобно использовать решение, полученное в [16]. Пусть имеется плоская ударная волна с  $\theta > 10^\circ$ , на которой (в системе координат, связанной с фронтом) скорость изменяется от  $u_1 > 0$  при  $x < 0$  до  $u_2 < u_1$  ( $u_2 > 0$ ) при  $x > 0$ . Длина свободного пробега  $\lambda = \lambda(x, v)$ , где  $v$  — скорость частицы, причем за фронтом  $x > 0$  величина

$$q(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\lambda(\xi, 0)} \quad (4)$$

ограничена. Это означает, что амплитуда турбулентности быстро убывает с ростом  $x$  и на луче  $x > 0$  укладывается конечное число длин свободного пробега. В областях 1 ( $x < 0$ ) и 2 ( $x > 0$ ) поведение функции распределения  $F(v, x)$  описывается уравнением

$$u_{1,2} \frac{\partial F_{1,2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\lambda_{1,2} v}{3} \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (5)$$

При  $x \rightarrow \pm\infty$   $F = 0$ , а на фронте ( $x = 0$ ) выполняются граничные условия

$$F_1(v, 0) = F_2(v, 0) \equiv F_0(v), \quad (6)$$

$$(u_1 - u_2) \frac{dF_0}{dv} = \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (7)$$

Функции  $F_1$  и  $F_2$ , удовлетворяющие уравнениям (5) и условию (6), имеют вид:

$$F_1 = F_2(v) \exp \{ (3u_1/v) q(x, v) \} \quad (x < 0), \quad (8)$$

$$F_2 = F_0(v) \frac{1 - \exp \{ (-3u_2/v) q'_2(x, v) \}}{1 - \exp \{ (-3u_2/v) q'_2(0, v) \}} \quad (x > 0), \quad (9)$$

где

$$q'_2 = \int_x^\infty \frac{d\xi}{\lambda_2(\xi, 0)}. \quad (10)$$

Предполагается, что  $q_1 \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

С помощью (8) и (9) из (7) находим  $F_0$ :

$$F_0 = cv^{-\nu} \exp \left\{ -\frac{3u_2}{u_1 - u_2} \int_0^v \frac{dw \exp \{ (3u_2/w) q'_2(0, w) \}}{(1 - \exp \{ (-3u_2/w) q'_2(0, w) \}) w} \right\}, \quad (11)$$

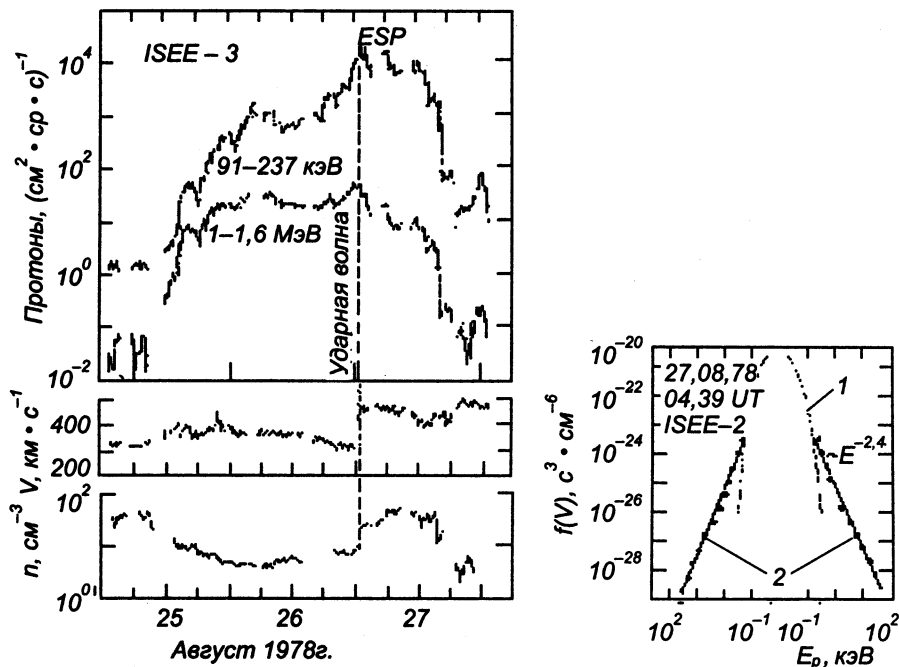


Рис. 1. Возрастание интенсивности протонов в межпланетной среде 25–27. VIII. 1978 г. а) интенсивность потоков протонов с  $E_p = 91\text{--}237$  кэВ и  $1,0\text{--}1,6$  МэВ, вариации плотности и скорости солнечного ветра; б) функция распределения протонов за фронтом ударной волны в системе координат, связанной с солнечным ветром. Кривая 1 — тепловые протоны солнечного ветра ( $2,4 \cdot 10^5$  К); кривая 2 — энергичные штормовые частицы

откуда в области значений

$$v < u_2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{\lambda_2(\xi, 0)} \equiv u_2 q_0(v) \quad (12)$$

функция распределения имеет степенной вид независимо от конкретного вида функции  $q_0(v)$ . В случае когда  $\lambda$  при  $v \rightarrow \infty$  асимптотически перестает зависеть от скорости, при  $v \gg 3u_2 q$

$$F_0 = cv^{-\nu} \exp \left\{ -\frac{v}{(u_1 - u_2)q_0} \right\}. \quad (13)$$

Имеется много примеров возрастных, хорошо согласующихся с данной теорией. Особую ценность представляют эксперименты, в которых функция распределения протонов измерялась в широком диапазоне энергий, начиная от средней тепловой энергии ионов солнечного ветра. На рис. 1 приведены результаты исследования возрастания интенсивности протонов в межпланетной среде 25–27. VIII. 1978 г. [17]. Рис. 1 а иллюстрирует временную зависимость потоков в двух диапазонах энергий, а также скорости и плотности солнечного ветра. На рис. 1 б приведена функция распределения протонов за фронтом ударной волны в системе координат, связанной с солнечным ветром. Видно, при малых энергиях реализуется степенной закон,

причем  $\nu$  весьма точно соответствует формуле (3). Асимптотическое поведение спектра также описывается теорией [16]. Однако необходимо предположить, что длина свободного пробега возрастает в 5 раз при возрастании энергии от 40 кэВ до значений, больших  $\sim 300$  кэВ.

Начальный участок спектра, таким образом, — наиболее фундаментальная характеристика процессов ускорения на ударной волне. Длина свободного пробега при не слишком больших скоростях всегда мала вследствие высокого уровня турбулентности на коротких волнах, формирующей сам скачок. При этом показатель спектра не зависит от длины свободного пробега.

Данный вывод сохраняет силу и при наличии адиабатических изменений энергии за фронтом, если скорость  $u_2$  и плотность  $n_2$  зависят от координаты  $x$ . В этом случае функция распределения  $F_2$  удовлетворяет уравнению [18]:

$$u_2(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{du_2(x)}{dx} v \frac{\partial F_2}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\lambda_2 v}{3} \frac{\partial F_2}{\partial x}. \quad (14)$$

Если можно пренебречь диффузией, то

$$F_2(v, x) = F_0 \left\{ v \left[ \frac{u_2(x)}{u_2(0)} \right]^{1/3} \right\}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и считая, что  $F_0 \sim v^{-\nu}$ , легко получить следующий критерий малости диффузионного члена:

$$v \ll \left| \frac{9}{\nu} u_2^2 \left( \lambda \frac{du_2}{dx} \right)^{-1} \right|. \quad (16)$$

При характерных параметрах межпланетных ударных волн критерий (16) выполняется как минимум для энергий в несколько десятков кэВ. В случае когда ускорение на фронте ударной волны проявляется в чистом виде, степенной закон (3) остается неизменным на больших расстояниях за фронтом.

Таким образом, наличие в широкой области за фронтом степенного участка спектра (3) при малых энергиях можно считать основным критерием проявления ускорения на фронте ударной волны в чистом виде.

### Роль турбулентного ускорения

В отличие от ускорения на фронте ударной волны турбулентное ускорение распространено в широкой области за фронтом. Поэтому его проявление следует искать прежде всего в эволюции спектра за фронтом. Кроме того, возможно изменение величины показателя спектра при малых  $v$ . Расчеты [19], выполненные для случая не зависящего от скорости коэффициента диффузии вдоль магнитного поля, подтверждают этот вывод. Такой вид коэффициента диффузии характерен для ультрарелятивистских частиц. В случае межпланетного ускорения более типичен случай, когда постоянна длина свободного пробега.

Из предыдущего ясно, что степенный участок спектра формируется вблизи фронта и вдали от области, где длина свободного пробега резко возрастает. Поэтому рассмотрим задачу о совместном действии ускорения на фронте и в турбулентной области за фронтом в случае  $q_2 \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Скорости  $u_1$  и  $u_2$  считаем

постоянными. Предполагается, что перед фронтом ускорение отсутствует. Тогда здесь по-прежнему:

$$u_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\lambda_1 v}{3} \frac{\partial F_1}{\partial x}. \quad (17)$$

За фронтом

$$u_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\lambda_2 v}{3} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\alpha u_0^2}{\lambda_2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^3 \frac{\partial F_2}{\partial v}. \quad (18)$$

Граничные условия на фронте (6), (7) остаются прежними. Далеко перед фронтом ( $x \rightarrow -\infty$ ) по-прежнему требуем обращения  $F_1$  в нуль. При  $x \rightarrow +\infty$  требуем ограниченности  $F_2$ . Напомним, что мы рассматриваем низкоэнергичный участок спектра, предполагая, что при  $v \rightarrow \infty$  имеется какой-то механизм обрезания, связанный с конечными размерами области ускорения. Считаем для простоты, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не зависят от  $x$  (в противном случае можно вновь ввести переменную  $q$ ). В данной постановке решение  $F_1$  перед фронтом сохраняет прежний вид, а за фронтом должно быть автомодельным, поскольку уравнения и граничные условия не содержат никакой константы с размерностью длины, кроме длины свободного пробега  $\lambda$ , которая считается малой. Общее автомодельное решение можно искать в виде

$$F_2 = F(\xi) x^{-\nu}, \quad \text{где} \quad \xi = \frac{v\lambda}{\sqrt{3\alpha}u_0 x}. \quad (19)$$

При этом (18) сводится к виду

$$\xi(1 + \xi^2)F'' + [2(\nu + 1)\xi^2 + \gamma\xi + 3]F' + [\nu(\nu + 1)\xi + \nu\gamma]F = 0, \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{u_2}{u_0} \sqrt{\frac{3}{\alpha}}. \quad (21)$$

Если, как часто бывает, невозмущенный солнечный ветер разбит на волокна с резкими границами, и в соседних волокнах различны плотности, то за фронтом волны возникнет звуковая турбулентность со спектром по волновым числам  $k$  вида  $k^{-2}$ . При этом [6]  $\lambda$  не зависит от  $v$ , а параметр  $\alpha$  будет  $\sim 1-3$ . Скорость звука за фронтом  $u_0 \approx \sqrt{5}u_2$ . Параметр  $\gamma$  в данном случае меньше единицы и соответствующие члены в (20) начинают играть роль лишь при  $\xi \ll \nu^{-1}$ .

Однако, если по каким-либо причинам, речь о которых пойдет ниже,  $\alpha \rightarrow 0$ , то параметр  $\gamma$  может быть большим. Чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны получить решение при  $x \rightarrow 0$ , т. е. при больших  $\xi$

$$F = \xi^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\xi^n}.$$

Для коэффициентов  $a_n$  получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$[(n + \nu - 1)(n + \nu) - 3]a_{n-1} - \gamma n a_n + [(\nu + n + 1)(\nu + n + 2) + \nu(\nu + 1) - 2(\nu + 1)(\nu + n + 1)]a_{n+1} = 0. \quad (22)$$

Решение, не содержащее положительных степеней  $\xi$ , соответствует условиям  $a_0 = 1$ ,  $n \geq 1$ . При  $\gamma \gg 1$  и низких степенях  $n$  в (22) можно опустить последний член и получить асимптотическое разложение

$$a_n = \frac{(n + \nu - 1)(n + \nu) - 3}{n\gamma} a_{n-1}. \quad (23)$$

Необходимое условие (при  $n = 1$ ) имеет вид:

$$\gamma \gg \nu(\nu - 2). \quad (24)$$

Оно эквивалентно критерию отсутствия дополнительного турбулентного ускорения за фронтом: с точностью до членов  $\sim \nu(\nu + 2)/\gamma$  функция  $F_2$  совпадает с полученным выше результатом. Поскольку при чистом ускорении на ударной волне  $\nu \geq 4$ , параметр  $\gamma$  должен быть очень большим ( $\gamma \gg 10$ ).

Вернемся к противоположному случаю  $\gamma \leq 1$ . Как отмечалось, при этом в (20) можно пренебречь членами с  $\gamma$  даже при  $\xi < 1$ . Уравнение

$$\xi(1 + \xi^2)F'' + [2(\nu + 1)\xi^2 + 3]F' + \nu(\nu + 1)\xi F = 0$$

имеет решение вида

$$F = \left\{ A \cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}; \frac{3-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1+\xi^2}\right) + \right. \\ \left. + B \cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}; \frac{4-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+\xi^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right\} (1 + \xi^2)^{-\nu/2}, \quad (25)$$

где  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция Гаусса:

$${}_2F_1(a, b, c, \xi) = 1 + \frac{ab\xi}{c1!} + \dots$$

При произвольных  $A$  и  $B$  решение (25) быстро расходится в нуле (как  $\xi^2$ ). Поэтому должно выполняться определенное соотношение между коэффициентами:

$$F = A^*(1 + \xi^2)^{-\nu/2} \left\{ {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}; \frac{3-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1+\xi^2}\right) - 2\frac{\nu-2}{\nu-1} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma^2[(\nu+1)/2]}{\Gamma^2(\nu/2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi\nu}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}; \frac{4-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+\xi^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right\}. \quad (26)$$

Выражение (26) можно упростить:

$$F = A^*(1 + \xi^2)^{-\nu/2} {}_2F_1\left(\nu; 3-\nu; 3; \frac{\sqrt{1+\xi^2}-1}{2\sqrt{1+\xi^2}}\right). \quad (27)$$

Формулы (26), (27) были получены Гауссом [20, 9.136].

Вблизи начала координат  $\xi \rightarrow \infty$  и решение (19) с помощью (26) можно представить в виде

$$F_2 x \rightarrow 0 = cv^{-\nu} \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{3\alpha} u_0 x}{\lambda_2 v} \frac{\nu-2}{\nu-1} \frac{\Gamma^2[(\nu+1)/2]}{\Gamma^2(\nu/2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi\nu}{2} \right\}. \quad (28)$$

Функция  $F_0(v)$  зависит от  $v$  (при  $x \rightarrow 0$ ) по-прежнему по степенному закону, однако показатель  $\nu$  определяется более сложным уравнением. Из граничного условия (7) и из (28) получаем:

$$\nu = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{3\alpha} u_0}{3} \frac{\nu-2}{u_1} \frac{\Gamma^2(\nu+1/2)}{\Gamma^2(\nu/2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi\nu}{2} \right\}, \quad \nu_0 = \frac{3u_1}{u_1 - u_2}. \quad (29)$$

Анализ показывает, что  $\nu \leq 4$ , в противном случае функция распределения  $F_2$  станет знакопеременной. Все возможные значения  $\nu < 4$ , удовлетворяющие (29), заключены в узкой области вблизи  $\nu = 3,5$ . Поэтому если турбулентное ускорение существенно ( $\alpha \sim 1$ ), показатель степени функции распределения при малых  $\nu$  вблизи фронта будет меньше 4 и близок к 3,5. Соответствующая зависимость дифференциального спектра интенсивности  $I$  от энергии будет:

$$\frac{dI}{dE} \sim E^{-0,75}. \quad (30)$$

В случае ударных волн малой и умеренной амплитуды ( $\nu_0 > 5$ ) турбулентное ускорение играет определяющую роль в формировании истинного показателя  $\nu$ .

Нам пока неизвестны экспериментальные данные при малых энергиях со спектрами такого вида. Однако о наличии турбулентного ускорения за фронтом можно судить на основании другого критерия — эволюции спектра за фронтом. Характер такой эволюции соответствует полученной из полукачественных соображений в [21] картине (рис. 2). Как отмечалось выше, при ускорении на фронте в чистом виде такая эволюция отсутствует.

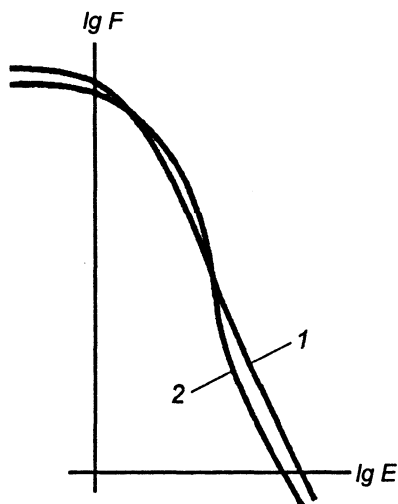


Рис. 2. Эволюция спектра энергичных частиц за фронтом ударной волны при наличии турбулентного ускорения. Спектр 1 соответствует области вблизи фронта; спектр 2 — некоторому конечному расстоянию от фронта

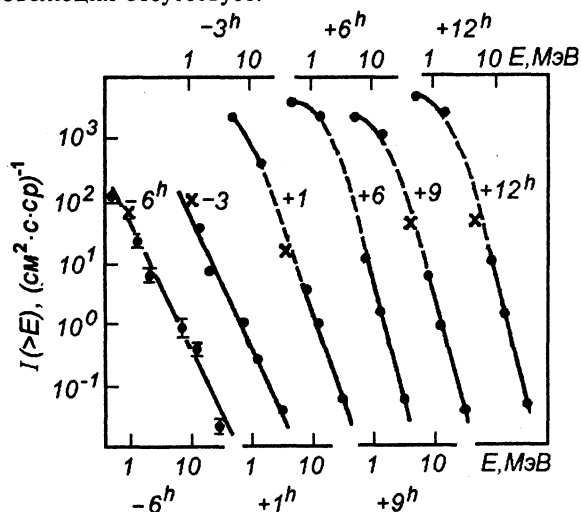


Рис. 3. Эволюция спектра энергичных частиц во время возрастания 3.1.1978 г. Точки — данные ИСЗ «Прогноз-6», крестики — данные IMP = H, I. Цифры у кривых показывают сдвиг времени наблюдения (в часах) относительно момента прихода ударной волны

На рис. 3 приведены данные [22] об эволюции жесткого участка спектра ускоренных протонов во время явления 3.1.1978 г. Отчетливо видна эволюция спектра за фронтом, типичная для турбулентного ускорения — общий рост интенсивности частиц высоких энергий и формирование более плоского участка при наименьших измеряемых энергиях. В [22] показано, что за фронтом резко усилился уровень гидромагнитных колебаний. Указанная эволюция спектра происходила на фоне резкого спада плотности солнечного ветра. По-видимому, турбулентное ускорение компенсировало также заметное адиабатическое охлаждение частиц.

Таким образом, критериями наличия турбулентного ускорения за фронтом являются более низкие значения показателя спектра при малых энергиях и эволюция спектра за фронтом ударной волны. Имеется ряд случаев, когда такая эволюция отчетливо видна. Однако большинство ( $\sim 70\%$ ) случаев изученных до сих пор возрастных соответствует чистому ускорению на фронте. При этом за фронтом тоже регистрируется высокий уровень турбулентности, достаточный, казалось бы, для заметного турбулентного ускорения. Попытаемся понять этот парадокс.

### Условия отсутствия турбулентного ускорения

Итак, нам требуется получить спектр гидромагнитных волн, который давал бы эффективное рассеяние протонов, но не приводил бы к ускорению. Такая ситуация могла бы иметь место в случае, когда волны распространяются в одном направлении с одинаковой скоростью. При этом можно выбрать такую систему координат, в которой исчезнут флуктуации электрического поля и, следовательно, флуктуации энергии частиц.

Как известно, довольно часто солнечный ветер бывает весьма однородным в малых масштабах. При этом протоны с  $E = 1$  МэВ от солнечных вспышек распространяются в межпланетной среде без рассеяния на расстояние в несколько астрономических единиц. Если ударная волна распространяется по такой спокойной среде, то турбулентность может возникнуть за счет неустойчивостей, сопровождающих процесс ускорения. В этом случае имеется явная тенденция к возникновению волн, бегущих в одном направлении. Теория такого самосогласованного процесса развита в работе [23]. Хотя конечной целью этой работы было построение теории ускорения на головной ударной волне перед магнитосферой, исходные идеи [23] хорошо применимы и в случае ускорения на ударной волне в межпланетной среде.

Одним из исходных элементов теории [23] является тот факт, что ударная волна излучает в невозмущенную среду ускоренные частицы. Вплоть до некоторого расстояния эти частицы сохраняют заметную направленную скорость вдоль магнитного поля, а затем постепенно изотропизируются относительно частиц солнечного ветра и начинают в среднем двигаться вновь к ударной волне. Таким образом, перед фронтом возникает протяженная область с анизотропной вдоль поля температурой энергичных частиц:  $T_{\parallel} > T_{\perp}$ . За фронтом распределение существенно изотропно.

Перед фронтом плазма неустойчива относительно раскачки альвеновских волн с круговой поляризацией, за фронтом эти волны поглощаются. В системе координат, связанной с фронтом, инкремент (декремент)  $\sigma$  является функцией  $x$ . Энергия волны  $W$  изменяется по закону

$$\frac{dW}{dx} = \frac{2W\sigma(x)}{|V_s + u_0|}, \quad (31)$$

где  $V_s$  и  $u_0$  — скорости ударной альвеновской волны относительно солнечного ветра. Видно, что наибольшее усиление будет достигнуто для волн, бегущих по солнечному ветру в направлении от ударной волны, когда величина  $|V_s + u_0|$  минимальна. Из (31) следует, что если энергия этих волн возрастает в  $A$  раз, то энергия волн, бегущих в противоположном направлении, будет

$$A' = A^{(V-u_0)/(V+u_1)}.$$

Так, если  $A = 1000$ ,  $V_s = 300$  км/с,  $u_0 = 100$  км/с, то  $A'$  будет в 30 раз меньше.



Итак, можно сделать следующие основные выводы.

1. Ускорение частиц на фронте ударной волны проявляется в чистом виде, если ударная волна распространяется по однородному (в масштабах  $< 10^{11}$  см) солнечному ветру.
2. Критерием такого ускорения является степенная зависимость функции распределения

$$F \sim v^{-\nu}, \quad \nu = \frac{3u_1}{u_1 - u_2}$$

в области малых энергий и сохранение этой зависимости на значительных расстояниях за фронтом.

3. Наличие дополнительного турбулентного ускорения за фронтом проявляется в уменьшении  $\nu$  до величины  $\sim 3,5$  в области малых энергий и в эволюции спектра за фронтом.

### Литература

1. Чарахчян А. Н., Тулинов В. Ф., Чарахчян Т. Н. ЖЭТФ. **38**, 1031 (1960).
2. Ney E. R., Stein W. A. J. Geophys. Res. **67**, 2087 (1962).
3. Axford W. I., Reid G. C. J. Geophys. Res. **67**, 1692 (1962).
4. Briant D. A., Cline T. L., Desai O. D., McDonald F. B. Astrophys. J. **141**, 478 (1965).
5. Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В. и др. ДАН СССР. **171**, 847 (1966).
6. Тверской Б. А. ЖЭТФ. **53**, 1417 (1967).
7. Крымский Г. Ф. ДАН СССР. **234**, 1306 (1977).
8. Axford W. I., Leer E., Scadron G. EOS. **57**, 780 (1976).
9. Blandford R. D., Ostriker J. P. Astrophys. J. **49**, 227 (1978).
10. Morfill G. E., Scholer M. Astrophys. Space Sci. **64**, 73 (1977).
11. Топтыгин И. Н. Space Sci. Rev. **26**, 157 (1980).
12. Axford W. I. Study of travelling interplanetary phenomena (Reidel Publ. Co., 1977). 145.
13. Axford W. I. Preprint МРАЕ-W-100-81-3. Max Plank Institut für Aeronomie, (1981).
14. Gosling I. T. Space Sci. Rev. **35**, 297 (1983).
15. Quenby I. I. Space Sci. Rev. **36**, 28 (1983).
16. Forman M. A. Adv. Space Res. **1**, 92 (1981).
17. Gosling I. T., Osbridge I. R., Bame S. I. et al. J. Geophys. Res. **86**, 547 (1981).
18. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. ЖЭТФ. **51**, 1771 (1966).
19. Webb G. M. Preprint МРАЕ-W-100-81-3. Max Plank Institut für Aeronomie, (1981).
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
21. Тверской Б. А. Тр. X Ленингр. семинара. Л.: ЛФТИ, 1978. 197.
22. Richter A. K., Verigin M. I., Kurt V. G. et al. Paper presented at the Workshop on Acceleration of Particles by Shock Waves, October 7-9, 1980, preprint Max Plank Institut für Aeronomie, Lindau, BRD.
23. Lee M. A. Coupled Hydromagnetic Wave Excitation and Ion Acceleration Upstream of the Earth Bow shock. Preprint University of New Hampshire, 1981.

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭНЕРГИЧНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГЕЛИОСФЕРЕ\*

## Аннотация

Несколько лет тому назад анизотропная диффузия и конвективный перенос совместно с адиабатическим замедлением рассматривались как имеющие принципиальное значение при распространении космических лучей. Частицы относительно малых энергий ( $\sim 1$  МэВ) могут распространяться вдоль силовых линий магнитного поля без расселения на расстояние нескольких астрономических единиц в спокойной гелиосфере. Теория, описывающая 11-летнюю вариацию интенсивности галактических космических лучей и распространение солнечных космических лучей, была построена на этой основе. Однако, аномалии 11-летней вариации интенсивности галактических космических лучей в 1969–1971 годах привели к необходимости принять во внимание влияние общего электромагнитного поля гелиосферы, вызывающего быстрый магнитный дрейф частиц. Дрейф частиц от магнитной оси к плоскости эклиптики (в цикле 1969–1980 гг.) или в противоположном направлении зависит от знака общего магнитного поля Солнца. Нейтральный слой, вдоль которого скорость дрейфа сравнима со скоростью частицы, имеет большое значение. Однако, в присутствии секторной структуры, время распространения частицы вдоль нейтрального слоя от границы области модуляции до земной орбиты существенно возрастает. Следовательно, при этом возможно заметное адиабатическое замедление. Временная задержка, наблюдаемая на фазе восстановления интенсивности протонов при различных энергиях, может быть объяснена с помощью текущей фазы межпланетного поля, следующей за изменением полярности.

## Введение

Изучение вариаций интенсивности галактических космических лучей и возрастных изменений интенсивности энергичных солнечных частиц является эффективным способом исследования космического пространства. Как известно, учет этих явлений был одним из принципиальных положений паркеровской концепции солнечного ветра. Согласно схеме, предложенной Паркером, энергичные частицы сильно рассеиваются на неоднородностях магнитного поля. Так как эти неоднородности движутся вместе с солнечным ветром, то возникает конвективный перенос галактических частиц и, следовательно, концентрация космических лучей убывает во внутренних областях гелиосферы. Диффузия вследствие градиента концентрации приводит к состоянию равновесия. Как показал Паркер [1], коэффициент диффузии может быть прямо определен из теории распространения солнечных космических лучей. Дальнейшее развитие этих идей было проведено Долгиновым и Топтыгиным [2]. Паркер [3]

---

\* *Tverskoy B. A. Adv. Space Res. Vol. 1, 5–14, 1981. Заказной доклад на сессии КОСПАР, Будапешт, Венгрия, 1980. Здесь публикуется в обратном переводе с английского.*

включает рассмотрение действия механизма Ферми первого рода. В расширяющемся солнечном ветре магнитные неоднородности движутся в направлении друг от друга. Следовательно, имеет место потеря энергии частиц в каждом столкновении и адиабатическое замедление. С другой стороны в случае сжатия плазмы части ускоряются. Как показано Крымским [4], при наличии диффузии этот эффект является эффективным механизмом для ускорения энергичных частиц вблизи фронта ударной волны.

В вышеупомянутых работах рассматривалось сильно хаотичное магнитное поле, в котором диффузия изотропна. Как показали спутниковые эксперименты, реальное магнитное поле имеет большую регулярную компоненту и налагаемые на нее возмущения с широким спектром частот. При этих условиях рассеяние преимущественно обусловлено резонансным взаимодействием между частицами и волнами, длина которых близка к ларморовскому радиусу. Средняя длина свободного пробега частиц космических лучей в солнечном ветре велика по сравнению с ларморовским радиусом и, следовательно, диффузия является сильно анизотропной. Коэффициент диффузии вдоль поля значительно больше, чем в перпендикулярном направлении. Рассмотрение этих проблем [5] позволило сделать вывод, что частицы вплоть до нескольких МэВ могут подвергаться эффективному турбулентному ускорению в межпланетной среде. Одним из важных выводов этой теории является то, что энергия зависит от средней длины пробега. Часто бывает, что достаточно короткие волны отсутствуют. Тогда высокоэнергичные частицы будут эффективно рассеиваться, в то время как низко энергичные космические лучи будут распространяться на большие расстояния без рассеяния вдоль силовых линий.

Сильно анизотропные потоки солнечных космических лучей с энергиями  $\sim 1$  МэВ наблюдались Верновым и др. [6]. Уравнение, описывающее динамику распространения энергичных частиц в движущейся слабо турбулентной плазме, есть:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla f - \frac{1}{3} p \operatorname{div} \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \kappa_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} D_p p^2 \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (1)$$

Здесь  $f = f(\mathbf{r}, p, t)$  — функция распределения,  $p$  — импульс частицы,  $\mathbf{u}$  — скорость рассеивающей среды,  $\kappa_{ik}$  — тензор пространственной диффузии и  $D_p$  — коэффициент диффузии в импульсном пространстве. Третий член в левой части уравнения (1) описывает адиабатические изменения, значение остальных членов очевидно. При получении уравнения (1) предположено, что средняя длина пробега мала по сравнению с характерным размером системы и что функция распределения близка к изотропной. В определенных случаях некоторыми из членов можно пренебречь. Например, последний член в правой части (1), описывающий статическое ускорение, важен только когда рассматривается ускорение в межпланетной среде.

### Эффекты дрейфа

Уравнение (1) служит теоретической основой для многих явлений: 11-летней вариации космических лучей, Форбуш-понижений, распространения быстрых частиц от вспышек, ускорения в межпланетной среде и т. д. Теоретические вычисления хорошо описывают экспериментальные наблюдения вплоть до 1969 года, т. е. года изменения полярности магнитного поля Солнца. Полученные позже данные противоречат привычной схеме.

Рассмотрим, например, вариацию интенсивности космических лучей с энергиями  $> 0,5$  ГэВ и  $\approx 3$  ГэВ, соответственно. Рис. 1. изображает относительные изменения

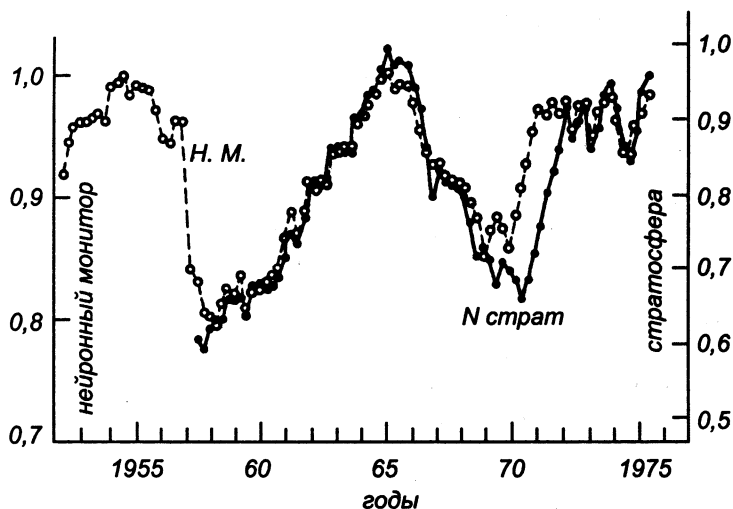


Рис. 1. Аномалия в вариациях интенсивности космических лучей с различными энергиями в 1969–1971 гг. [7]

интенсивностей, полученные Верновым и др. [7] по данным нейтронных мониторов в полярных областях (прерывистая линия) и по данным стратосферных измерений (сплошная линия). Шкалы выбраны так, что кривые совпадают в малый начальный период в 1959 году. Вплоть до 1959 года вариации обеих компонент были синхронными. Однако, после максимума солнечной активности в 1969 году, жесткая компонента восстановилась годом раньше, чем мягкая компонента.

Эти результаты и ряд других аномалий, наблюдавшихся в 1969–1971 гг., привели к необходимости включить также эффекты межпланетного электромагнитного поля. В конце семидесятых годов появился ряд работ, в которых принимался во внимание магнитный дрейф [8–18]. Чтобы включить магнитный дрейф оказывается достаточным добавить скорость дрейфа к скорости солнечного ветра в конвективном члене:

$$V_D = \frac{c p v}{3q} \frac{[H \nabla H^2] + H^2 \operatorname{rot} H}{H^4} = \frac{c p v}{3q} \operatorname{rot} \frac{H}{H^2}, \quad (2)$$

где  $v$  — скорость частицы,  $q$  — электрический заряд,  $H$  — вектор межпланетного магнитного поля. Скорость дрейфа  $V_D$  в уравнении (2) получена усреднением общего выражения для скорости магнитного дрейфа по изотропному угловому распределению. Дивергенция  $V_D$  всегда равна нулю.

Разность электрического потенциала в несколько сот мегавольт возникает между солнечной осью и экватором вследствие вращения Солнца. Скорость магнитного дрейфа всегда направлена в соответствии с электрическим полем, так что частицы теряют энергию. Однако, электрическое поле не входит в уравнение в его точной форме. Изменение энергии частиц вследствие электрического поля, как можно показать, в точности равно адиабатическому замедлению из-за дивергенции скорости электрического дрейфа. Эта скорость  $u_{\perp}$  входит как компонента скорости солнечного ветра, перпендикулярная магнитному полю.

В стационарном осесимметричном случае магнитное поле имеет форму:

$$H_r = \frac{H_0(\theta)}{r^2}, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = -\frac{H_0(\theta)}{r} \sin \theta \quad (3)$$

( $\theta$  — полярный угол от оси Солнца,  $\varphi$  — гелиодолгота),  $r = R/R_0$  — безразмерная переменная, где  $R_0 = u/\Omega$  — расстояние, на котором  $|H_r| = |H_\varphi|$ ,  $H_0(\theta)$  — радиальная компонента магнитного поля при  $R = R_0$ ,  $\Omega$  — угловая скорость солнечного вращения.

Используя выражение (3), можно записать  $r$  и  $\theta$  компоненты вектора  $V_D$  в виде:

$$V_{D,r} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_{D,\theta} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (4)$$

где

$$\psi = \frac{cpv}{3q} \frac{RH_\varphi \sin \theta}{H^2} \quad (5)$$

является постоянной на дрейфовых траекториях.

На рис. 2 представлены эти траектории для случая  $|H_0(\theta)| = \text{const}$ . В зависимости от знака  $H_0$  частицы дрейфуют либо от солнечной оси к плоскости эклиптики (в цикле 1969–1980 гг.), либо в противоположном направлении (в цикле 1958–1969 гг.). Характеристическое время дрейфа от границы гелиосферы к орбите Земли равно  $\sim 1$  месяцу.

Скорость дрейфа испытывает разрыв на нейтральном слое. Если толщина этого слоя меньше, чем ларморовский радиус частиц космических лучей, то скорость дрейфа вдоль слоя равна  $v/3$  и на больших расстояниях направлена перпендикулярно к Архимедовой спирали (по направлению к Солнцу в 1958–1969 гг. и против Солнца в 1969–1980 гг.) [19]. Ширина слоя быстрого дрейфа обратно пропорциональна силе поля и возрастает пропорционально  $R$  на больших расстояниях от Солнца. Можно показать, что уравнение неразрывности соблюдается для дрейфового движения здесь [17].

При энергиях  $\geq 500$  МэВ скорость дрейфа превышает скорость солнечного ветра. При этом, следовательно, имеет место быстрое распространение внутрь гелиосферы. Становится ясным, что наше первое представление о механизме 11-летней вариации требует пересмотра.

Джокипи и Коприва [17] получили численное решение уравнения

$$(u + V_D) \nabla f - \frac{2u}{3} \frac{p}{R} \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \kappa_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (6)$$

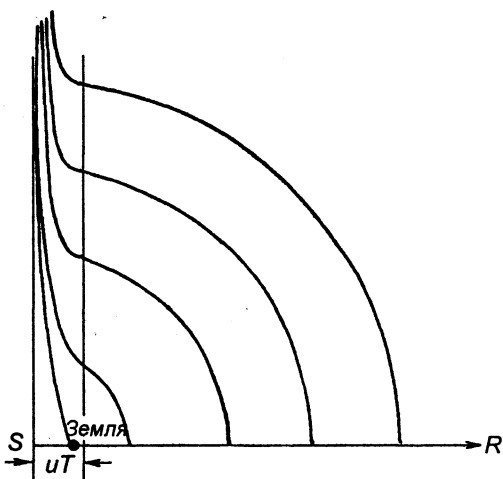


Рис. 2. Дрейфовые траектории энергичных частиц в гелиосфере. Частицы дрейфуют от солнечной оси к плоскости эклиптики, если  $H_r > 0$  в северной полусфере, и в противоположном направлении, если  $H_r < 0$

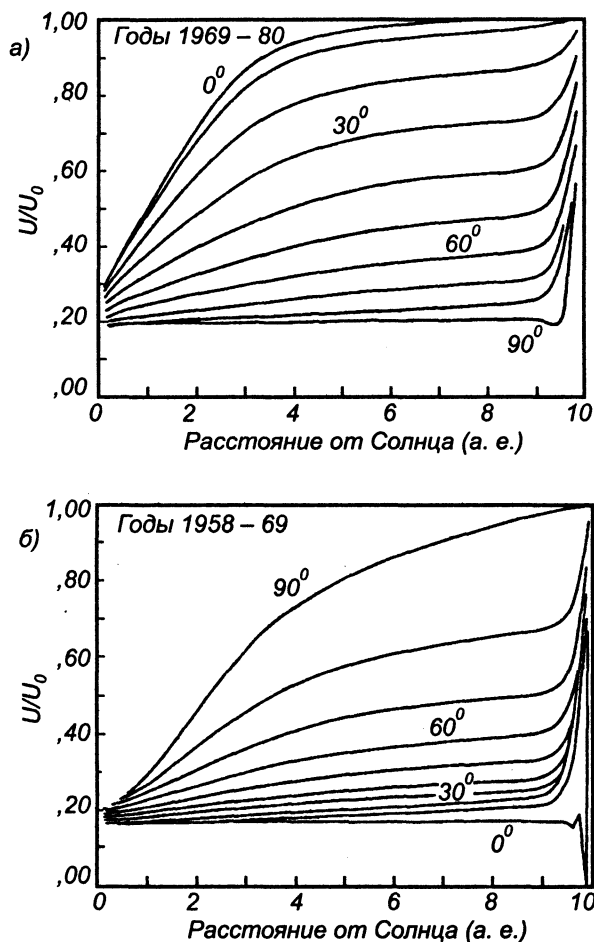


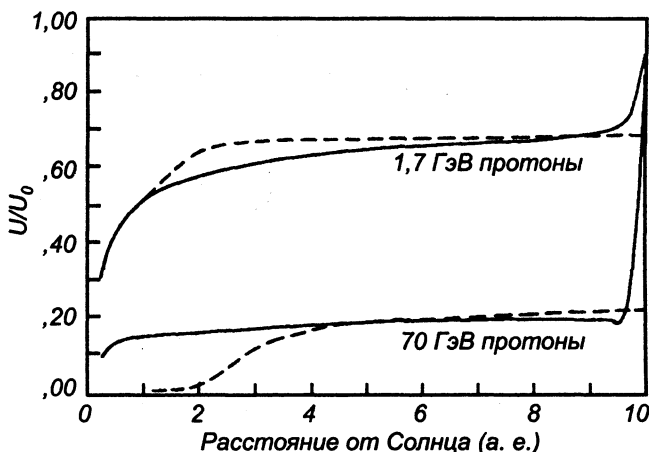
Рис. 3. Пространственное распределение протонов с энергией 70 МэВ в 1969–1980 гг. (а) и в 1958–1969 гг. (б) [17]

с заданным значением  $f = f_0(p)$  на границе области модуляции. Граничные условия для  $\theta$  имеют форму

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, \pi} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{k_{\perp}}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2} = - \frac{c p v H_{\varphi}}{3 q H^2} \left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{\theta=\pi/2}. \quad (8)$$

Условие, выраженное уравнением (8), следует из уравнения непрерывности вблизи нейтрального слоя. Рис. 3 а и 3 б представляют дифференциальные интенсивности протонов с энергией 70 МэВ, полученные с помощью этих вычислений для текущего (рис. 3 а) и предыдущего (рис. 3 б) солнечных циклов. При значениях, выбранных для коэффициента диффузии (т. е.  $K_{\parallel} = 5 \cdot 10^{21} \sqrt{r} \beta \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $K_{\perp} = 0,1 K_{\parallel}$ ), дрейф



**Рис. 4.** Радиальное распределение плотности протонов с энергиями 70 МэВ и 1,7 ГэВ в плоскости эклиптики с учетом диффузии (сплошная линия) и без учета диффузии (прерывистая линия) [17]

и адиабатическое охлаждение становятся преобладающими, даже при малом размере области модуляции. Если диффузионным членом пренебречь, то соответствующее решение подобно точному решению (рис. 4).

Радиальный градиент плотности положительно заряженных частиц оказывается меньше в текущем цикле, чем в предыдущем цикле в согласии с экспериментальными данными. В то время как протоны и ядра удаляются от экватора, их интенсивности убывают в 1958–1969 гг. и, наоборот, возрастают в 1969–1980 гг. В то же время для отрицательно заряженных частиц изменения радиального и широтного градиентов находятся в противофазе (по сравнению с протонами и ядрами). Крайнев [9] трактует аналогичную проблему с учетом коэффициента диффузии, быстро возрастающего с ростом расстояния от Солнца ( $\sim (1 + r^3)$ ). Вместо условия (8), он полагает  $\partial f / \partial \theta|_{\theta=\pi/2} = 0$ . Как видно из результатов [17], такое упрощение оправдывается для условий текущего цикла, когда радиальный градиент мал. Однако, такое приближение является грубым для предыдущего цикла. Этим можно объяснить тот факт, что широтный градиент, как было получено Кайневым [9], не изменяет знак при изменении полярности общего магнитного поля Солнца.

### Включение волнистого нейтрального слоя

Теперь рассмотрим более тщательно движение частицы вдоль нейтрального слоя. Как уже отмечалось, скорость ее дрейфа велика ( $v/3$ ). Вот почему время дрейфа частицы от границы гелиосферы к земной орбите мало и адиабатическое охлаждение незначительно, если нейтральный слой совпадает с плоскостью гелиографического экватора. Однако, в действительности существует секторная структура. В этом случае нейтральный слой изогнут подобно резбе граммофонной пластинки. Амплитуда осцилляции возрастает линейно с расстоянием от Солнца. Схематический вид меридиального сечения нейтрального слоя дан на рис. 5. В результате путь частицы вдоль слоя становится длиннее и адиабатическое замедление возрастает.

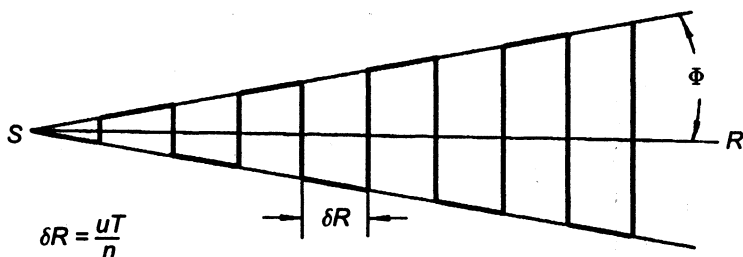


Рис. 5. Меридиональное сечение нейтрального слоя в присутствии секторной структуры

Легко показать, что в случае, представленном на рис. 5, путь частицы вдоль нейтрального слоя есть

$$S \approx \frac{R^2 n}{uT} \operatorname{tg} \Phi. \quad (9)$$

Здесь  $n$  — число секторов,  $T$  — период солнечного вращения,  $\Phi$  — граничная широта секторной структуры. Рассмотрим случай движения, направленного к Солнцу (в цикле 1958–1969 гг.). При этом из уравнения (9) и

$$\dot{S} = \frac{v}{3}, \quad \dot{p} = -\frac{2u}{3R} p \quad (10)$$

следует, что в релятивистском случае ( $v = c$ )

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{2n \operatorname{tg} \Phi}{cT} (R_i - R_0) \right\}, \quad (11)$$

где  $p_0$  — импульс при  $R = R_i$  ( $R \leq R_i$ ).

Величина  $R_i$ , при которой интенсивность частицы принимает свое немодулированное значение, не зависит от энергии, если гелиосфера велика ( $\sim 10^2$  а. е.). Если диаметр ларморовского вращения превышает радиальную ширину сектора  $uT/n$ , частицы могут распространяться до соответствующего расстояния радиально, а не вдоль нейтрального слоя. В этом случае имеет место очень быстрая радиальная диффузия. Следовательно, в релятивистском случае

$$R_i \approx \frac{uTcH_0}{2n\epsilon} R_0$$

( $\epsilon$  — энергия частицы). Так как при  $\epsilon \gg mc^2$  форма функции распределения есть  $f \sim \epsilon^{-5}$ , амплитуда модуляции  $A(\epsilon)$  при малых  $R$  такова:

$$A(\epsilon) = \exp \left\{ -\frac{5\epsilon H_0 R_0 u}{\epsilon} \operatorname{tg} \Phi \right\}. \quad (12)$$

Положим, что  $n = 4$ ;  $\epsilon = 1,5$  ГэВ, 3 ГэВ и 10 ГэВ, величина  $R_i$  равна 85, 43 и 14 а. е., соответственно. ( $R_0 = 1$  а. е.,  $H_0 = 4\gamma$ ,  $u = 4 \cdot 10^7$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ ,  $n = 4$ ). Соответствующие вариации равны 14 %, 7 % и 3 %, если значение  $\Phi$  изменяется от  $20^\circ$  до  $30^\circ$ .



Это рассмотрение позволяет нам дать возможное объяснение наблюдаемого запаздывания восстановления интенсивности частиц с энергиями  $> 0,5$  ГэВ по сравнению с более энергичной компонентой в 1969–1971 гг. (рис. 1). В течение цикла 1958–1969 поток частиц вдоль нейтрального слоя был направлен внутрь гелиосферы. После переполюсовки солнечного магнитного поля некоторое время в гелиосфере существует переходная область. Внутри сферы радиуса  $R = ut$  появляется новое поле, в котором частицы дрейфуют от солнечной оси к плоскости эклиптики. Вне этой сферы еще существует старое поле с частицами, движущимися вдоль нейтрального слоя к Солнцу. На границе сферы  $R = ut$  долготная компонента поля изменяет знак и может возникнуть быстрый дрейф к полярной оси. Интенсивность частиц с энергией  $\epsilon$  возрастает до тех пор, пока эта сфера не достигнет радиуса  $R_i(\epsilon)$ , где она переходит в плато. Запаздывание восстановления интенсивности частиц с энергией  $\epsilon_i$  по сравнению с частицами, имеющими энергию  $\epsilon_2 > \epsilon_i$ , будет равняться времени, необходимому для того, чтобы солнечный ветер прошел расстояние  $R_i(\epsilon_i) - R_i(\epsilon_2)$ . С этой точки зрения размер гелиосферы должен быть около 150 а. е.

Итак, мы делаем вывод, что включение дрейфа радикально изменяет наше теперешнее понятие о движении энергичных частиц в гелиосфере и о механизме модуляции галактических космических лучей.

### Литература

1. *Parker E. N.* Phys. Rev. **110**, 1445 (1958).
2. *Долгинов А. З., Топтыгин И. Н.* ЖЭТФ. **51**, 1771 (1966).
3. *Parker E. N.* Planet. Space Sci. **13**, 9 (1965).
4. *Крымский Г. Ф.* ДАН СССР. **234**, 1307 (1977).
5. *Тверской Б. А.* ЖЭТФ. **53**, 1417 (1967).
6. *Вернов С. Н., Чудаков А. Е., Вакулов П. В., Горчаков Е. В., Контор Н. Н., Логачев Ю. И., Любимов Г. П., Переслгина Н. В., Тимофеев Г. А.* Труды I Ленинградского семинара по космическим исследованиям, Ленинград, 29 (1969).
7. *Vernov S. N., Charakhchyan A. N., Yu. I. Stozhkov, Charakhchyan T. N.* Proc. of 14th Intern. Cosmic Ray Conf., Munich, **3**, 1015 (1975).
8. *Jokipii J. R., Levy E. N., Hubbard W. B.* Ap. J. **213**, 861 (1977).
9. *Крайнев М. Б.* Труды 9 Ленинградского семинара по космическим исследованиям, Ленинград, 61 (1978).
10. *Jokipii J. R., Levy E. H.* Ap. J. **213**, 185 (1977).
11. *Levy E. H.* Geophys. Res. Lett. **5**, 969 (1978).
12. *Ломоносов В. Н.* Геомагнетизм и аэронавтика. **18**, 1004 (1978).
13. *Kota J.* Proc. of 16th Intern. Cosmic Ray Conf., Kyoto, **3**, 13 (1979).
14. *Gleeson L. J., H. Moraal, Webb G. U.* Proc. of 16th Intern. Cosmic Ray Conf., Kyoto, **3**, 1 (1979).
15. *Стожков Ю. И., Крайнев М. Б.* Изв. АН СССР, сер. физ. **43**, 2603 (1979).
16. *Alania M. V., Dorman L. I.* Proc. of 16th Intern. Cosmic Ray Conf., Kyoto, **1**, 57 (1979).
17. *Jokipii J. R., Kopriva D. A.* Proc. of 16th Intern. Cosmic Ray Conf., Kyoto, **1**, 7 (1979).
18. *Krainev M. B.* Proc. of 16th Intern. Cosmic Ray Conf., Kyoto, **3**, 230 (1979).
19. *Levy E. H.* Proc. of 14th Intern. Cosmic Ray Conf., Munich, **4**, 1215 (1975).

## О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ УСКОРЕНИИ

Публикуем неоконченную рукопись (факсимиле) статьи Б. А. Тверского о релятивистском турбулентном ускорении.

Б. А. Тверской.

О релятивистском турбулентном ускорении

Аннотация.

Получено релятивистское уравнение, описывающее взаимодействие частицы заряда с гидромагнитной турбулентностью и исследованы его решения с учетом ускорения, аннотированной диффузии и ядерных взаимодействий. Показано, что если спектр турбулентного поля в коротковолновой области пропорционален  $k^{-2}$ , то формируется стационарный спектр частицы. Диффузия частицы приводит к образованию спектра при определенном значении энергии. Найдено время установления стационарного спектра. Получены выражения характеристик турбулентной области через параметры ускорения частицы. Показано, что если в окрестности солнечной системы плотность плазмы  $\sim 10^{-26}$  г/см<sup>3</sup>, то возможны значения космических лучей в межзвездной среде. Вероятно, турбулентность является фактором ускорения звезд.

1. Выводы.

1

Создание квантовой теории слабогравитационной плазмы привело к существенному развитию теории статистического ускорения заряженных частиц. В настоящее время по заданному спектру случайных электромагнитных полей, соответствующих различным типам волн в плазме, можно вычислить энергетические спектры быстрых частиц, а также координатный диффузион в различных направлениях. Ряд авторов установил для скорости роста энергии частиц и энергии излучения [17-18]. В этих работах особенно детально проанализировано ускорение нестационарных волн. Ускорение крутильных волн гидромагнитными волнами исследовано в [47-51].

Теоретическое определение ускорения волнами спектров плазменной турбулентности в применении для космической или в гидродинамике нестационарной турбулентности. Однако соответствующие расчеты являются весьма трудными и до сих пор проведены лишь для некоторых частных случаев (например, см. [67]). В то же время исследование поведения быстрых частиц в турбулентной плазме требует ряд эффективных методов исследования определения спектра турбулентности [57].

Таким образом, хотя теория турбулентного ускорения еще не завершена, она уже сейчас может дать ответ на ряд важных вопросов. В данной главе с учетом указанных результатов акцентируется проблема происхождения космических лучей. В основе исследования лежит предположение о статистическом ускорении протонов и ядер гидромагнитной турбулентности. Единственным конкурирующим процессом (в рамках гипотезы о статистическом ускорении) могут быть нестационарные колебания. Мы обратим предположение гидромагнитных волн на случайный процесс. Во-первых, в этих волнах сосредоточена основная энергия галактической турбулентности. Во-вторых, при гравитационном резонансе независимо от спектра волн приращивается рост координатного диффузион в трехмерном пространстве при учете кинетических эффектов. В то же время при циклотронном резонансе координатный диффузион может расти при очень малых значениях энергии, что приводит к неравновесию

мисских спектров галактик. В третьих, гидромагнит.<sup>2</sup>  
на турбулентность при заданной скорости роста  
энергии галактик (за счет электродинамических полей)  
обеспечивает значительно более эффективное  
удержание галактик в турбулентном объеме  
(благодаря фиксации на магнитных флуктуациях)  
или перемешивает. Наконец, перемешивание связано  
с флуктуацией скорости и порядка скорости света  
будет, полагаясь в основном на гидродинамический  
электронный, фермионный, например, при соот-  
ветствии с квантовой механикой.

В п. 1 будет получено релятивистское уравнение,  
описывающее ускорение и аннотирование диффузии  
галактик, а также ядерные взаимодействия. Затем  
мы рассмотрим условия, при которых возможно  
формирование отдельных спектров, галактик  
или галактик с разными зарядами и массами и  
рассмотрим вопрос о галактике, формирующей  
стационарный спектр. В п. 2 на основе полученных  
формул будет построена модель асимметрии, спо-  
собная сформировать наблюдаемые космические  
микро- и мек- спектр, зависимость, также аннотиро-  
ванности спектров при высоких энергиях. Вспомогатель-  
но, эти результаты необходимо сопоставить с астрофизиче-  
скими данными, чтобы получить ответ о возмож-  
ности генерации космических лучей по рассмат-  
риваемой схеме. Этот вопрос рассмотрен в п. 3, где  
показано, что турбулентность с необходимыми харак-  
теристиками должна возникать в галактических  
рукавах при бурных процессах галактик.

### 1. Основные уравнения

В работе [3] было рассмотрено взаимодействие  
отдельных галактик с электромагнитной турбулент-  
ностью, возбуждаемой в галактике, магнитное поле  
и магнитное поле. Квадратичное уравнение  
полученное Вейнштейном, Вейнштейном и Сидоровым [4]  
было преобразовано к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho}) \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}, \quad (1)$$

где в явном виде выражены дифференциалы по модулю  
вектора скорости расселения (здесь  $\rho$  - угол между векторами).



сов и полем) и устанавливается связь между функцией распределения  $\rho(r)$ , временной функцией  $\rho_2(r, t)$  и спектром пульсаций. Задача (1) была рассмотрена пространственно-координатно-диффузионным методом [7] с помощью  $\Delta_1(r)$  и  $\Delta_2(r)$ . Уравнение (7) соответствует одномерному случаю, когда, согласно [10],  $\rho_2(r, t)$  можно считать функцией  $\rho_2(r, t)$ , то есть, в рассуждениях и уравнениях можно считать  $\rho_2(r, t)$  функцией  $\rho_2(r, t)$ , и поэтому метод (1) достаточно хорошо описывает этот случай. При этом, однако, необходимо учитывать, что в рассуждениях и уравнениях можно считать  $\rho_2(r, t)$  функцией  $\rho_2(r, t)$ , и поэтому метод (1) достаточно хорошо описывает этот случай.

Полученные [15] уравнения, относящиеся к случаю, когда  $\rho_2(r, t)$  можно считать функцией  $\rho_2(r, t)$ , и поэтому метод (1) достаточно хорошо описывает этот случай. При этом, однако, необходимо учитывать, что в рассуждениях и уравнениях можно считать  $\rho_2(r, t)$  функцией  $\rho_2(r, t)$ , и поэтому метод (1) достаточно хорошо описывает этот случай.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) f + \frac{e c}{\hbar} [\vec{v} \vec{H}] \frac{\partial f}{\partial p} = - \frac{e c}{\hbar} \{ \alpha [\vec{n} \vec{h}] + [\vec{v} \vec{h}] \} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (2)$$

Здесь  $e c$  — заряд частицы,  $\vec{v} = \vec{p} / m$  — ее скорость и импульс,  $\vec{h} = \vec{E} - c (\nabla \times \vec{A}) [\vec{n} \vec{h}]$  — турбулентные поля ( $\vec{h} \ll \vec{H}$ ),  $\vec{n} = \vec{h} / |\vec{h}|$  — направление скорости,  $\vec{n} = \vec{h} / |\vec{h}|$ . Согласно схеме квантовой теории, можно  $f$  в виде  $f = \tilde{f} + \tilde{f}$ , где  $\tilde{f}$  определяется по временному, малому по сравнению с периодом пульсаций, основному масштабу, а малый добавок  $\tilde{f}$  описывает малые быстрые флуктуации скорости на турбулентном уровне.

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = - \frac{e c}{\hbar} \{ \alpha [\vec{n} \vec{h}] + [\vec{v} \vec{h}] \} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \tilde{f} + \frac{e c}{\hbar} [\vec{v} \vec{H}] \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} = - \frac{e c}{\hbar} \{ \alpha [\vec{n} \vec{h}] + [\vec{v} \vec{h}] \} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} \quad (4)$$

Решив, следуя (3)–(4) к виду (1), полностью аналогично [15]–[17], с учетом малости флуктуаций можно получить уравнение для  $\tilde{f}$  в виде, подобном (3)–(4). Напомним (3)–(4) и можно написать  $M^* = M (1 - \alpha^2 / c^2)^{1/2}$  и положить

$\psi^* = M\psi$ . При этом уравнение (4) для гармоник Фурье становится аналогичным по форме неравновесному.

Формально если заменить в последнем из них  $\psi^*$  на  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\psi}$  на  $\bar{\psi}^*$ , а (3) отбросить от неравновесности лишь незначительной  $M^*$  при преобразовании Фурье. Поэтому, преобразовав соответствующую задачу в прямоугольниках [5], мы можем сразу написать

$$M^* \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \Big|_{\frac{\Phi(1/\rho \sin \theta)}{\rho \cos \theta}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \psi^* \rho \int \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \Phi(1/\rho \sin \theta) \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} \right\} \quad (6)$$

$$\text{где } \Phi(1/\rho \sin \theta) = \frac{dh^2}{dk} \Big|_{k = \frac{2eH}{c1\rho \sin \theta}} \quad (7)$$

а  $dh^2/dk$  — спектр кривизны магнитного поля. Разумеется, так же редуцирует даёт бы непосредственно как вычисления по схеме [5] и [7].

Уравнение (6) имеет простую физическую интерпретацию: в случае идеального плазмы действительных с волнами, при которых имеют место циклотронные резонансы

$$k \approx 2eH/c\rho, \quad (8)$$

многом редуцирует отдельные столкновения складываются как суммарное поведение. Характерная длина рассеяния  $\bar{\ell}_s$  определяется при этом соотношением

$$\frac{1}{\bar{\ell}_s} \approx \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} \right)^2$$

где  $\partial \rho$  — изменение какой-либо координаты или импульса при однократном столкновении с редуцированной волной, а

$$\delta \varepsilon \approx 4eH = \frac{M^* c}{2eH}$$

— время такого столкновения.

Величину  $\partial \rho$  определяем редуцированной силой Лоренца:

$$\partial \rho = \frac{2eH}{c} h_{\rho} \delta t$$

## Глава IV

### **Генерация магнитных полей космических объектов. Солнечная активность**

#### **К ВОПРОСУ О КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРЕ. I\***

##### **Аннотация**

Дано точное решение задачи о малых колебаниях изэнтропической жидкости, вращающейся в сферическом сосуде. Выделены колебания с низшими частотами. При малых отклонениях от изэнтропичности, когда  $g\beta\Theta/\Omega^2 \ll 1$  ( $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\Theta$  — сверхизэнтропический градиент температуры,  $\Omega$  — угловая скорость вращения), могут возбуждаться лишь низкочастотные колебания. Рассматривая форму этих колебаний, можно заключить, что конвекция должна иметь характер двумерной турбулентности. Скорость в перпендикулярной к  $\Omega$  плоскости не зависит от  $z$  ( $z$  отсчитывается вдоль  $\Omega$ ), а движение вдоль оси  $z$  сводится к однородным деформациям за счет непараллельности границ.

Для геофизики, и в частности для теории земного магнетизма, представляет интерес исследовать конвекцию во вращающемся шаре. На основании имеющихся данных о вязкости вещества в земном ядре ( $\nu$  не больше  $10^8$  см<sup>2</sup>/с [1]) можно утверждать, что вращение играет определяющую роль, так как силы Кориолиса много больше вязких натяжений, возникающих при движении с масштабом порядка радиуса ядра  $a$  (отношение этих сил  $\sim a^2\Omega/\nu$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения; при  $a = 3 \cdot 10^8$  см, и  $\Omega = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $a^2\Omega/\nu$  не меньше  $10^5$ ). Вследствие больших размеров градиент температуры не может заметно отличаться от изэнтропического, а конвекция должна быть сильно турбулизована. В крупных масштабах жидкость движется как идеальная, а диссипация и перенос имеют турбулентный характер.

Поэтому определение границы устойчивости методом Релея [2–5] не представляет для данной задачи особого интереса. В работах [2, 3] исследован сдвиг границы устойчивости в покоящемся гравитирующем шаре, обусловленный вязкостью и теплопроводностью. Как и следовало ожидать, в случае земного ядра этот сдвиг пренебрежимо мал. Как отмечалось выше, в случае земного ядра необходим учет вращения.

---

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 1. № 5. 629–637 (1961).

В работах [4, 5] получен ряд интересных результатов, относящихся к возникновению конвекции во вращающемся в магнитном поле плоском слое. Показано, что вращение стабилизирует равновесие и что в случае малого сверхизэнтропического перегрева неустойчивость имеет малый пространственный период в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Однако эти результаты относятся к критическому режиму вблизи границы устойчивости и не могут быть перенесены на турбулентный режим. Отметим также, что в силу существенных различий в геометрии конвекция в шаре даже в критическом режиме может протекать по-иному.

Ниже будет показано, что в постановке задачи о гравитационной неустойчивости вращающейся и покоящейся жидкости имеется принципиальная разница. В покоящейся жидкости любое возможное перемещение в отсутствие дестабилизирующего фактора (в случае конвекции — при изэнтропическом распределении температуры) происходит без совершения работы. Наличие сколь угодно малого дестабилизирующего фактора приводит поэтому к возникновению неустойчивости практически при любом отклонении участков жидкости от положения равновесия.

В случае вращающейся жидкости отклонение ее участков от положения равновесия вызывает движение, характер которого зависит как от величины смещения, так и от способа деформации соответствующей силовой трубки ротора скорости  $\Omega$ . Поэтому перемещение связано с совершением положительной работы, равной кинетической энергии возникающего движения. Можно сказать, что силовые линии ротора скорости, замороженные в идеальную жидкость, сообщают последней некоторую эффективную упругость подобно силовым линиям магнитного поля, замороженным в хороший проводник. В теории возникновения турбулентности [6], например, доказывалось, что наименее устойчивыми являются возмущения без деформаций силовых трубок ротора скорости. Очевидно, что и при конвекции квазиупругие свойства вращающейся жидкости будут играть важную роль.

Поскольку, с одной стороны, отклонение отдельных участков вращающейся изэнтропической жидкости от положения равновесия связано с совершением положительной работы, а с другой — при конвекции в больших объемах градиент температуры мало отличается от изэнтропического, ясно, что будут возбуждаться лишь те степени свободы, для которых выигрыш в энергии за счет работы сил Архимеда больше или порядка работы на создание возмущения.

Таким образом, нахождение колебаний во вращающемся изэнтропическом шаре и выделение колебаний с наименьшими собственными частотами дает возможность сделать ряд предварительных качественных выводов о характере конвекции. Данная работа посвящена исследованию этого вопроса. В следующей работе будет подробно рассмотрен стационарный турбулентный режим конвекции в шаре и рассмотрены эффекты, связанные с учетом вязкости.

### 1. Квазиупругие свойства вращающейся идеальной жидкости

Выясним связь между работой, затрачиваемой на создание возмущения, и начальным отклонением в жидкости. Пусть идеальная несжимаемая жидкость с постоянной по объему удельной энтропией ограничена твердыми стенками и равномерно вращается вокруг оси с угловой скоростью  $\Omega$ . В начальный момент времени произошло отклонение отдельных участков жидкости от положения равновесия. Обозначим это отклонение через  $\xi_0$  ( $\xi_0$  — функция координат и в силу несжимаемости удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \xi_0 = 0$ ). В дальнейшем жидкость предоставлена самой себе,



так что ее полная энергия (с учетом возмущенного движения) сохраняется. Работа на создание отклонения  $\delta u$  будет равна разности кинетических энергий возмущенного и невозмущенного вращений (внутренняя энергия сохраняется вследствие идеальности и несжимаемости):

$$\delta u = \rho \Omega \int [\mathbf{r}\mathbf{v}] dw + \frac{\rho}{2} \int v^2 dw, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $\mathbf{v}$  — возмущение скорости;  $\mathbf{r}$  — расстояние от оси вращения; интегрирование идет по всему занятому жидкостью объему.

Первый член в (1) связан с изменением полного момента жидкости. Поскольку имеются в виду дальнейшие приложения к конвекции, когда момент должен сохраняться (так как конвекция обусловлена внутренними силами), мы можем ограничить рассмотрение классом возмущений, для которых

$$\int [\mathbf{r}\mathbf{v}] dw = 0.$$

При малых возмущениях

$$\mathbf{v} = i\omega \xi(t),$$

где  $\xi(t)$  — лагранжево смещение в момент времени  $t$ , а  $\omega$  — собственная частота движения. Как отмечалось выше,  $\delta u = \text{const}$ , поэтому

$$\delta u = \frac{\rho \omega^2}{2} \int |\xi|^2 dw = \frac{\rho \omega^2}{2} \int |\xi_0|^2 dw. \quad (1a)$$

В случае нарушения изэнтропичности работа силы Архимеда при малом смещении  $\xi_0$  есть

$$\delta u_a \sim \int \beta \rho (g \xi_0) (\Theta \xi_0) dw.$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\Theta$  — сверхизэнтропический градиент температуры (см. § 4). Из сопоставления  $\delta u_a$  с  $\delta u$  видно, что оба выражения пропорциональны  $\xi_0^2$ . Поэтому степень возбудимости различных типов колебаний можно охарактеризовать безразмерным отношением

$$k = \frac{\delta u_a}{\delta u} \sim \frac{g \beta \Theta}{\omega^2}.$$

При  $k \gtrsim 1$  возникает неустойчивость. При  $k \ll 1$  неизэнтропичность будет лишь незначительным малым возмущением и дает малую поправку к соответствующей  $\omega$ .

Таким образом, задача сводится к установлению связи  $\omega$  со способом начальной деформации. Ряд качественных выводов о характере этой связи можно сделать с помощью наглядной модели из рассмотрения колебаний тонкой силовой трубки ротора скорости  $\Omega$ .

Пусть трубка  $\Omega$  опирается на жесткую границу и имеет высоту  $2z_0$  и радиус  $r_0$ . Считая, что  $z_0 \gg r_0$ , пренебрежем пока непараллельностью торцов. Работа на создание заданного движения трубки складывается из кинетической энергии жидкости в трубке и энергии возникающего при этом движения прилегающих слоев жидкости. Если при колебаниях мы будем считать трубку свободной и положим, что при  $r = r_0$  возмущение давления  $p = 0$ , то вычисленная таким образом работа будет минимальной. С другой стороны, как видно из дальнейшего, качественные особенности

различных типов деформаций имеют достаточно общий характер и поэтому слабо зависят от условия на боковой поверхности. Следовательно, вытекающие из такого рассмотрения выводы могут быть использованы для качественных оценок.

Введем вращающуюся цилиндрическую систему координат, связанную с возмущенным положением трубки. Малые возмущения скорости  $\mathbf{v}$  и давления  $p$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2[\mathbf{v}\Omega], \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

(центробежная сила уравновешена градиентом давления) с граничными условиями

$$p|_{r=r_0} = 0, \quad v_z|_{z=\pm z_0} = 0. \quad (4)$$

Отметим прежде всего, что система (2), (3) имеет решение с  $p = 0$ . При этом  $v_z = 0$ , а зависимость  $v_r$  и  $v_\varphi$  от  $z$  произвольна. Решение ищем в виде

$$v_r = v_r(r, \varphi) f(z) e^{i\omega t}, \quad v_\varphi = v_\varphi(r, \varphi) f(z) e^{i\omega t}.$$

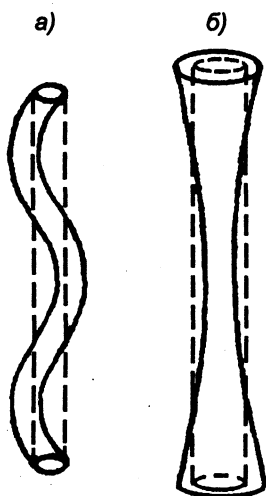


Рис. 1

Получаем

$$i\omega \mathbf{v} = 2[\mathbf{v}\Omega],$$

отсюда

$$\omega = 2\Omega, \quad v_\varphi = i v_r$$

или, что то же,

$$\omega = -2\Omega, \quad v_\varphi = -i v_r.$$

Из условия  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  находим, что

$$v_r, v_\varphi \sim r^{m-1} \quad (v_r, v_\varphi \sim e^{im\varphi}).$$

При  $m \leq 0$ , в частности, отсутствуют конечные в нуле решения. При  $m \geq 1$  трубка либо наклоняется, либо претерпевает деформацию изгиба или кручения (рис. 1 а).

Частота этих возмущений не зависит от пространственных периодов  $r_0$  и  $z_0$ . Поэтому при слабом перегре, когда  $k = \frac{g\beta\theta}{4\Omega^2} \ll 1$ , эти степени свободы не будут

возбуждаться. Аналогичный результат широко известен в физике плазмы [7–9]: плазма низкого давления в сильном магнитном поле  $H$  всегда устойчива относительно возмущений с наклоном, изгибом и кручением линий  $H$ .

Рассмотрим теперь общее решение (2)–(4). Полагая  $\mathbf{v}, p \sim e^{i\omega t}$ , после несложных расчетов получим:

$$\mathbf{v} = \frac{-i\omega \nabla p + 2[\Omega \nabla p] + \frac{4i\Omega}{\omega(\Omega \nabla p)}}{4\Omega^2 - \omega^2}, \quad (5)$$

$$\Delta p = \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Решая (6) методом разделения переменных, получим:

$$p = C e^{\pm i m \varphi} J_m(\lambda r) \begin{cases} \cos \frac{\gamma \omega}{\sqrt{4\Omega^2 - \omega^2}} z & (m = 2k), \\ \sin \frac{\gamma \omega}{\sqrt{4\Omega^2 - \omega^2}} z & (m = 2k + 1). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $J_m$  — функция Бесселя порядка  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), а постоянные  $\gamma$  и  $\omega$  определяются из граничных условий:

$$\gamma = \frac{n\pi}{2z_0} \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} \quad (8)$$

(четным  $n$  в (8) соответствует  $\cos$ , а нечетным —  $\sin$ ).

Тогда

$$\omega_{lmn}^2 = \frac{4\pi n^2 r_0^2}{4\alpha_{lm}^2 z_0^2 + n^2 \pi^2 r_0^2}, \quad (9)$$

где  $\alpha_{lm}$  —  $l$ -й корень уравнения  $J_m(x) = 0$ . Если  $m \neq 0$ , то первый корень этого уравнения есть 0, и  $p = 0$ . Соответствующее решение подробно рассмотрено выше.

Рассмотрим колебания с  $\gamma \neq 0$ . Если  $n r_0 \ll \alpha_{lm} z_0$ ,

$$\omega_{lmn} \approx \pm \frac{n\pi}{\alpha_{lm}} \frac{r_0}{z_0} \Omega \rightarrow 0. \quad (10)$$

Поперечный период таких возмущений  $\sim r_0/\alpha_{lm}$ , а продольный  $\sim z_0/n$ . Из  $\text{div } \xi = 0$  следует, что

$$\xi_{\perp} \sim \frac{n}{\alpha_{lm}} \frac{r_0}{z_0} \xi_{\parallel} \ll \xi_{\parallel}, \quad (11)$$

т. е. силовая трубка претерпевает последовательные сжатия и растяжения без изгиба (рис. 1б). При достаточно малом поперечном периоде эти возмущения приводят к неустойчивости при сколь угодно малом дестабилизирующем факторе, действующем вдоль  $\Omega$ .

Наконец, если  $n = 0$ , то  $\omega = 0$ ,  $v_z = 0$  и отсутствует зависимость от  $z$ . Соседние участки трубки без деформации меняются местами. Такие возмущения являются наиболее «опасными» с точки зрения неустойчивости. Непараллельность торцов несколько стабилизирует их, так как в этом случае после перестановки изменяются сечения отдельных трубок и, в силу сохранения циркуляции скорости, возникает вращение трубок относительно их осей. Подробное рассмотрение таких движений в шаре см. ниже.

Итак, мы выяснили, что трубки ротора скорости  $\Omega$  сопротивляются деформациям и наклонам. Эффективная упругость растет с  $\Omega$ . При малом поперечном периоде возмущения типа сжатий и растяжений трубки возможна неустойчивость под действием направленного вдоль  $\Omega$  дестабилизирующего фактора. С помощью полученных результатов можно оценить роль вязкости.

В случае изгибов, наклонов и кручения число Рейнольдса  $R \sim r_0^2 \Omega / \nu$ . В земном ядре  $\Omega = 10^{-4}$ ,  $\nu \ll 10^8$  и  $R > r_0 \cdot 10^{-10}$ . Следовательно, вязкость существенна при  $r_0 \lesssim 10^5$  см, что много меньше радиуса ядра  $a$ .

В случае сжатий и растяжений вязкие силы будут порядка  $\rho \nu v_z / r_0^2$ . Возникает поперечный градиент давления  $\nabla p_{\perp} \sim \rho \nu v_z / r_0$ .

Если он будет больше или порядка силы Кориолиса  $\rho\Omega v_2$ , то вязкость существенна. Отсюда, учитывая, что  $v_r \sim v_z r_0/z_0$ , приближение идеальной жидкости справедливо при  $r_0 > (\nu z/\Omega)^{1/2}$ . В случае земного ядра  $z \sim a \sim 10^8$  см, и  $(\nu z/\Omega)^{1/2} < 10^6$  см  $\ll a$ .

Таким образом, приближение идеальной жидкости в случае земного ядра справедливо вплоть до весьма малых в сравнении с  $a$  масштабов. Эти полукачественные результаты в силу своей наглядности существенно облегчают анализ точного решения задачи о малых колебаниях во вращающемся шаре.

## 2. Малые колебания во вращающемся изэнтропическом шаре

Пусть идеальная несжимаемая изэнтропическая жидкость ограничена жесткой сферической оболочкой радиуса  $a$  и равномерно вращается вокруг проходящей через центр оси с угловой скоростью  $\Omega$ .

Введем безразмерные координаты  $r, z, \varphi$  с осью  $z$  вдоль оси вращения и с масштабом длины, равным радиусу шара. Система координат связана с невозмущенным положением жидкости и, следовательно, вращается с угловой скоростью  $\Omega$ .

Уравнение (6) принимает вид

$$\Delta_2 p = \lambda^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (12)$$

здесь

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— двумерный лапласиан,

$$\lambda^2 = \frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1. \quad (13)$$

На границе шара нормальная компонента скорости равна нулю см. (5), т. е.

$$r \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2i\Omega}{\omega} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \lambda^2 z \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{при} \quad r^2 + z^2 = 1. \quad (14)$$

Из (12) и (14) видно, что четные и нечетные по  $z$  решения разделяются. Ищем четное решение в виде ряда Тэйлора по  $z/\lambda$ :

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z, \varphi) \left( \frac{z}{\lambda} \right)^2. \quad (15)$$

С помощью (12) получаем:

$$p_k = \frac{1}{2k(2k-1)} \Delta_2 p_{k-1} = \frac{1}{(2k)!} \Delta_2^k p_0(r, \varphi).$$

Положим

$$p_0 = r^m e^{\pm im\varphi} \psi(r^2) \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Требование  $\psi = \psi(r^2)$  обеспечивает конечность решения. Тогда

$$p = r^m e^{\pm im\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \psi(r^2). \quad (16)$$

Подставим (16) в (14):

$$r^m e^{\pm im\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left( \frac{1-r^2}{\lambda^2} \right)^k \left[ r \frac{r}{dr} + m \left( 1 \pm \frac{2\Omega}{\omega} \right) - 2k\lambda^2 \right] \times \\ \times \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \psi(r^2) = 0. \quad (17)$$

Легко видеть, что уравнению (17) удовлетворяют полиномы

$$\psi_n(r^2) = r^{2n} + c_1 r^{2(n-1)} + c_2 r^{2(n-2)} + \dots + c_n, \quad (18)$$

причем  $\lambda$  определяется из равенства нулю коэффициента при старшем члене в (17). Полученное таким образом характеристическое уравнение имеет вид:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \frac{2(n-k) + m(1 \pm 2\Omega/\omega) - 2k\lambda^2}{(\lambda/2)^{2k} (n-k)! (m+n-k)!} = 0. \quad (19)$$

При данных  $m$  и  $n$  оно имеет  $2n+1$  корней, соответствующих знаку плюс. Знаку минус соответствуют те же корни с обратным знаком. Один из корней  $\omega = \pm 2\Omega$  очевиден. Решения с  $\omega = 0$  при  $m \neq 0$  отсутствуют. С помощью линейных комбинаций таких полиномов при каждом  $m$  можно построить компоненты ряда Тэйлора от двух переменных  $r$  и  $z$  и удовлетворить произвольным начальным условиям, четным по  $z$ .

Вычисления для нечетных по  $z$  решений ведутся по той же схеме и приводят к уравнению

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{2(n-k) + m(1 \pm 2\Omega/\omega) - (2k+1)\lambda^2}{(\lambda/2)^{2k} (n-k)! (m+n-k)!} = 0. \quad (20)$$

которое, как и (19), имеет корень  $\omega = \pm 2\Omega$ .

Нас интересуют колебания с минимальными  $\omega$ . Из (13) видно, что,  $\lambda \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow 0$  и решение имеет малый поперечный период, т. е.  $n \gg 1$ . При малых  $k$  величина  $(n-k)!(n+m-k)!$  с ростом  $k$  увеличивается как  $[n(n+m)]^k$ .

Если  $\lambda \rightarrow \infty$  достаточно быстро, так что

$$\frac{n(n+m)}{\lambda^2} \lesssim 1,$$

то из-за множителя  $(2k)!$  в знаменателе суммы в (19) и (20) быстро сходятся, и основную роль играют члены с малыми  $k$ . Воспользовавшись этим обстоятельством, преобразуем  $(n-k)!$  и  $(m+n-k)!$  по формуле Стирлинга и распространим суммирование до бесконечности. Тогда равенства (19) и (20) примут соответственно вид:

$$\left( n \pm \frac{\Omega}{\omega} m \right) \cos \left[ \frac{2\sqrt{n(n+m)}}{\Omega} \omega \right] + \sqrt{n(n+m)} \frac{\Omega}{\omega} \sin \left[ \frac{2\sqrt{n(n+m)}}{\Omega} \omega \right] = 0, \quad (21)$$

$$\left( n \pm \frac{\Omega}{\omega} m \right) \sin \left[ \frac{2\sqrt{n(n+m)}}{\Omega} \omega \right] - \sqrt{n(n+m)} \frac{\Omega}{\omega} \cos \left[ \frac{2\sqrt{n(n+m)}}{\Omega} \omega \right] = 0. \quad (22)$$

Можно показать, что эти уравнения дают спектр частот

$$\omega \sim \frac{l\Omega}{\sqrt{n(n+m)}} \quad (l \gtrsim 1).$$

Здесь  $l$  характеризует продольный период. Соответствующие возмущения являются рассмотренными выше чередующимися сжатиями и растяжениями.

Существенно отметить, что нечетное уравнение (22) не имеет корней с  $\omega \ll \frac{\Omega}{\sqrt{n(n+m)}}$ . Уравнение же (21) имеет решения с  $\omega \sim \frac{\Omega}{n(n+m)}$ , которые оказываются наименее устойчивыми. Рассмотрим их более подробно.

### 3. Наименее устойчивые возмущения

Считая, что  $\omega \ll \frac{\Omega}{\sqrt{n(n+m)}}$ , разложим (21) в ряд Тэйлора с точностью до членов первого порядка:

$$n \pm \frac{\Omega}{\omega} m + 2n(m+n) = 0 \quad (23)$$

или

$$\omega = \pm \frac{\Omega m}{2n(m \pm n \pm 1/2)}. \quad (24)$$

Такие решения существуют при  $m \lesssim n$  (при  $m = n$  ошибка меньше 8%). Аналогичное разложение по малому параметру может быть произведено и в выражениях для давления и скорости. Учитывая, что

$$\frac{1}{\lambda^2} \sim \frac{m^2}{4n^2(m+n)^2}, \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi \sim n(n+m)\psi,$$

из (16) получаем, что роль малого параметра играет величина  $\varepsilon = \frac{m^2}{4n(m+n)}$ . Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$p = r^m e^{\pm im\varphi} \left\{ \psi(r^2) + \frac{z^2}{2\lambda^2} \left( \frac{d}{dz^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r^2) \right\}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что, с точностью до членов  $\sim \varepsilon$ ,  $v_r$  и  $v_\varphi$  не зависят от  $z$ , а  $v_z \sim z$ , т. е. силовые трубки  $\Omega$  при движении претерпевают однородные деформации вдоль оси  $z$ . Этот тип движения соответствует рассмотренному в § 1 случаю перестановки соседних трубок. Однородные деформации обусловлены непараллельностью границ.

Для нахождения  $\psi(r^2)$  воспользуемся граничным условием. Подставляя (25) в (14) и отбрасывая малые члены, получим:

$$(1 - r^2)\psi'' + \left[ \frac{2m+1}{r} - 2(m+1)r \right] \psi' \pm \frac{2m\Omega}{\omega} \psi = 0. \quad (26)$$

Подстановкой  $r^2 = x$  это уравнение приводится к гипергеометрическому:

$$x(1-x) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \left( m - \frac{2m+1}{2}x \right) \frac{d\psi}{dx} \pm \frac{m\Omega}{2\omega} \psi = 0. \quad (27)$$

Как известно, решение гипергеометрического уравнения является полиномом лишь при определенных значениях параметров [9]. В случае (27) это условие, как и следовало ожидать, дается (24):

$$\omega = \pm \frac{m}{2n(m+n+1/2)} \Omega,$$

где  $n$  — целые положительные числа. Степень полинома есть  $n$ . По предположению,  $n \gg 1$ . Параметры гипергеометрической функции определяются, как

$$\alpha = m + n - \frac{1}{2}, \quad \beta = -n, \quad \gamma = m.$$

Решениями уравнения (27) будут полиномы Якоби:

$$G_n(m-1/2, m, x) = \frac{(m-1)!}{(m+n-1)!} \frac{\sqrt{1-x}}{x^{m-1}} \frac{d^n}{dx^n} x^{m+n-1} (1-x)^{n-1/2}, \quad (28)$$

которые на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  ортогональны по индексу  $n$  с весом  $\frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x}}$ . Все  $n$  корней полинома будут простыми и вещественными, располагаясь в промежутке  $0 \leq x \leq 1$ .

#### 4. Характер конвекции при слабом перегреве

В заключение рассмотрим некоторые предварительные выводы о характере конвекции при малом сверхизэнтропическом перегреве, вытекающие из полученных выше результатов.

Ввиду резкой анизотропии колебаний с малыми частотами можно ожидать, что будет иметь место такая же анизотропия в распределении температур. Обозначим средний сверхизэнтропический градиент температуры вдоль  $z$  через  $\Theta_z$ , а вдоль  $r$  — через  $\Theta_r$ . При отклонении от положения равновесия на расстояние  $\xi$  плотность участка жидкости  $dw$  изменится на величину

$$\delta\rho = \beta\rho(\xi\Theta), \quad (29)$$

где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения. Сила Архимеда будет равна  $g\delta\rho dw$ , а ее работа при смещении

$$\delta u_a \sim \beta\rho(g\xi)(\Theta\xi), \quad (30)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Сравнивая  $\delta u_a$  с вычисленной ранее работой на деформацию, видим, что если

$$\frac{g\beta\Theta}{\Omega^2} \ll 1, \quad (31)$$

колебания с изгибом, наклоном и кручением силовых трубок не возбуждаются. Это же заключение относится к остальным типам деформаций в случае больших пространственных периодов. Неизэнтропичность играет роль малого возмущения и может быть учтена в рамках рассмотренного выше линейного приближения.

При конвекции возникает конкуренция между сжатиями и растяжениями таких трубок, с одной стороны, и с перестановками трубок, — с другой. В первом случае

основную роль играет смещение  $\xi_z$  и, следовательно,  $\Theta_z$ . Неустойчивость начнется при поперечном периоде, когда  $\delta u \sim \delta u_a$ . Отсюда

$$n(n+m) \gtrsim \frac{\Omega^2}{g_z \beta \Theta_z}. \quad (32)$$

В случае перестановок основную роль играет  $\Theta_r$ . Аналогичное условие для периода дает:

$$(n+m)^2 \gtrsim \frac{\Omega^2}{g_r \beta \Theta_r}. \quad (33)$$

(мы учли, что  $\xi_\varphi \sim n/m \xi_r$ ). При  $\Theta_r \sim \Theta_z$  оба критерия по порядку величины совпадают. Однако вследствие малости поперечного периода  $\Theta_z \ll \Theta_r$ . Действительно, неравномерно нагретую трубку с высотой  $\sim a$  можно рассматривать как диполь в поле тяжести. (Плотность, отсчитываемая от среднего значения, будет отрицательной в более горячих и положительной в более холодных областях.)

Легко видеть, что если неравномерно нагретые слои жидкости (рис. 2, пунктирные стрелки показывают направление смещения отдельных участков жидкости при продольных комбинациях) ориентированы вдоль  $\Omega$ , дипольный момент будет много меньше, чем если эти же слои ориентированы перпендикулярно  $\Omega$ . Поэтому при заданном распределении удельной энтропии расположение жидкости в первом случае энергетически более выгодно, нежели во втором. Отсюда следует, что  $\Theta_r \sim a/r_0 \Theta_z$ , где  $a$  — радиус шара,  $r_0$  — поперечный период (33). Поперечный градиент температуры, таким образом, много больше продольного, и основная роль в конвекции принадлежит перестановкам трубок. При этом развивается своеобразная двумерная турбулентность, аналогичная рассмотренной в [10] турбулентной картине движения

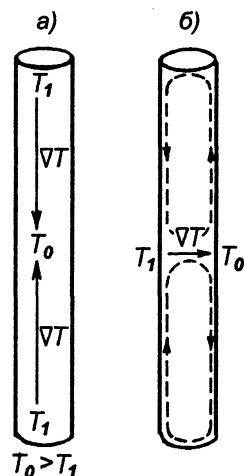


Рис. 2

плазмы низкого давления в сильном магнитном поле. Изучению свойств такой турбулентности и переноса тепла будет посвящена следующая работа.

В заключение пользуюсь случаем выразить признательность академику М. А. Лентовичу за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов.

### Литература

1. Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. М.: ИЛ, 1960.
2. Chandrasekhar S. Philos. Mag. **43**, 1317 (1952).
3. Chandrasekhar S. Philos. Mag. **44**, 233 (1953).
4. Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. **217A**, 306 (1953).
5. Chandrasekhar S. Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **113**, 667 (1953).
6. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
7. Кадомцев Б. Б. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 4. М.: Изд. АН СССР, 1958.
8. Rosenbluth M., Longmire C. Ann. phys. **1**, 120 (1957).
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. 3, ч. 2. М.: Физматгиз, 1953.
10. Кадомцев Б. Б. ЖЭТФ. **40**, 328 (1961).



## К ВОПРОСУ О КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРЕ. II\*

### Аннотация

Рассматривается стационарный режим турбулентной конвекции во вращающемся гравитирующем шаре. Считается, что отношение  $\alpha^2$  избыточной гравитационной энергии, обусловленной неравномерным нагревом, к кинетической энергии вращения мало. Показано, что конвекция при этом имеет характер двумерной турбулентности с основным масштабом  $l_0 \sim \alpha a$  и со скоростью в этом масштабе  $v_0 \sim \alpha^2 a \Omega$ . Из уравнения турбулентной теплопроводности с коэффициентом переноса  $\chi_{\text{турб}} \sim l_0 v_0$  получено стационарное распределение температур. Рассмотрены условия, при которых двумерная турбулентность предпочтительнее других процессов.

Если кинематическая вязкость  $\nu$  в ядре меньше или порядка  $100 \text{ см}^2/\text{с}$ , то будет иметь место этот режим. Если  $10^6 > \nu > 100$ , то, по-видимому, процесс становится автоколебательным. При  $\nu > 10^6 \text{ см}^2/\text{с}$  может осуществляться режим Чандрасекара.

В предыдущей работе [1] были рассмотрены малые колебания в идеальной изэнтропической жидкости, заключенной в сферическую оболочку и равномерно вращающейся вокруг оси. Было показано, что если плотность кинетической энергии возмущенного движения мала в сравнении с плотностью энергии вращения, то силовые трубки ротора скорости  $\Omega$  и приобретают упругость по отношению к изгибу, наклону и кручению. Указывалось, что эти результаты могут быть использованы в качестве нулевого приближения при изучении конвекции во вращающемся гравитирующем шаре в случае, когда избыточная гравитационная энергия, связанная с неравномерным нагревом, много меньше кинетической энергии вращения: отсюда можно найти основной масштаб, скорость в основном масштабе турбулентности и коэффициенты турбулентного переноса.

Такой режим конвекции рассмотрен в данной работе. Изучены свойства возникающей при этом двумерной турбулентности, вычислены коэффициенты турбулентного переноса и найдено установившееся распределение температур. Показано, что в случае шара двумерная турбулентность может обеспечить лучший теплоотвод, чем режим Чандрасекара [2].

### 1. Двумерная турбулентность при конвекции во вращающемся гравитирующем шаре

В работе [1] показано, что при слабом сверхизэнтропическом перегреве конвекция во вращающемся шаре осуществляется либо за счет перестановок соседних

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 1. № 5. 638–645 (1961).

силовых трубок ротора скорости  $\Omega$ , либо за счет колебаний этих трубок вдоль  $\Omega$ , причем в обоих случаях поперечный к  $\Omega$  пространственный период таких движений мал в сравнении с радиусом шара  $a$ . Отмечалось, что конвекция с перестановкой трубок предпочтительнее, так как создающий ее радиальный градиент температуры много больше вертикального (обоснование этого вывода см. ниже).

Будем считать, что конвекция сильно турбулизована, причем ее спектральные характеристики не зависят от времени. Рассмотрим свойства такого движения. Все расчеты в дальнейшем ведутся в цилиндрических координатах.

#### *Движение в основном масштабе*

На основании [1] можно утверждать, что основной масштаб турбулентности  $l_0$  (в поперечной к  $\Omega$  плоскости) будет определяться из равенства (по порядку величины) работы на перестановку двух соседних трубок с радиусами  $\sim l_0$  и работы сил Архимеда при такой перестановке. Необходимость затрат работы при этом процессе связана с возникновением движения после перестановки. Последнее обусловлено изменением сечений трубок при сохранении потока ротора скорости через сечение. Это приведет к равномерному вращению трубок вокруг их осей. Вследствие непараллельности торцов такое вращение вызовет однородные деформации вдоль  $\Omega$ . Вычисляя таким образом кинетическую энергию движения, можно оценить порядок величины работы  $U$  на перестановку:

$$U(l) \approx \frac{\rho \Omega^2 r}{(a^2 - r^2)^2} l^4 w, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $r$  — среднее расстояние от трубок до оси вращения;  $l$  — расстояние между осями трубок (считаем, что  $l$  направлено по радиусу);  $w$  — объем трубки. При  $r \rightarrow a$  равенство (1) нарушается вследствие возрастания роли непараллельности торцов, однако более точный расчет показывает, что даже при  $r = 0,99a$  выражение (1) дает правильный порядок величины.

Работа силы Архимеда  $U_a(l)$  будет [1]:

$$U_a(l) \approx \rho g_0 \frac{r}{a} \Theta(r) l^2 w, \quad (2)$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести на поверхности шара;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения;  $\Theta(r)$  — среднее превышение радиального градиента температуры над изэнтропическим.

Из (1) и (2) находим  $l_0$  (причем  $l_0$  будет функцией  $r$ ):

$$l_0(r) \approx \sqrt{\frac{g_0 \beta \Theta(r)}{\Omega^2} \frac{a^2 - r^2}{\sqrt{ar}}} = \sqrt{\gamma(r)} \frac{a^2 - r^2}{\sqrt{ar}}, \quad \gamma(r) = \frac{g_0 \beta \Theta(r)}{\Omega^2}. \quad (3)$$

Безразмерная величина  $\gamma$  дает порядок величины отношения избыточной гравитационной энергии перегрева к кинетической энергии вращения и по условию мала, так что  $l_0 \ll a$ . При малых  $r$  следует положить  $r = l_0(0)$  и разрешить (3) относительно  $l_0(0)$ .

Скорость основного масштаба  $v_0(r)$  определяется (по порядку величины) из равенства потенциальной и кинетической энергии:

$$v_0(r) \approx a \Omega \gamma(r) \frac{a^2 - r^2}{a^2}. \quad (4)$$

*Локальные свойства турбулентности*

В случае развитой турбулентности вязкость не играет роли во всех масштабах, больших некоторого  $l_{\text{вн}} \ll l_0$  [3]. Если  $l_0 \gg l \gg l_{\text{вн}}$ , то сила Архимеда также не существенна (ее работа много меньше притока энергии из основного масштаба). Поэтому уравнения движения в масштабах  $\sim l$  можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} + u \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = -\nabla_{\perp} \Psi + \frac{2a\Omega}{a_0} [\mathbf{w} \mathbf{n}], \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{w} \nabla) u + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{w} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Здесь движение разделено на продольное и поперечное к  $\Omega$ , при этом введено:  $a$  — в качестве единицы длины,  $a/v_0$  — единицы времени и положено

$$\mathbf{v}_{\perp} = v_0 \mathbf{w}, \quad v_z = v_0 u, \quad p = \rho v_0^2 \Psi, \quad \mathbf{n} = \frac{\Omega}{\Omega},$$

где  $v_0$  — среднее значение  $v_0(\mathbf{r})$ .

В (5) входит величина

$$\frac{a\Omega}{a_0} \sim \frac{1}{\gamma} \equiv \frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha \ll 1)$$

(см. (4)). Решение будем искать в виде степенных рядов по  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\alpha^2} \Psi_{-2} + \frac{1}{\alpha} \Psi_{-1} + \Psi_0 + \alpha \Psi_1 + \dots, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{w}_0 + \alpha \mathbf{w}_1 + \alpha^2 \mathbf{w}_2 + \dots, \\ u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

(ищем решение с перестановками трубок, когда  $u \sim w$ ). При подстановке следует учесть, что период движения в поперечной плоскости  $l \lesssim l_0$ , а вдоль оси  $z$  период порядка  $a$ . Так как  $l_0/a \sim \alpha$ , дифференцирование по  $z$  повышает на единицу порядок малости соответствующего члена; получаем:

$$\nabla_{\perp} \Psi_{-2} = 2[\mathbf{w}_0 \mathbf{n}], \quad \frac{\partial \Psi_{-2}}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t} + (\mathbf{w}_0 \nabla) \mathbf{w}_0 = -\nabla_{\perp} \Psi_0 + 2[\mathbf{w}_2 \mathbf{n}], \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + (\mathbf{w}_0 \nabla) u_0 = -\frac{\partial \Psi_{-1}}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\text{div } \mathbf{w}_0 = 0, \quad (12)$$

$$\text{div } \mathbf{w}_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad \text{и т. д.} \quad (13)$$

Из (9) следует, что  $dw_0/dz = 0$ . Оценка показывает, что

$$\mathbf{w}_2 \sim \left(\frac{l}{a}\right)^2 \Psi_0 \ll \nabla \Psi_0.$$

Поэтому в (10) член с  $w_2$  можно опустить. В нулевом приближении получаем:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + (w_0 \nabla) w_0 = -\nabla \Psi_0 \quad \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} = 0 \right), \quad (10')$$

$$\operatorname{div} w_0 = 0. \quad (12')$$

Отметим, что проведенное разложение полностью аналогично соответствующему разложению в теории плазмы низкого давления [4].

Уравнения (10') и (12') описывают плоское движение несжимаемой жидкости в инерциальной системе координат. В случае развитой турбулентности это движение (в плоскости, перпендикулярной к  $\Omega$ ) однородно и изотропно (поскольку в нашей задаче  $l_0 \ll a$ . Это утверждение сохраняет силу и для масштабов порядка  $l_0$ ). Далее из уравнений следует, что взаимодействие поперечного и продольного движений проявляется лишь во втором порядке по  $\alpha$ . Поэтому можно считать, что поток энергии, непрерывно передаваемой от больших масштабов поперечного движения к меньшим, постоянен. Следовательно, имеет место полная аналогия с трехмерной задачей о локальных свойствах развитой турбулентности, и все основные результаты, полученные в трехмерном случае [3, § 31], переносятся на рассматриваемую двумерную турбулентность.

В частности, справедлив закон Колмогорова—Обухова:

$$v_{\perp}(l) \approx v_0 \left( \frac{l}{l_0} \right)^{1/3}. \quad (14)$$

Отсюда видно, что число Рейнольдса приближается к единице для масштабов

$$l_{\text{вн}}^{(1)} \sim l_0 \left( \frac{v_0 l_0}{\nu} \right)^{-3/4}. \quad (15)$$

Помимо  $l_{\text{вн}}^{(1)}$ , существуют еще два внутренних масштаба, указывающих на нарушение двумерности, которое может иметь место по следующим причинам:

- 1) в малых масштабах нарастает величина  $v^2/(l\Omega)$ , так что нарушается условие запрета изгибов трубок,
- 2) в тонких трубках становится возможной вязкая диффузия жидкости поперек  $\Omega$ .

Первый процесс начинает играть роль при

$$l \lesssim \sqrt{\frac{v_0^3}{l_0 \Omega^3}} \equiv l_{\text{вн}}^{(2)}, \quad (16)$$

а второй — при

$$l \lesssim \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \equiv l_{\text{вн}}^{(3)}. \quad (17)$$

Если

$$l_{\text{вн}}^{(1)} > l_{\text{вн}}^{(2)}$$

и

$$l_{\text{вн}}^{(1)} > l_{\text{вн}}^{(3)},$$

то турбулентность двумерна во всех масштабах. Оказывается, что оба эти условия сводятся к одному и тому же неравенству:

$$\gamma < K^{-2/5} \left( K = \frac{a^3 \Omega}{\nu} \right). \quad (18)$$

Здесь  $\gamma$  определяется соотношением (3). Безразмерный параметр  $K$  является одной из основных характеристик задачи. Так, число Рейнольдса в основном масштабе выражается через  $K$  и  $\gamma$ :

$$R \sim K \gamma^{3/2}. \quad (19)$$

Развитая турбулентность имеет место при  $R \gg 1$ , т. е.  $K$  должно быть очень большим.

## 2. Турбулентная теплопроводность и установившееся распределение температур

При развитой турбулентности движение отдельных участков жидкости с размером  $l \sim l_{\text{вн}}^{(1)}$  сходно с хаотическим движением молекул газа. Роль длины свободного пробега играет основной масштаб  $l_0$ , а роль средней тепловой скорости —  $v_0$ . В нашем случае, когда радиальный градиент температуры  $\Theta(r)$  мало меняется на расстояниях порядка  $l_0$ , должно хорошо выполняться уравнение турбулентной теплопроводности.

Если за «время свободного пробега»  $\tau_0 \sim l_0/v_0$  в объеме с размером  $l \sim l_{\text{вн}}^{(1)}$  устанавливается тепловое равновесие, то коэффициент турбулентной теплопроводности  $\chi_{\text{турб}}$  определяется:

$$\chi_{\text{турб}} \sim l_0 v_0 \quad (20)$$

и оказывается равным турбулентной кинематической вязкости  $\nu_{\text{турб}}$ . Соответствующее условие сводится к неравенству

$$P^2 < R, \quad (21)$$

где  $P = \nu/\chi$  — число Прандтля ( $\chi, \nu$  — обычные молекулярные коэффициенты диссипации).

Если же это условие нарушено, то в теплопередаче участвует лишь некоторая эффективная часть общего объема жидкости и  $\chi_{\text{турб}} < \nu_{\text{турб}}$ . По-видимому, конвекция при таких условиях не может быть стационарной. Пусть в начальный момент времени существовало изэнтропическое распределение температур, которое затем нарушается под действием источников тепла. Возникающая конвекция сначала будет ламинарной, а затем по мере нагрева может турбулизироваться. Быстрое нарастание эффективной вязкости приведет к остановке движения вблизи устойчивого равновесия. Если  $\chi_{\text{турб}} \ll \nu_{\text{турб}}$ , то в течение некоторого времени конвекция будет отсутствовать, так как за время остановки движения распределение температуры не успеет вернуться к исходному (соответствующему конвективной неустойчивости). Численный расчет показывает [5], что в ламинарном случае при больших  $P$  конвекция действительно носит автоколебательный характер. Вероятно, то же самое будет иметь место в турбулентном случае, когда  $P_{\text{турб}} \gg 1$ . В данной работе предполагается, что конвекция стационарна, т. е.  $P^2 < R$ .

Пусть плотность источников тепла превышает необходимую для поддержания изэнтропического градиента температуры плотность на величину  $Q$ . Уравнение турбулентной теплопроводности имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \sqrt{a^2 - r^2} \chi_{\text{турб}} \Theta(r) \right\} = \frac{Q}{C\rho} \sqrt{a^2 - r^2}. \quad (22)$$

Здесь  $C$  — удельная теплоемкость;  $\Theta(r) = 0$  при  $r = 0$ .

Выражая  $\chi_{\text{турб}}$  через  $v_0$  и  $l_0$  посредством (3), (4), после интегрирования получим:

$$\gamma(x) = \frac{g_0 \beta \Theta(x)}{\Omega^2} \approx \left( \frac{g_0 \beta Q}{\rho C a \Omega^3} \right)^{2/5} \left[ \frac{1 - (1 - x^2)^{3/2}}{\sqrt{x}} \right]^{2/5} \frac{1}{1 - x^2} \quad \left( x = \frac{r}{a} \right). \quad (23)$$

Безразмерное число

$$q = \frac{g_0 \beta Q}{\rho C a \Omega^3} \quad (24)$$

наряду с  $K$  и  $P$  полностью определяет режим. Существенно, что в (23) не входит вязкость, а зависимость результата от неопределенных числовых множителей теории турбулентности резко снижается за счет извлечения корня. Известно, что (20) дает завышенное значение  $\chi_{\text{турб}}$  (вплоть до 1000 раз) [3, § 31]. Однако  $\gamma(x)$  определяется с точностью до множителя порядка 10, т. е. (23) дает порядок величины  $\Theta(r)$ .

Из (23) видно, что  $\gamma(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 1$ . При  $(1 - x^2) \rightarrow 0$  изложенные результаты теряют силу. Но при малых  $q$  это нарушение имеет место лишь в тонком экваториальном поясе. Там, где справедлива основная формула (1) (т. е. при  $x \lesssim 0,99$ ), результаты верны.

Выразим  $l_0$  и  $v_0$  через  $q$ :

$$l_0(x) \approx a q^{1/5} \left[ \frac{1 - (1 - x^2)^{3/2}}{\sqrt{x}} \right]^{1/5} \sqrt{\frac{1 - x^2}{x}}, \quad (25)$$

$$v_0(x) \approx a \Omega q^{2/5} \left[ \frac{1 - (1 - x^2)^{3/2}}{\sqrt{x}} \right]^{2/5}, \quad (26)$$

причем  $l_0(0) \approx a q^{1/6}$ .

Значение  $l_0(x)$  монотонно падает от  $l_0(0)$  до 0 при  $x \rightarrow 0$ , а  $v_0(x)$  растет от 0 до  $a \Omega q^{2/5}$  при  $x \rightarrow 1$ . В целом  $l_0(x)$  и  $v_0(x)$  меняются весьма медленно, так что имеет смысл говорить об их средних значениях.

Число Рейнольдса в основном масштабе

$$R \sim K q^{3/5},$$

а условие стационарности (21) сводится к

$$K q^{3/5} > P^2. \quad (21')$$

Градиент температуры  $\Theta(r)$  при  $x \rightarrow 1$  растет. Турбулентная конвекция выносит тепло в тонкий экваториальный пояс, откуда оно отводится обычной теплопроводностью.

### 3. Роль теплопередачи, параллельной оси вращения

В [1] было показано, что при наличии сверхизэнтропического градиента температуры вдоль  $\Omega$  возникают колебания вдоль оси  $z$ . Поперечный период таких колебаний

$$l_z \approx \sqrt{\frac{g_0 \beta \Theta_z}{\Omega^2}} a.$$

В дальнейшем аналогично (3) положим

$$\frac{g_0 \beta \Theta_z}{\Omega^2} \equiv \gamma_z.$$

Амплитуда колебаний порядка  $a$ , скорость  $v_z \sim a \Omega \sqrt{\gamma_z}$ . Эти результаты были получены в приближении идеальной жидкости и, следовательно, справедливы лишь при достаточно больших масштабах  $l_z$ ; конвекция вдоль оси  $z$  в тонких трубках, где существенна вязкость (режим Чандрасекара), будет рассмотрена ниже.

Анизотропия движения приведет к анизотропному распределению температуры:  $\Theta_z \ll \Theta_r$ , что связано с возникновением при колебаниях поперечного градиента  $\Theta'_r \gg \Theta_z$ . Действительно, при колебаниях слои жидкости с различными температурами оказываются попеременно ориентированными либо параллельно, либо перпендикулярно оси  $z$  [1, фиг. 2]. В первом случае разность температур у поверхности шара и в его центре  $\sim \Theta_z a$ . Во втором случае изменение температуры на такую же величину происходит на расстоянии  $\sim l_z$ . Градиент  $\Theta'_r$ , следовательно, будет  $\sim \Theta_z a / l_z \gg \Theta_z$ .

Если  $\Theta'_r \gg \Theta_r$ , то возникает возмущение стационарного режима рассмотренной выше поперечной конвекции и начнется интенсивное размешивание  $\Theta'_r$ . Покажем, что время размешивания

$$\tau_p \ll \tau_z \quad \left( \tau_z \sim \frac{a}{v_z} \sim \frac{1}{\Omega \sqrt{\gamma_z}}; \tau_p \sim \frac{l_z}{v_r} \right).$$

Здесь  $\tau_z$  — характерное время колебаний вдоль оси  $z$ , а  $v_r$  — порядок величины скорости поперечного движения под действием  $\Theta'_r$ , т. е.

$$v_r \sim a \Omega \sqrt{\frac{a}{l_z} \gamma_z}; \quad \tau_p \sim \frac{1}{\Omega \gamma_z^{1/4}}.$$

Отсюда

$$\frac{\tau_p}{\tau_z} \sim \gamma_z^{1/4} \ll 1.$$

Размешивание прекращается при  $\Theta'_r \sim \Theta_r$ . Это будет иметь место, если

$$\Theta_z \sim \gamma \Theta_r \ll \Theta_r, \quad (27)$$

где  $\Theta_r$  дается (23), а  $\gamma$  определяется из соотношения (3).

Помимо рассмотренных выше колебаний, существует иной механизм теплопередачи вдоль оси  $z$ , обусловленный вязкостью. Рассматривая конвекцию во вращающемся плоском слое, Чандрасекар [2] нашел, что в случае слабого перегрева неустойчивость возможна лишь в очень тонких трубках  $\Omega$ , где вязкие натяжения превалируют над силами Кориолиса. Радиус таких трубок  $r_0$  определяется соотношением

$$r_0 \sim a K^{-1/3}, \quad (28)$$

а градиент температуры на границе устойчивости

$$\Theta_z = c \frac{\kappa \nu}{g_0 \beta a^4} K^{4/3}, \quad (29)$$

где  $c$  — безразмерная константа порядка 100.

При этом вращение не играет роли, и конвекция протекает так же, как в неподвижной тонкой трубе.

Рассмотрим устойчивость режима Чандрасекара, воспользовавшись исчерпывающим анализом конвекции в тонких трубках, проведенным Г. А. Остроумовым [6]. Как следует из [6], в нулевом приближении по  $r_0/L \ll 1$  ( $r_0$  — радиус,  $L$  — длина трубы) задача о конвекции сводится к линейным уравнениям и допускает точное решение. При наличии однородного поля тяжести  $g_0$  вдоль оси трубы  $\Theta_r$  не зависит от потока тепла [ср. с (28) и (29)]

$$\Theta_r = c \frac{\kappa \nu}{g_0 \beta r_0^4}. \quad (30)$$

В рассматриваемом случае, когда  $g$  зависит от координат, результаты (6) сохраняют силу лишь качественно, поэтому ниже выписаны упрощенные формулы, справедливые только по порядку величины. Так, поперечный градиент  $\Theta'_r$  связан со скоростью  $v_z$  соотношением:

$$\Theta'_r \sim \frac{\nu v_z}{g_0 \beta r_0^3}.$$

Подставив  $r_0$  из (26), получим:

$$\Theta'_r \sim \frac{\Omega v_z}{g_0 \beta a}.$$

Поток тепла вдоль оси  $z$  будет порядка  $\rho c v_z \Theta'_r r$ . Приравнявая его тепловыделению в столбе с высотой  $\sim a$  в секунду, оценим  $v_z$ :

$$v_z \sim \sqrt{q} K^{1/6} a \Omega,$$

где  $q$  и  $K$  даются (18) и (24). Отсюда

$$\Theta'_r \sim \frac{\Omega^2}{g_0 \beta} \sqrt{q} K^{1/6}. \quad (31)$$

Режим Чандрасекара заведомо неустойчив, если  $\Theta'_r$  может вызвать поперечную конвекцию. Соответствующее условие [3, § 56] имеет вид:

$$\frac{g_0 \beta \Theta'_r r_0^4}{\kappa \nu} \gtrsim 1000.$$

Следовательно, достаточным условием неустойчивости режима Чандрасекара является соотношение

$$PK^{5/6} \sqrt{q} > 1000. \quad (32)$$

В действительности, по-видимому, условие неустойчивости режима Чандрасекара менее жестко:  $\Theta'_r > \Theta_r$  или

$$q^{1/5} K^{1/3} > 1, \quad (33)$$



так как в этом случае режим двумерной турбулентности требует меньшего перегрева, и следовательно, протекает при меньшей потенциальной энергии шара. Отметим, что при  $P > 1$  (33) автоматически вытекает из условия стационарности (21).

#### 4. Приложения к земному ядру

Проанализируем следствия наших результатов применительно к земному ядру. Изложенная теория основана на представлениях о примерно однородном распределении вязкости по объему шара и поэтому не учитывает наличия внутреннего ядра. Однако ввиду сравнительной малости последнего можно надеяться, что результаты сохраняют силу (по крайней мере, качественно).

Из нужных нам параметров ядра точно известны радиус  $a \approx 3 \cdot 10^8$  см,  $\Omega \approx 10^{-4}$  с $^{-1}$ ,  $\rho \approx 10$  г/см $^3$  и  $C \approx 0,1$  кал/г · град. Если принять гипотезу металлического ядра, то можно ожидать, что  $\chi$  будет порядка 1 см $^2$ /с, так как, с одной стороны, температура в ядре примерно в 10 раз больше, чем в обычных условиях (и во столько же раз уменьшается  $\chi$ ), а с другой — граничная энергия Ферми вырожденного электронного газа за счет давления возрастает в 6–7 раз, что приводит к 25–50-кратному увеличению длины свободного пробега активных электронов и к 2-кратному увеличению их скорости. Так что в результате  $\chi$  в ядре будет в 5–10 раз больше, чем при нормальных условиях (0,1–0,7 см $^2$ /с в случае металлов). Коэффициент  $\beta$  в обычных условиях  $\sim 10^{-5}$  1/град. При больших давлениях он, по-видимому, несколько уменьшается. Будем считать, что  $\beta \sim 10^{-6}$  1/град. Сверхизэнтропическую плотность источников тепла  $Q$  можно довольно точно оценить из сопоставления данных по геотермическому градиенту с условием существования конвекции. Верхний предел значений  $Q$  можно получить, считая, что все источники тепла, создающие геотермический градиент, находятся в ядре. Отсюда  $Q \lesssim 4 \cdot 10^{-14}$  кал/(см $^2$  · с). С другой стороны, для создания сверхизэнтропического градиента нужно, чтобы

$$-\Theta = \frac{Qr}{3\rho C\kappa} > \frac{g_0\beta T_0 r}{C a},$$

где  $T_0 \sim 3000^\circ$  С — средняя температура в ядре. При наших данных следует, что  $Q \gtrsim (1/3) \cdot 10^{-14}$  кал/(см $^2$  · с). Таким образом, порядок величины  $Q$  есть  $10^{-14}$  кал/(см $^2$  · с).

Число  $q$  при этих значениях параметров  $\sim 10^{-12}$ – $10^{-13}$ , так что основной масштаб  $l_0 \sim 3 \cdot 10^6$  см,  $v_0 \sim 1$ –3 см/с, а  $R \sim (10^6$ – $10^7)/\nu$ . Из условия стационарности находим, что наш режим осуществляется при  $\nu \lesssim 100$  см $^2$ /с. Из данных сейсмологии следует, что в ядре  $\nu \lesssim 10^8$  см $^2$ /с [7], однако нижний предел не известен, и многие авторы (в первую очередь занимающиеся проблемами геомагнетизма) полагают  $\nu \sim 0,1$ – $0,01$  см $^2$ /с.

При больших  $\nu$ , когда  $1 < R < P^2$  конвекция, по-видимому, остается двумерной, но имеет автоколебательный характер. При  $R \lesssim 1$  (см. (32)) возникает режим Чандрасекара [2]. При этом должно быть  $\nu \gtrsim 10^6$  см $^2$ /с.

В заключение благодарю академика М. А. Леонтовича за интерес к работе, обсуждение связанных с нею вопросов и ряд ценных указаний.

#### Литература

1. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. 1, 629 (1961).
2. Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. 217, 306 (1953).

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
4. Кадомцев Б. Б. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 4, М.: Изд. АН СССР, 1958.
5. Латынина Л. А. Изв. АН СССР, сер. геофиз. 7, 1085 (1958).
6. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехиздат, 1952.
7. Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. М.: ИЛ, 1960.

# МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРЕ\*

## Аннотация

Рассмотрены магнитогидродинамические явления, возникающие в присутствии слабого магнитного поля при двумерной турбулентной конвекции во вращающемся гравитирующем шаре [1, 2]. Показано, что при выполнении условий замороженности силовых линий в вещество  $4\pi\sigma\alpha V/c^2 \gg 1$  и затухания спонтанного поля Бечлора  $4\pi\sigma\nu/c^2 < 1$  в течение короткого промежутка времени (порядка периода движения в основном масштабе турбулентности) силовые линии поля оказываются ориентированными вдоль оси вращения. Исследовано распределение магнитного потока  $\Phi$  по сечению шара. Вычислен дипольный момент, соответствующий данному  $\Phi$ . Рассмотрен механизм обратного воздействия поля на движение.

В работах [1, 2] было показано, что существует определенная область значений параметров, для которой конвекция во вращающемся гравитирующем шаре имеет характер двумерной турбулентности (если ось  $z$  направить вдоль оси вращения  $\Omega$ , то  $x$ - и  $y$ -компоненты скорости не зависят от  $z$ , а движение вдоль оси  $z$  сводится к однородным деформациям вследствие непараллельности границ). В случае земного ядра условия существования указанного режима фактически сводятся к требованию, чтобы вязкость  $\eta$  была меньше или порядка 1000 пуаз. Разумная экстраполяция экспериментальных [3] и теоретических [4] результатов зависимости вязкости от давления показывает, что в случае металлического ядра вязкость вполне может быть меньшей 1000 пуаз (см. Приложение), и, следовательно, конвекция в ядре может иметь характер двумерной турбулентности.

В этих условиях возникает вопрос о возможности генерации и поддержания геомагнитного поля с помощью рассматриваемого типа движений. Настоящая работа посвящена предварительному рассмотрению магнитогидродинамических свойств двумерной турбулентности в шаре и в первую очередь выяснению возможности существования регулярного поля при таких движениях.

## Магнитное поле при двумерной турбулентности

Если жидкость, участвующая в турбулентном движении с основным масштабом  $l_0$  и со скоростью в основном масштабе  $v_0$  имеет проводимость  $\sigma$ , причем  $4\pi\sigma\nu_0 l_0/c^2 \gg 1$ , то силовые линии магнитного поля  $\mathbf{H}$  интенсивно увлекаются жидкостью. При этом возникает ряд магнитогидродинамических эффектов.

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 2. № 2. 326–331 (1962).

В случае

$$\frac{H^2}{4\pi} \ll \rho v_0^2$$

( $\rho$  — плотность жидкости) обратное влияние поля на движение несущественно, и магнитогидродинамические явления описываются уравнениями [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Магнитогидродинамические явления, сопровождающие развитую трехмерную турбулентность, были рассмотрены Бечлором [6]. В частности, было показано, что если

$$\frac{4\pi\sigma\nu}{c^2} > 1, \quad (3)$$

то возникает спонтанное магнитное поле, сохраняющее корреляцию на расстояниях порядка внутреннего масштаба турбулентности  $l_{\text{вн}}$  и несущее энергию порядка энергии движения во внутреннем масштабе.

Если же  $4\pi\sigma\nu/c^2 < 1$ , то начальное поле быстро дробится на замкнутые петли малого масштаба и затухает. Один из механизмов такого дробления рассмотрен в [7] и состоит в неустойчивости сильно вытянутых при движении силовых линий поля.

Рассмотрим воздействие на поле двумерной турбулентности. Считаем, что скорость движения  $\mathbf{v}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_r &= v_r(r, \varphi, t), \\ v_\varphi &= v_\varphi(r, \varphi, t), \\ v_z &= v_r(r, \varphi, t) \frac{dz_0}{dr} \frac{z}{z_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты с осью  $z$  вдоль оси вращения;  $z_0 = z_0(r)$  — уравнение границы (в случае шара  $z_0 = \pm\sqrt{a^2 - r^2}$ , где  $a$  — радиус шара).

Представим  $\mathbf{H}$  в виде суперпозиции двух полей  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{H}_1$ :

$$H_{0z} = \frac{1}{2z_0} \int_{-z_0}^{+z_0} H_z dz, \quad H_{0x} = H_{0y} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0. \quad (6)$$

Из (5) видно, что  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , так как  $\partial H_{0z}/\partial z = 0$ . Подставим (5) и (6) в (1) и усредним по  $z$  от  $-z_0(r)$  до  $+z_0$  учитывая (4):

$$\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}_0] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}_0 + \frac{e_z}{2z_0} \int_{-z_0}^{+z_0} \left\{ (\text{rot} [\mathbf{vH}_1])_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} (\Delta \mathbf{H}_1)_z \right\} dz, \quad (7)$$

где  $e_z$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ .

Вычитая (7) из (1), получим уравнение для  $H_1$ :

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}H_1] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta H_1 - \frac{e_z}{2z_0} \int_{-z_0}^{+z_0} \left\{ (\text{rot} [\mathbf{v}H_1])_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma}(\Delta H_1)_z \right\} dz. \quad (8)$$

Следует отметить, что в (8) не входит  $H_0$ , поэтому эволюция поля  $H$  — не зависит от наличия усредненного по  $z$  поля. Двумерный характер турбулентности не может сколько-нибудь заметно сказаться на пространственной и временной зависимости  $H_1$ , если только  $H_1$  не является плоским полем<sup>1)</sup>, так как механизм разрушений корреляции  $H_1$  остается тем же, что и в трехмерном случае. В частности, если  $4\pi\sigma\nu/c^2 < 1$ , то в течение времени  $\tau_0 \sim l_0/v_0$  поле  $H_1$  оказывается разбитым на замкнутые петли с масштабом  $\sim l_{\text{ВН}}$  и затем затухает в течение времени  $\tau_1 \sim 4\pi\sigma l_{\text{ВН}}/c^2$  (так как  $4\pi\sigma/c^2 < \nu$ , то  $\tau_1$  меньше времени существования вихря с масштабом  $l_{\text{ВН}}$ ). В свою очередь  $\tau_{\text{ВН}} \ll \tau_0$  поэтому время существования поля  $H_1$  определяется при  $4\pi\sigma\nu/c^2 < 1$  величиной  $\tau_0$ . Согласно [2],  $\tau_0$  в земном ядре порядка  $10^6$  с. Следовательно, время существования поля типа  $H_1$  в земном ядре составляет лишь несколько месяцев.

Поскольку поле  $H_1$  не может существовать, в (7) следует положить  $H_1 = 0$ . Учитывая, что  $H_0$  имеет лишь  $z$ -компоненту (так же, как и  $\text{rot} [\mathbf{v}H_0]$ ), в дальнейшем обозначим  $H_0$  через  $H$ , опустив знак вектора. Тогда (7) примет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = H \frac{\partial v_z}{\partial z} - (\mathbf{v}_{\perp} \nabla H) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H, \quad (9)$$

где  $\mathbf{v}_{\perp}$  — совокупность  $v_r$  и  $v_{\varphi}$ .

Если турбулентность двумерна повсюду, то затухание поля будет определяться турбулентной диффузией с коэффициентом переноса  $\sim l_0 v_0$ . Время затухания по порядку величины

$$\tau \sim \frac{a^2}{l_0 v_0} \gg \tau_0 = \frac{l_0}{v_0}. \quad (10)$$

Таким образом, время существования регулярного поля много больше времени существования пульсационного поля типа  $H_1$ .

Если же (что имеет место в действительности) при  $r \rightarrow a$  турбулентность утрачивает двумерный характер и приближается к изотропной, вблизи экватора шара возникает тонкий слой, обладающий свойствами сверхпроводника [5]. При этом изменения магнитного потока через шар определяются флуктуативными движениями в экваториальном поясе, имеющими малую вероятность. В первом приближении можно считать, что магнитный поток сохраняется. Распределение потока по сечению шара для этого случая будет рассмотрено в следующем разделе<sup>2)</sup>.

Вблизи границы шара поле непрерывно переходит в потенциальное. При этом появляются  $\varphi$ - и  $r$ -компоненты поля. Переход осуществляется в слое, толщина

<sup>1)</sup> В последнем случае поле  $H_1$  затухает при любых соотношениях между  $\sigma$  и  $\nu$  [8].

<sup>2)</sup> При определенных условиях флуктуативные движения в экваториальном поясе могут привести к генерации поля. Этому вопросу посвящена следующая работа.

которого  $\delta$  порядка глубины проникновения поля в проводник за время порядка  $\tau_0 \sim l_0/v_0$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2 \tau_0}{4\pi\sigma}}. \quad (11)$$

На больших глубинах, где выполняется условие вмороженности,  $\varphi$ - и  $r$ -компоненты быстро разрушаются турбулентностью.

В металлическом ядре (см. Приложение)  $\sigma \sim 10^{18} \text{ с}^{-1}$ . При  $\tau_0 \sim 10^6 \text{ с}$  значение  $\delta \sim 10^4 \text{ см}$ . Естественно, что пограничным слоем столь малой толщины можно пренебречь и аппроксимировать его поверхностными токами. Для вычисления внешнего поля следует потребовать в этом случае лишь непрерывности нормальной компоненты.

### Распределение магнитного потока по сечению шара

Если внутри шара создано магнитное поле  $H$ , то, согласно предыдущему, его силовые линии будут быстро ориентированы вдоль оси  $z$ . Изотропная турбулентность в экваториальном поясе способствует сохранению магнитного потока. Таким образом, поток  $\Phi$  через экваториальную плоскость остается постоянным. Оказывается, что задание  $\Phi$  однозначно определяет стационарное поле в шаре.

Из соображений симметрии ясно, что в этом случае  $H = H(r)$ . При не слишком сильной зависимости  $H$  от  $r$  в (9) можно пренебречь диссипативным членом и (9) принимает вид:

$$v_r \left( \frac{dH}{dr} - \frac{H}{z_0} \frac{dz_0}{dr} \right) = 0, \quad (12)$$

откуда

$$H = cz_0(r) = c\sqrt{a^2 - r^2}, \quad (13)$$

т.е.  $H$  оказывается пропорциональной высоте соответствующей силовой трубки  $\Omega$ . При этом, естественно, перестановка соседних трубок не меняет распределения поля.

Постоянная  $c$  в (13) определяется по заданному потоку  $\Phi$ :

$$\Phi = 2\pi c \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \frac{2}{3} \pi c a^3$$

или

$$c = \frac{3}{2\pi a^2} \Phi. \quad (14)$$

Следовательно,

$$H = \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}. \quad (15)$$

При помощи (15) легко оценить порядок величины поправки  $h$ , возникающей за счет диссипации:

$$|\text{rot} [\mathbf{vh}]| \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H \quad \text{или} \quad vh \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot } H,$$

откуда

$$h \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma v} \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a^2} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2/a^2}}$$

и становится сравнимым с  $H$  при

$$1 - \frac{r^2}{a^2} \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma va}. \quad (16)$$

При  $\sigma = 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ,  $v \sim 1 \text{ см/с}$ ,  $a \approx 3 \cdot 10^8 \text{ см}$  слой  $\delta_1$  (где  $h \sim H$ ) имеет толщину  $\sim 10^{-6}a$  и явно тоньше экваториального пояса, где турбулентность становится трехмерной. Поэтому диссипативную поправку можно не учитывать.

Вычислим поле вне шара. Для этого заметим, что нормальная компонента поля на поверхности шара  $H_R$  равна

$$H_R = \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a^2} \cos \theta |\cos \theta|, \quad (17)$$

где  $\theta$  — полярный угол в сферических координатах. Ищем потенциал поля  $U$  вне шара в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$U = \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(n+1) \left(\frac{a}{R}\right)^{n+2} P_n(\cos \theta). \quad (18)$$

Отсюда

$$H_R|_{R=a} = - \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{R=a} = \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(n+1) \left(\frac{a}{R}\right)^{n+2} P_n(\cos \theta).$$

Определяем  $C_n$  обычным способом:

$$C_{2k+1} = \frac{4k+3}{2(k+1)} \int_0^1 P_{2k+1}(x) x^2 dx, \quad C_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Получаем

$$C_1 = \frac{3}{8}, \quad C_3 = \frac{7}{96}, \quad C_5 = \frac{11}{1152}, \quad \dots$$

Таким образом, поле вне шара близко к дипольному даже у поверхности ядра. Дипольный момент

$$M = \frac{9}{16\pi} \Phi a. \quad (20)$$

В заключение вычислим внешнее поле у полюсов и экватора. В обоих случаях оно направлено вдоль оси  $z$ :

$$H_z|_{\theta=0} = \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a^2}, \quad (21)$$

$$H_z|_{\theta=\pi/2} = -0,27 \cdot \frac{3}{2\pi} \frac{\Phi}{a^2}. \quad (22)$$

#### Обратное воздействие поля на движение

Механизм обратного влияния поля на движение в случае двумерной турбулентности имеет некоторые особенности. Легко видеть, что силы взаимодействия токов в объеме шара имеют потенциал, так как они направлены вдоль цилиндрического

радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и зависят только от  $r$ . Поэтому магнитные силы приводят лишь к перераспределению давления.

Объемные силы взаимодействия токов могут существенно влиять на конвекцию лишь в случае, когда  $[\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] \sim g\rho$ . При этом плотность магнитной энергии была бы много больше плотности кинетической энергии в основном масштабе турбулентности. Однако в действительности существует иной, значительно более эффективный механизм обратного воздействия поля на движение, связанный с взаимодействием поверхностных токов.

Рассмотрим силовую трубку поля с сечением  $S$ . Ее можно считать соленоидом и, следовательно, приписать ее концам «магнитные заряды» противоположного знака. Величина заряда  $\mu$  определяется по теореме Гаусса:

$$\mu = \frac{HS}{4\pi}. \quad (23)$$

Сила взаимодействия зарядов с магнитным полем у поверхности шара  $H_s$  равна

$$2H_s\mu = \frac{HS}{2\pi}H_s \quad (24)$$

и стремится вытолкнуть трубку из шара. Условие малости обратного влияния поля на движение состоит в том, чтобы средняя скорость, приобретаемая трубкой под действием силы (24) за время движения в основном масштабе, была много меньше скорости в основном масштабе.

Учитывая, что масса трубки  $\rho Sl$  ( $l$  — ее длина), и что  $\tau_0 \sim l_0/v_0$ , получаем, что указанное условие сводится к требованию

$$\frac{HH_sS}{4\pi\rho Sl}\tau_0 \ll v_0$$

или

$$\frac{HH_s}{4\pi\rho} \ll \rho v_0^2. \quad (25)$$

Условие (25) соответствует обычному условию малости магнитной энергии в сравнении с кинетической. Отсюда следует, в частности, что если механизм генерации и поддержания геомагнитного поля связан с двумерной турбулентностью, то напряженность поля в ядре должна быть порядка 5–10 Гс (так как, согласно [2],  $v_0 \sim 1$  см/с,  $\rho \sim 10$ ). Приведенная оценка находится в хорошем согласии с наблюдаемым у поверхности Земли значением  $H$ . Действительно, как видно из предыдущего раздела, поле в случае двумерной турбулентности близко к дипольному. Поскольку радиус ядра примерно равен половине земного радиуса, поле у поверхности Земли должно быть в восемь раз слабее, чем в ядре, и, следовательно, иметь напряженность около 0,5–1 Гс.

## Приложение

### О коэффициентах переноса в земном ядре

Оценка большинства материальных констант вещества в земном ядре в настоящее время может быть проведена лишь на основе косвенных, в основном теоретических соображений. Исходным пунктом для оценок должны служить некоторые представления о состоянии вещества в ядре. Отсутствие в ядре поперечных



упругих волн указывает на то, что вещество ядра является жидкостью с аномально малой (для огромных давлений внутри Земли) вязкостью.

Эксперимент показывает [3], что аномально малая зависимость вязкости от давления наблюдается лишь у расплавленных металлов. Такой вывод в применении к ядру находится в соответствии как с теорией железного ядра [9], так и с теорией фазового перехода [10], так как, согласно обеим точкам зрения, ядерное вещество находится в металлическом состоянии.

Оценка вязкости вещества в ядре, приводимая ниже, основана на теории жидкости, развитой Френкелем [4]. Согласно этой теории, зависимость вязкости от давления может быть представлена в виде:

$$\nu = \nu_0 \exp \left\{ \frac{\rho \delta V}{kT} \right\}, \quad (I)$$

причем константа  $\nu_0$  выражается через скорость поперечного звука  $u_0$  и период колебания иона в решетке  $\tau_i$ :

$$\nu_0 = u_0^2 \tau_i. \quad (II)$$

Значение  $\nu_0$  для весьма широкого класса веществ (включая и металлы) одинаково и равно примерно  $10^{-2} - 10^{-3} \text{ см}^2 \cdot \text{с}$  [11]. Слабую зависимость вязкости металлов от давления легко понять, если учесть, что даже при нормальных условиях благодаря наличию вырожденного электронного газа в металлах существует колоссальное внутреннее давление  $p_0$  порядка  $10^6$  атм.

С другой стороны, объем  $\delta V$ , входящий в (I), весьма мал из-за сильной кулоновской экранировки полей ионов. Поэтому при изменениях давления  $\Delta p \ll p_0$  вязкость существенно не меняется и остается близкой к  $\nu_0$ . (Отметим, что в опытах Бриджмена [3] давление не превышало  $10^5$  атм.) Давление в ядре лишь в 5–7 раз превышает  $p_0$ , а  $T \approx 3000^\circ$  в 1,5 раза больше точки плавления железа. Подставляя эти значения в (I), получаем:  $\nu \sim \nu e^{4-6} \lesssim 10 \text{ см}^2/\text{с}$ . При этом 5–7-кратное увеличение (вследствие давления) граничной энергии Ферми вырожденного электронного газа приводит к увеличению коэффициентов электронного переноса (температуропроводности  $\chi$  и проводимости  $\sigma$ ). Увеличение  $\chi$  обсуждалось в [2]. Аналогичное рассмотрение приводит к выводу, что  $\sigma$  в ядре на порядок выше, чем у металлов в обычных условиях, и составляет  $\sim 10^{18} \text{ с}^{-1}$ .

### Литература

1. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. 1, 629 (1961).
2. Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. 1, 638 (1961).
3. Bridgman D. W. The physics of high pressure. Oxford: Clarendon Press, 1931.
4. Френкель Я. И. Сб. Кинетическая теория жидкости. 3, М.: Изд. АН СССР, 1960.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957.
6. Batchelor G. K. Proc. Roy. Soc. A201, 405 (1950).
7. Тверской Б. А. ДАН СССР. 143, 252 (1962).
8. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ. 31, 154 (1956).
9. Goldsmith V. M. Naturwissenschaften. 10, 918 (1922).
10. Ramsey W. Monthly Notices. Roy. Astron. Soc. 108, 406 (1948).
11. Кобеко П. П. Аморфные вещества. М.: Изд. АН СССР, 1950.

## К ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО САМОВОЗБУЖДЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ\*

### Аннотация

Рассмотрены магнитогидродинамические явления в кольцевых вихрях в проводящей жидкости. Показано, что такие вихри при больших значениях магнитного числа Рейнольдса могут существенно усиливать начальное поле, причем усиленное поле частично сохраняет регулярное распределение в пространстве и не является ортогональным к исходному полю. Поэтому тороидальный вихрь может осуществлять прямую регенерацию поля. Показано, что в проводящем шаре с пульсирующим вихрем возможно самовозбуждение. Аналогичное явление должно иметь место в плоской конвективной зоне, периодически возникающей у границы полупространства, заполненного проводящей жидкостью, с вакуумом. Указаны возможные приложения данных эффектов.

Проблема генерации регулярных магнитных полей при движении проводящей жидкости рассматривалась в [1–6]. В этих работах самовозбуждение основано на возможности резкого усиления полоидального поля при неоднородном вращении жидкости вокруг оси. Предложено несколько различных механизмов, осуществляющих регенерацию полоидального поля. Из общей теории гидромагнитного динамо с неоднородным вращением, развитой в [5, 6], следует, что регенерирующие течения не могут иметь аксиальной симметрии относительно оси неоднородного вращения.

По-видимому, неоднородное вращение не является необходимым элементом гидромагнитного динамо. С точки зрения принципов теории генерации представляет, в частности, интерес вопрос о возможности непосредственной регенерации полоидального поля. Оказывается, что этим свойством обладает широко распространенный в природе класс течений типа тороидального вихря<sup>1)</sup>. Тороидальный вихрь, как и большинство неоднородных в пространстве течений, при больших значениях магнитного числа Рейнольдса способен значительно усиливать исходное поле. При этом усиливаемое поле, во-первых, сохраняет пространственную корреляцию на расстояниях порядка масштаба вихря, во-вторых, не является ортогональным к начальному полю. Последнее обстоятельство создает условия для прямой регенерации.

Настоящая работа посвящена исследованию гидромагнитных явлений в тороидальных вихрях. В п. 1 рассмотрено усиление поля без учета диссипации. Генерация поля одиночным пульсирующим вихрем в проводящем шаре рассмотрена в п. 2.

\* Тверской Б. А. Геомагнетизм и аэрономия. Т. 6. № 1. 11–18 (1966).

<sup>1)</sup> Типичными примерами тороидальных вихрей являются конвективные ячейки Бенара, а также дымовые кольца.

Этот пример показывает, в частности, что генерация может иметь место и при аксиально симметричных течениях. В п. 3 показано, что плоская конвективная зона бенаровского типа, расположенная вблизи границы проводящего полупространства с вакуумом, при известных условиях также является гидромагнитным динамо.

### 1. Усиление поля в тороидальных вихрях

Рассмотрим простейшую модель тороидального вихря в несжимаемой жидкости, считая, что траектории жидких частиц являются концентрическими окружностями, причем совокупности линий тока определенных радиусов образуют поверхности круговых торов. Естественно ввести ортогональную тороидальную систему координат, в которой положение точки в пространстве определяется полярными координатами  $r$  и  $\chi$  в плоскости линий тока и азимутальным углом  $\varphi$ . Видно, что параметры Лямэ в этой системе координат имеют вид

$$l_r = 1, \quad l_\chi = r, \quad l_\varphi = a + r \cos \chi, \quad (1)$$

где  $a$  — радиус окружности  $r=0$ . Скорость жидкости имеет вид

$$V_r = V_\varphi = 0, \quad V_\chi = V_0(r) \left( 1 + \frac{r}{a} \cos \chi \right)^{-1}.$$

Зависимость от  $\chi$  определяется из условия несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r(a + r \cos \chi)} \frac{\partial V_\chi (a + r \cos \chi)}{\partial \chi} = 0.$$

При некотором  $r = r_0 < a$  функция  $V_0(r)$  обращается в нуль, и всюду вне поверхности  $r = r_0$  скорость равна нулю.

Пусть движение возникает при  $t=0$  и имеет большое магнитное число Рейнольдса  $R_m = 4\pi\sigma\bar{V}_0 r_0 / c^2$ , где  $\sigma$  — проводимость жидкости,  $\bar{V}_0$  — среднее значение модуля скорости. Тогда в течение некоторого времени, порядок величины которого указан ниже (см. (16) и далее), можно пренебречь диссипацией. В случае слабого поля (что предполагается всюду в данной работе) динамика  $\mathbf{H}$  определяется законом индукции  $\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{V} \mathbf{H}]$  или в компонентах

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = - \frac{V_0(r)}{r \left( 1 + \frac{r}{a} \cos \chi \right)} \frac{\partial H_r}{\partial \chi}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H'_\varphi}{\partial t} = - \frac{V_0(r)}{r \left( 1 + \frac{r}{a} \cos \chi \right)} \frac{\partial H'_\varphi}{\partial \chi}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_\chi}{\partial t} = \frac{1}{a + r \cos \chi} \left[ V_0(r) \frac{\partial H'_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial}{\partial r} V_0(r) H_r \right]. \quad (4)$$

Положив

$$H_\varphi = \left[ 1 + \left( \frac{r}{a} \right) \cos \chi \right] H'_\varphi,$$

мы свели уравнение для  $H_\varphi$  к виду (2). Видно, что общими решениями (2) и (3) будут произвольные функции величин  $\varphi$  и  $\Omega(r)t - \chi - (r/a) \sin \chi$ , где  $\Omega(r) = V_0(r)/r$ .

Однако удобнее свести решение к совокупности частных решений, воспользовавшись методом разделения переменных. Ищем решение (2), (3) в виде

$$f(r, \chi) \exp \{im\varphi + i\omega t\}.$$

Имеем

$$f(r, \chi) = A(r) \exp \left\{ -\frac{i\omega}{\Omega(r)} \left( \chi + \frac{r}{a} \sin \chi \right) \right\}, \quad (5)$$

причем из условия периодичности по  $\chi$  следует, что при данном  $r$  частоты  $\omega$  имеют дискретный спектр значений  $\omega_n(r) = n\Omega(r)$ , где  $n$  может принимать любые целочисленные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , включая 0.

Функции

$$f_n = \exp \left\{ -in \left( \chi + \frac{r}{a} \sin \chi \right) \right\} \quad (6)$$

ортогональны по  $\chi$  с весом  $(1 + (r/a) \cos \chi)$

$$\int_0^{2\pi} f_n f_{n'} \left( 1 + \frac{r}{a} \cos \chi \right) d\chi = 2\pi \delta_{nn'}. \quad (7)$$

Очевидно, что при данном  $r$  совокупность всех  $f_n$  является полной системой функций  $\chi$ , так как из  $f_n$  можно получить все гармоники Фурье. При  $n \neq 0$  решения, удовлетворяющие условию  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , имеют вид

$$\begin{aligned} H_{r_{mn}} &= A_{r_{mn}}(r) f_n(r, \chi) \exp \{i[m\varphi + n\Omega(r)t]\}, \\ H_{\varphi_{mn}} &= A_{\varphi_{mn}} f_n(r, \chi) \exp \{i[m\varphi + n\Omega(r)t]\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H_{\chi_{mn}} = & -\frac{i}{n\Omega(r)(a+r\cos\chi)} \left\{ V_0(r)imA_{\varphi_{mn}}(r) + a\frac{d}{dr}V_0(r)A_{r_{mn}} - \right. \\ & \left. -inV_0(r) \left[ \sin\chi + a\frac{d\Omega(r)}{dr} \left( \frac{1}{n\Omega} + it \right) \right] A_{r_{mn}} \right\} \exp \{i[n\Omega(r)t + m\varphi]\} f_n(r, \chi), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A_{r_{mn}}(r)$  и  $A_{\varphi_{mn}}(r)$  — произвольные функции  $r$ . Формула (9) получается при подстановке (8) в (4) и последующем интегрировании по  $t$ . Из (9) видно, что  $H_\chi(t)$  содержит осциллирующий член, амплитуда которого линейно растет со временем. Пространственный период решений по  $r$  с течением времени уменьшается из-за множителя  $\exp \{in\Omega(r)t\}$ . Так, при линейном законе изменения  $\Omega = \Omega_0(1 + r/r_0)$  количество точек, в которых некоторая компонента меняет знак, увеличивается за время  $t$  на величину  $\sim n\Omega_0 t/\pi$ .

При  $n = 0$  из (3) и (4) следует, что  $H_{r_{m0}} = H_{0r}(r)e^{im\varphi}$  и  $H'_{\varphi_{m0}} = H'_{0\varphi}(r)e^{im\varphi}$ , а из (5) получаем

$$H_{\chi_{m0}} = \left\{ H_{\chi_{m0}}|_{t=0} + \frac{t}{a+r\cos\chi} \left[ imV_0(r)H'_{0\varphi}(r) + a\frac{d}{dr}V_0(r)H_{0r}(r) \right] \right\} e^{im\varphi}. \quad (10)$$

Величины  $H_{0r}$  и  $H'_{0\varphi}$  связаны между собой и с  $H_{\chi m0}|_{t=0}$  уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r} r(a + r \cos \chi) H_{0r}(r) + imr \left(1 + \frac{r}{a} \cos \chi\right) H'_{0\varphi}(r) + \frac{\partial}{\partial x} (a + r \cos \chi) H_{\chi m0}|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

Интегрируя (11) по  $\chi$  от 0 до  $2\pi$ , получаем

$$\frac{d}{dr} r H_{0r}(r) + im \frac{r}{a} H'_{0\varphi}(r) = 0 \quad (12)$$

и

$$H_{\chi m0}|_{t=0} = -\frac{r H_{0r} \sin \chi}{a + r \cos \chi} + \frac{A_{0\chi}(r)}{a + r \cos \chi}. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10), получаем выражение для растущей со временем части  $H_{\chi m0}$

$$H_{\chi m0}(t) = \frac{ar H_{0r}(r)}{a + r \cos \chi} \frac{d\Omega(r)}{dr} t e^{im\varphi}, \quad (14)$$

откуда видно, что пространственное распределение усиливаемого поля остается неизменным. Характерное время диссипации в масштабе вихря  $\sim r_0$  есть  $\tau \sim r_0^2 \sigma / c^2$ . Поэтому результат (14) справедлив при условии  $t \ll \tau$ , или

$$H_{\chi}(t) \ll R_m H_{0r}(r). \quad (15)$$

Таким образом, при больших  $R_m$  возможно значительное усиление поля. Отметим, что решение (14) при  $m = 1$  и  $r_0 - a \ll a$  по конфигурации напоминает поле биполярной группы солнечных пятен. Как известно, движение газа в пятне относится к типу тороидальных вихрей (эффект Эвершеда). Возможно, что поля пятен создаются посредством данного механизма и в действительности характер движения определяет структуру поля, а не наоборот. Тонкая структура полей пятен при этом обусловлена возбуждением высших гармоник ( $n \neq 0$ ). Это же замечание можно отнести и к сгусткам поля в хромосфере Солнца, в которых движение происходит вдоль силовых линий. При этом поля в таких образованиях могут и не быть бессильными. Во всяком случае, представляется вероятным, что процессы усиления поля в тороидальных вихрях играют важную роль в физике Солнца.

## 2. Генерация поля в шаре с пульсирующим вихрем

Рассмотрим простейший пример, демонстрирующий возможность генерации поля с помощью тороидального вихря. Пусть в проводящем жидком шаре радиуса  $R_0$  может быть возбужден вихрь с параметрами  $r_0, a$ . Будем считать, что экваториальные плоскости вихря и шара параллельны и отстоят один от другого на расстоянии  $l$ . Помимо использованной выше системы координат  $r, \chi, \varphi$ , введем сферические координаты  $R, \theta, \varphi$  с началом в центре шара и полярной осью, проходящей через центр симметрии вихря. Азимутальные углы  $\varphi$  в обеих системах совпадают.

В отсутствие сторонних э.д.с. токи в шаре затухают, и с течением времени поле стремится к так называемому регулярному решению

$$\mathbf{H}_D = -\frac{1}{\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left( \mathbf{M}_0 \frac{\sin kR}{R} \right) \exp \left\{ -\frac{\pi c^2}{4\sigma R_0^2} t \right\}, \quad (16)$$

где  $k = \pi/R_0$ . Вне шара поле совпадает с полем диполя  $M \exp \{-\pi c^2 t / (4\sigma R_0^2)\}$  [7, с. 245–248]. Остальные гармоники затухают с большими декрементами, нежели (16), и их относительный вклад в поле с ростом  $t$  становится сколь угодно малым.

Тот факт, что с течением времени устанавливается одно и то же пространственное распределение поля, может быть использован для упрощения задачи о генерации<sup>2)</sup>. Рассмотрим цикл, на первой стадии которого в течение времени  $t_0$  существует вихрь, а на второй стадии в течение  $t$  порядка нескольких  $\tau = 4\sigma R_0^2/c^2$  движение отсутствует. При этом в начале каждого цикла поле будет иметь вид (16). Разложим это поле по гармоникам  $H_{mn}$ , введенным в п. 2. Для этого следует, во-первых, положить  $t = 0$  в  $H_{mn}$ , разложить (16) в ряд Фурье по  $\varphi$  и, наконец, разложить  $H_{m\varphi}$  и  $H_{mz}$  по функциям  $f_n(r, \chi)$ . Таким образом, определяется  $A_{r_{mn}}(r)$  и  $A_{\varphi_{mn}}(r)$ . Отсюда автоматически определится (в виде суммы по  $H_{mn}$ ) поле при  $t = t_0$ . Если обозначить через  $h_D$  векторное поле

$$h_D = \text{rot rot} \left( \mu \frac{\sin kR}{R} \right), \quad (17)$$

то значение дипольного момента  $M'$  в конце цикла будет

$$M' = \pi \frac{\int H(r, t_0) h_D dw}{\int h_D^2 dw} \exp \left\{ -\frac{\pi c^2}{4\sigma R_0^2} t_1 \right\} \quad (18)$$

(интегрирование ведется по объему шара). Поскольку  $H(r, t_0)$  пропорционально  $M_0$ , соотношение (18) сводится к  $M' = \Gamma M_0$ . Если  $|\Gamma|$  может принимать значения, большие единицы, будет иметь место генерация.

Покажем прежде всего, что при вычислении интеграла с  $H(r, t_0)$  при  $\Omega t \gg 1$  гармоники с  $n \neq 0$  не играют роли. Для этого заметим, что  $h_D$  и коэффициенты  $A_{r_{mn}}$  и  $A_{\varphi_{mn}}$  — медленно меняющиеся функции  $r$  (с масштабом  $\sim r_0$ ). Поэтому интегралы от растущих со временем частей  $H_{\chi mn}$  ( $n \neq 0$ ) по  $r$  будут иметь вид

$$I_{nr} = \bar{V}_0 t \int_0^{r_0} F(r, \chi) \begin{Bmatrix} \sin n\Omega(r)t \\ \cos n\Omega(r)t \end{Bmatrix} dr,$$

где  $F$  — медленно меняющаяся часть, а  $\sin n\Omega(r)t$  и  $\cos n\Omega(r)t$  — быстро осциллирующие функции. В случае  $\Omega = \Omega_0(1 - r/r_0)$  эти интегралы сведутся к выражениям типа

$$I'_{nr} = \bar{V}_0 t \int_0^{r_0} F(r, \chi) \sin n\Omega_0 t \cdot \frac{r}{r_0} dr \quad (19)$$

( $\bar{V}_0$  — среднее значение скорости) с коэффициентами  $\sin n\Omega_0 t$  или  $\cos n\Omega_0 t$ .

<sup>2)</sup> Впервые это обстоятельство было использовано в [3].

Для приближенного вычисления (19) можно усреднить подынтегральное выражение по отрезкам длиной  $\lambda = \frac{2\pi r_0}{n\Omega_0 t}$  и просуммировать результат

$$I'_{nr} \approx \bar{V}_{0t} \int_0^{r_0} \frac{dF}{dr} dr \frac{n\Omega_0 t}{2\pi r_0} \int_0^\lambda \rho \sin \frac{2\pi \rho}{\lambda} d\rho = \frac{2\pi r_0^2}{n} [F(0) - F(r_0)]. \quad (20)$$

Отсюда видно, что при  $\Omega_0 t \rightarrow \infty$  вклад гармоник с  $n \neq 0$  в крупномасштабном поле (с масштабом  $\gtrsim r_0$ ) не возрастает: увеличение амплитуды компенсируется уменьшением радиального масштаба.

Таким образом, для вычисления  $M'$  достаточно определить начальное значение  $H_{0r}(r)$ . Если размер вихря  $a \ll R_0$  и вихрь не находится вблизи нулевой точки поля  $h_D$ , задача значительно упрощается, поскольку поле  $h_D$  в пределах зоны движения можно считать однородным<sup>3)</sup>. Положим, что  $M_0$  параллельно экватору ( $\theta = \pi/2$ ) и лежит в плоскости  $\varphi = 0$ . Тогда

$$H_{D\varphi} = \frac{M}{\pi} \left[ \frac{k \cos kR}{R^2} + \frac{\sin kR}{R^3} (k^2 R^2 - 1) \right] \sin \varphi \quad (21)$$

и в районе вихря следует положить  $R = l$ . Вычислим  $H'_{0\varphi}(r)$

$$\begin{aligned} H'_{0\varphi}(r) &= \frac{1}{2\pi \sin \varphi} \int_0^{2\pi} H'_{D\varphi} \left( 1 + \frac{r}{a} \cos \chi \right) d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi \sin \varphi} \int_0^{2\pi} H_{D\varphi} d\chi = \frac{M}{\pi l^3} [(k^2 l^2 - 1) \sin kl + kl \cos kl]. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (12) получаем

$$H_{0r} = -\frac{M}{\pi l^3} \frac{r}{2a} [(k^2 l^2 - 1) \sin kl + kl \cos kl],$$

а из (14)

$$H_\chi(r, \chi, \varphi, t) = -\frac{r^2 \Omega_0 t M}{2\pi r_0 l^3 (a + r \cos \chi)} [(k^2 l^2 - 1) \sin kl + kl \cos kl] \cos \varphi, \quad (23)$$

и при достаточно больших значениях  $\Omega_0 t$  усиленное поле может быть сколь угодно большим. Остается показать, что при подстановке (23) в (18) интеграл в числителе не обращается тождественно в нуль. Поскольку  $H_\chi$  имеет лишь  $R$ - и  $\theta$ -компоненты, а  $h_{DR}$  и  $h_{D\theta} \sim \cos \varphi$ , ортогональность по  $\varphi$  отсутствует. Интеграл (18) в случае малого  $a$  определяется первыми членами разложения  $h_{DR}$  и  $h_{D\theta}$  в ряд Тэйлора вблизи центра вихря и не обращается в нуль нигде, за исключением двух случаев (когда вихрь находится в центре шара или на нулевой линии поля  $h_D$ ). Численное значение (18) громоздко и не представляет интереса, поскольку уже из (23), видно, что при достаточно больших  $\Omega_0 t$  величина  $\Gamma$  может быть как больше +1, так и меньше -1.

<sup>3)</sup> Отсюда следует также, что начальные значения гармоник будут много меньше  $H_{0r}$  и  $H_{0\varphi}$ . Этот вывод усиливает результат (20) о пренебрежимости вклада гармоник  $n \neq 0$  в крупномасштабном поле.

Из рассмотренного примера видно, что тороидальный вихрь может осуществлять непосредственную регенерацию полоидального поля. Интересно, что движение аксиально симметричное. Поле, разумеется, не обладает такой симметрией в согласии с теоремой Каулинга.

Разместив соответствующим образом большое число малых вихрей с определенными параметрами, можно получить усиленное поле, ортогональное соответствующему числу низших квазистационарных гармоник шара, и тем самым создать поле, сколь угодно близкое к дипольному и обладающее заданным законом изменения во времени. Отсюда следует, что чисто кинематическая постановка задачи о генерации полей реальных объектов некорректна и не дает однозначного решения.

### 3. Генерация поля в плоской конвективной зоне

Предыдущий пример показывает, что если диссипация приводит к восстановлению некоторого стандартного распределения поля, с помощью тороидальных вихрей можно осуществить эффективную регенерацию. К числу задач такого типа относится, в частности, генерация поля в проводящем полупространстве, вблизи границы которого с вакуумом периодически возникает плоская конвективная зона (решетка, состоящая из конвективных ячеек Бенара). Очевидно, что такая зона может приближенно рассматриваться как совокупность вихрей, исследованных в п. 1.

Направим ось  $x$  по нормали к границе раздела, а ось  $y$  — вдоль ожидаемого направления возбуждаемого поля. Очевидно, что асимптотическое распределение поля вблизи границы есть  $H_y = \eta x$ , где  $\eta$  не зависит от координат. Учитывая, что в конвективной зоне экваториальные плоскости вихрей параллельны границе раздела, естественно отсчитывать угол  $\varphi$  от направления  $H_y$ .

Вычислим  $H'_{0\varphi}(r)$ , исходя из поля  $H_y = \eta x$  и предполагая, что центры вихрей отстоят от плоскости  $x = 0$  на расстоянии  $a$ . Очевидно,  $x = a - r \sin \chi$ , а

$$H_\varphi = -\eta x \sin \varphi = \eta(a - r \sin \chi) \sin \varphi.$$

Отсюда

$$H'_{0\varphi} = -\frac{\eta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a - r \sin \chi) dx = -a\eta, \quad (24)$$

$$H_{0r} = \eta \frac{r}{2} \quad (25)$$

(см. (12), (14)),

$$H_\chi(t_0) = -\frac{a\eta r^2}{2r_0(a + r \cos \chi)} \Omega_0 t_0 \cos \varphi \quad (26)$$

(считаем, что  $\Omega(r) = \Omega_0(1 - r/r_0)$ ).

Найдем теперь среднее значение  $H_y(t_0)$  по слою ячейки толщиной  $dx$ . Будем считать для простоты, что ячейки имеют форму прямоугольных параллелепипедов высотой  $2a$ , в основании которых лежат квадраты со стороной  $4a$ .

Элемент объема данного слоя есть

$$dw = \frac{r(a - r \sin \chi')}{\cos \chi'} d\varphi d\chi dx$$

( $\chi' = -\pi/2 + \chi$  при  $x < a$ ,  $-3\pi/2 + \chi$  при  $x > a$ ).



Поле  $H_y = \pm H_x \cos \chi' \cos \varphi$  (плюс при  $x < a$  и минус при  $x > a$ ). Подставив сюда  $H_x$  (26), проинтегрировав по  $\chi'$  от  $+\chi_0(x)$  до  $-\chi_0(x)$ , где  $\cos \chi_0 = (a - x)/a$  при  $x < a$  и  $(2a - x)/a$  при  $x > a$ , и разделив результат на объем слоя ячейки  $\delta w = 16a^2 dx$ , получаем

$$H_y(x, t_0) = -\frac{\pi\eta(a-x)|a-x|\sqrt{2ax-x^2}}{16a^2}\Omega_0 t_0 \quad (27)$$

(для простоты положим  $r_0 = a$ ; расходимость поля в центре вихря, возникающая в этом случае, не приводит ни к каким недоразумениям и пропадает при усреднении).

Пусть, далее, в течение некоторого времени  $t_1$  порядка нескольких времен релаксации поля в слое толщиной  $2a$  конвекция отсутствует. Значение  $\eta' = \eta(t_1)$  легко получить с помощью функции источника для затухания поля в полупространстве в одномерном случае<sup>4)</sup>.

$$G(x, x', t) = \frac{+1}{2\sqrt{\pi\nu_m^2 t}} \exp\left\{-\frac{x^2 + x'^2}{4\nu_m t}\right\} \text{sh} \frac{xx'}{2\nu_m t}, \quad (28)$$

где  $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$  — магнитная вязкость. К моменту  $t_1$  в пределах конвективной зоны аргументы малы, так что имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}_y(x, t_1) &= + \int_0^{2a} \bar{H}_y(x', t_0) \zeta(x, x', t_1) dx' \approx \\ &\approx + \frac{x}{4\sqrt{\pi}(\nu_m t_1)^{3/2}} \int_0^{2a} \bar{H}_y(x', t_0) x' dx' = + \frac{\sqrt{\pi}}{240} \left(\frac{a^2}{\nu_m t_1}\right)^{3/2} \eta x \Omega_0 t_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда «коэффициент усиления»  $\Gamma = \frac{|\eta'|}{|\eta|}$  есть

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{240} \left(\frac{a^2}{\nu_m t_1}\right)^{3/2} \Omega_0 t_0. \quad (30)$$

Поле на больших расстояниях ( $x \gg a$ ) при  $\Omega_0 > 0$  и  $\Gamma > 1$  будет иметь вид

$$H(x, t) = \int_0^{2a} \bar{H}_y(\bar{x}, t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n \zeta(x, x', t - nt_1). \quad (31)$$

Можно показать, что (31) приближенно сводится к обычной диффузионной волне от точечного источника вблизи начала. Однако амплитуда этой волны растет как  $\Gamma^{t/t_1}$ . Аналогичное решение можно построить и для линейной цепочки вихрей. Решение для одиночного вихря было фактически получено в п. 2.

Отметим, что использование временного затухания для исключения мелкошабных неоднородностей поля является лишь математическим приемом, облегчающим доказательство возможности генерации. Представляется, в частности, весьма

<sup>4)</sup> Трехмерные неоднородности за это время затухнут значительно сильнее, так как они имеют больший декремент.

вероятным, что рассмотренная выше плоская конвективная зона может генерировать поле и при стационарном движении (или стационарном в среднем), причем в зависимости от направления вращения поле будет расти либо монотонно, либо с осцилляциями.

Возможно, что этот процесс компенсирует интенсивное «размагничивание» Солнца за счет корпускулярного излучения (согласно данным последних лет, солнечный ветер уносит магнитный поток  $\sim 10^{16}$  Мкс/(с · ср); при среднем поле в солнечной короне  $\sim 1$  Гс и размере короны  $\sim 10^6$  км такие потери для поддержания стационарного поля должны восполняться за  $\sim 10^7$  с).

Таким образом, тороидальные вихри являются особым классом течений, способных генерировать магнитное поле. Можно построить ряд моделей динамо, в которых данный принцип лежит в основе генерации. Поскольку кольцевые вихри широко распространены в природе, соответствующие гидромагнитные явления также должны играть важную роль.

### Литература

1. Bullard E. C., Gellman H. *Phyl. Trans. Roy. Soc.* **247**, 216 (1954).
2. Herzenberg A. *Phyl. Trans. Roy. Soc.* **250**, 543 (1958).
3. Bachus E. *Ann. Phys.* **4**, 372 (1958).
4. Parker E. *Appl. J.* **122**, 293 (1955).
5. Брагинский С. И. *ЖЭТФ.* **47**, 1098 (1964).
6. Брагинский С. И. *Геомагнетизм и аэронавигация.* **2**, 732 (1962).
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Я. *Электродинамика сплошных сред.* Гостехтеоретиздат, 1957.

# О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ АМПЛИТУДЫ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПАДАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТЬЮ\*

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 23.12.1961)

1. Известно, что при распространении акустических волн в среде с переменной плотностью скорость по мере падения плотности нарастает. Этот результат легко получить в линейном приближении, однако в случае плотности, спадающей до нуля, он сохраняет силу лишь качественно, так как скорость стремится к бесконечности и следует учитывать образование ударных волн. Соответствующее рассмотрение [1, 2] показывает, что и после образования ударной волны ускорение продолжается вплоть до расстояний порядка длины свободного пробега от области с нулевой плотностью. При наличии магнитного поля и высокой проводимости ускорение может продолжаться и до больших амплитуд, так как в этом случае уравнения аналогичны чисто газодинамическим, а характерной длиной, определяющей пределы применимости гидродинамики, является не длина свободного пробега, а ларморовский радиус ионов [3]. Этот вывод справедлив в том случае, когда магнитное давление в невозмущенных областях спадает к нулю так же, как плотность.

Если же магнитное давление спадает медленнее, то может оказаться, что наличие поля, наоборот, препятствует ускорению до больших амплитуд, так как по мере спада плотности нарастает альвеновская скорость и, следовательно, скорость отвода энергии. Благодаря этому обстоятельству исчезает причина ускорения — передача конечной энергии бесконечно убывающей массе газа.

2. Пределы ускорения при наличии магнитного поля можно оценить в рамках линейного приближения. Рассмотрим в качестве примера случай изотермической атмосферы в однородном поле тяжести  $g$ . Если направить ось  $z$  по нормали к граничной плоскости, то равновесное распределение (закон Больцмана) запишется в виде

$$\rho = \rho_0 e^{-z/z_0}, \quad p = p_0 e^{-z/z_0}, \quad z_0 = \frac{kT}{mg} \quad (1)$$

(здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура и  $m$  — масса молекулы). Считаем, что магнитное поле  $H_0$  однородно и перпендикулярно  $g$ . Предположим, что проводимость  $\sigma$  достаточно велика, так что при колебаниях выполняется условие вмороженности поля, и что диссипация, связанная с теплопроводностью и вязкостью, также незначительна.

\* Тверской Б. А. ДАН СССР. Т. 144. № 2. 338–340 (1962).

Рассмотрим малые колебания атмосферы вдоль оси  $z$  с частотами  $\omega \ll eH_0/(mc)$  ( $e$  — заряд иона,  $c$  — скорость света). При сделанных предположениях задача во всем пространстве описывается уравнениями магнитной гидродинамики (с точностью до несущественного изменения показателя адиабаты  $\gamma$  от  $5/3$  в плотных до  $2$  в разреженных слоях атмосферы).

Для монохроматических колебаний уравнения примут вид

$$\begin{aligned} i\omega v &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dz} - g \frac{\rho'}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} H_0 \frac{dH'}{dz}; & i\omega H' &= -H_0 \frac{dv}{dz}; \\ i\omega \rho' + \frac{d}{dz} v \rho &= 0; & i\omega \left( \frac{p'}{\rho} - \gamma \frac{\rho'}{\rho} \right) + v \frac{d}{dz} \ln \rho \rho^{-\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $v, p', \rho', H'$  — возмущения скорости, давления, плотности и магнитного поля; последнее уравнение выражает адиабатичность движения.

Исключая все переменные, кроме  $v$ , с учетом (1) получим

$$(\kappa^2 + e^{-\xi}) \frac{d^2 v}{d\xi^2} - e^{-\xi} \frac{dv}{d\xi} + e^{-\xi} \lambda^2 v = 0, \quad (3)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\gamma\rho_0}, \quad \xi = \frac{z}{z_0}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2 z_0}{\gamma g}. \quad (4)$$

При  $\xi = 0$ ,  $v = v_0$ , а на бесконечности должны отсутствовать источники колебаний.

В отсутствие магнитного поля ( $\kappa^2 \equiv 0$ ) имеем:

$$v = v_0 \exp \left\{ \frac{1}{2} \xi (1 - i\sqrt{4\lambda^2 - 1}) \right\}. \quad (5)$$

Это решение формально соответствует кумулятивному ускорению ( $v \gtrsim \infty$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ). Величина же  $\rho v^2$  остается ограниченной. (Разумеется, этот результат следует рассматривать лишь как чисто качественный, так как при  $v \gtrsim \sqrt{kT\gamma/m}$  нарушается применимость линейного приближения, а при  $\rho \rightarrow 0$  возрастает до бесконечности вязкость.)

Однако при сколь угодно малом отличном от нуля  $\kappa$  поведение решения на бесконечности резко меняется.

Полагая

$$x = 1 + \frac{1}{\kappa^2} e^{-\xi}, \quad (6)$$

приводим (3) к гипергеометрическому уравнению:

$$x(1-x)v'' + (1-2x)v' - \lambda^2 v = 0 \quad (7)$$

с параметрами, удовлетворяющими соотношениям

$$\Gamma = 1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = \lambda^2 \quad (8)$$

(во избежание путаницы с показателем адиабаты мы обозначили третий параметр через  $\Gamma$  в отличие от общепринятого  $\gamma$ ).

В случае  $\lambda > 1/2$   $\alpha$  комплексно, а  $\beta = \alpha^*$ . Поскольку решение ищется в области  $x > 1$ , оно имеет вид (4)

$$v_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha F\left(\alpha, \alpha, 2\alpha, \frac{1}{x}\right); \quad v_2 = v_1^* \quad (9)$$

( $F$  — гипергеометрическая функция).

При  $x \rightarrow 1$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ) оба решения логарифмически расходятся. Пусть

$$v_1 = \theta \ln(x-1) + \text{Re } g.$$

Линейная комбинация  $v_1$  и  $v_2$

$$v_3 = \text{Im} \left\{ \theta^* \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha F\left(\alpha, \alpha, 2\alpha, \frac{1}{x}\right) \right\} \quad (10)$$

остается конечной и при  $x \rightarrow 1$ . В качестве второго решения (помимо  $v_3$ ) можно взять

$$v_4 = \text{Re} \left\{ \theta^* \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha F\left(\alpha, \alpha, 2\alpha, \frac{1}{x}\right) \right\}. \quad (10')$$

Полученное решение имеет смысл при  $z \ll c/\omega$ , так как мы пренебрегли током смещения. На больших расстояниях решение переходит в электромагнитную волну. В качестве условия на бесконечности можно поставить требование, чтобы при  $z_0 \ll z \ll c/\omega$  решение переходило в электромагнитную волну, бегущую в направлении  $z \rightarrow \infty$ . Скорость частиц в волне есть  $cE/H_0$ . Но электрическое поле  $E$  в бегущей волне вблизи  $z = 0$  есть  $E_0 e^{i\omega(t-z/c)} \approx E_0 e^{i\omega t} (1 - i\omega z/c)$ , т. е. с точностью до членов  $\sim \omega z_0/c$  скорость постоянна. Если же источник колебаний расположен при  $z \rightarrow \infty$ , то волна является стоячей и, поскольку в силу идеальной проводимости атмосферы,  $E|_{z=0} = 0$ , то в области  $z_0 \ll z \ll c/\omega$  имеем  $E \approx E_0 e^{i\omega t} \omega z/c$ .

Легко показать, что при  $z \gg z_0$ ,  $v_3 = \text{const}$ ,  $v_4 \sim z$ . Поэтому в отсутствие источников на бесконечности мы должны взять решение  $v_3$ . Таким образом:

$$v = v_0 \frac{\text{Im} \left\{ e^{-i\varphi} \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha F\left(\alpha, \alpha, 2\alpha, \frac{1}{x}\right) \right\}}{\text{Im} \left\{ e^{i\varphi} \left(\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}\right)^\alpha F\left(\alpha, \alpha, 2\alpha, \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}\right) \right\}}, \quad (11)$$

где  $\varphi = \arg \theta$ .

При  $\kappa \ll 1$  и  $x \ll 1$  (т. е. при  $z \ll 2z_0 |\ln \kappa|$ )

$$v \approx v_0 e^{\xi/2} \frac{\sin(s\xi + 2s \ln \kappa - \varphi)}{\sin(2s \ln \kappa - \varphi)}, \quad (12)$$

т. е. имеем решение акустического типа с нарастающей скоростью (здесь  $s = (1/2) \text{Im } \alpha$ ). Однако при  $\xi \gtrsim 2|\ln \kappa|$  ускорение прекращается.

Отметим еще одно важное отличие магнитогидродинамических колебаний от чисто акустических: при

$$\omega \rightarrow \omega_n \approx \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\gamma m}{kT}} \sqrt{1 + \left( \frac{n\pi + \varphi_n}{\ln \kappa} \right)^2} \quad (13)$$

наступает резонанс. Вычисление фазового множителя  $\varphi_n$  затруднительно, однако можно показать, что  $\varphi_n \rightarrow 0$  при малых  $n$ , а при больших  $n$  роль  $\varphi_n$  не существенна, так как  $|\varphi_n| \leq \pi$ . Определение резонансных частот с помощью асимптотической формулы (12) законно при  $n \lesssim \frac{1}{\kappa |\ln \kappa|} \gg 1$ . Наличие резонансов связано с отражением магнитогиродинамических волн от областей с нарастающей альвеновской скоростью.

Из физики задачи (неограниченное возрастание скорости магнитогиродинамического отвода энергии при стремлении плотности к нулю) ясно, что эти выводы качественно сохраняют силу и в случае других законов спада плотности, а также в случае поля, не перпендикулярного  $g$ .

3. Полученные результаты могут представлять интерес для некоторых астрофизических вопросов. Так, например, известно, что хромосферные вспышки на Солнце происходят в основном вблизи нейтральных точек магнитного поля (5). Если хромосферные вспышки связаны с выходом на поверхность ударных волн, возбуждаемых во внешней конвективной зоне Солнца, то указанная закономерность в свете изложенного выше может быть истолкована как следствие приостановки ускорения волн в среде с падающей плотностью при наличии магнитного поля. При этом наибольшее ускорение будет иметь место именно вблизи нейтральных точек, где магнитное поле минимально.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность академику М. А. Леонтовичу за ряд важных замечаний.

### Литература

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехиздат, 1951.
2. Франк-Каменецкий Д. А. ДАН СССР. 107, 651 (1956).
3. Ведынов А. А., Сагдеев Р. З. Тр. VI Совещ. по вопросам космогонии. М.: Изд. АН СССР, 1959.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. 3, ч. 2. М.: Гостехиздат, 1953.
5. Северный А. Б. Астр. журн. 35, 335 (1958).

## КРИТЕРИИ ТЕПЛОВОЙ (ПЕРЕГРЕВНОЙ) НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОЗРАЧНОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА\*

*(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 5.06.1970)*

Газ, нагреваемый благодаря некоторому нерадиативному процессу и отдающий энергию посредством излучения, может оказаться неустойчивым относительно малых возмущений его термодинамических параметров. Это связано с тем, что при отклонении состояния газа от равновесного энерговыделение может увеличиться (уменьшиться) на большую величину, чем излучение. В результате будет происходить дальнейший разогрев (охлаждение).

Данный эффект может проявить себя в разнообразных астрофизических условиях. Высказывались предположения, что с тепловой неустойчивостью могут быть связаны некоторые проявления солнечной активности, в частности образование протуберанцев и корональных конденсаций [1, 2]. Возможность неустойчивых состояний нужно иметь в виду при расчете равновесной температурной структуры солнечной хромосферы [3]. Не исключено, что неустойчивость играет некоторую роль в процессе возникновения облаков межзвездного газа [4]. Динамика газа, охлаждаемого излучением, рассматривалась также применительно к теории солнечных хромосферных вспышек [5, 6].

В ряде работ, например [3], использовался критерий тепловой неустойчивости, полученный из качественных соображений для изолированного объема газа. Для конкретных механизмов энерговыделения и излучения нахождение условий устойчивости связано с громоздкими вычислениями. Критерий для газа с постоянным удельным объемом в случае, когда выделение и отвод тепла зависят только от температуры, указан на основании уравнения теплового баланса в работе [1]. Имеется обстоятельное исследование неустойчивости идеального газа [9]. Рассмотрен вопрос о перегретой неустойчивости плазмы, нагреваемой джоулевым теплом, в сильном магнитном поле [7].

Используя систему газодинамических уравнений, можно получить критерий тепловой устойчивости в общем виде, считая разность выделяемой и излучаемой энергии, отнесенную к единичному объему, некоторой функцией  $Q$  термодинамического состояния газа. В настоящей работе такое исследование проведено в предположении, что газ прозрачен, и теплообмен типа лучистой теплопроводности в масштабах порядка длины волны возмущения отсутствует (длина волны мала по сравнению с пробегом фотонов), а вязкость и молекулярно-кинетическая теплопроводность пренебрежимо малы. Во второй части работы, кроме того, считается, что газ обладает

---

\* Гетлинг А. В., Кузьмин В. В., Тверской Б. А. ДАН СССР. Т. 196. № 1. 71–74 (1971).

высокой проводимостью и находится во внешнем магнитном поле. Вид функции  $Q$  никак не уточняется.

Запишем исходные уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) + \operatorname{div} \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] = Q(p, \rho); \quad (3)$$

$$\epsilon = \epsilon(p, \rho). \quad (4)$$

Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $\epsilon$  — внутренняя энергия единицы массы.

Линеаризуем систему относительно малых возмущений переменных и найдем ее характеристическое уравнение, считая все возмущения функциями вида  $\operatorname{const} \cdot e^{\sigma t - i \mathbf{k} \mathbf{r}}$ . Чтобы проследить за развитием возмущений во времени, будем задавать действительные значения абсолютной величины волнового вектора  $\mathbf{k}$  и находить соответствующие, вообще говоря, комплексные, значения  $\sigma$ .

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\sigma^3 - \nu \sigma^2 + V_s^2 k^2 \sigma - \nu B k^2 = 0. \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \nu &\equiv \frac{1}{\rho} \frac{(\partial Q / \partial p)_\rho}{(\partial \epsilon / \partial p)_\rho}, \quad B \equiv -\frac{(\partial Q / \partial p)_\rho}{(\partial Q / \partial p)_\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_Q, \\ V_s^2 &\equiv -\frac{(\partial \epsilon / \partial p)_\rho}{(\partial \epsilon / \partial p)_\rho} + \frac{p}{\rho^2 (\partial \epsilon / \partial p)_\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \end{aligned} \quad (6)$$

( $s$  — энтропия; все функции вычислены для равновесного состояния).

Согласно критерию Гурвица [8], решение линеаризованной системы асимптотически устойчиво (все корни  $\sigma_i$  характеристического уравнения обладают свойством  $\operatorname{Re} \sigma_i < 0$  в том и только в том случае, если

$$\nu < 0, \quad V_s^2 > B > 0. \quad (7)$$

Уравнению (5), которое заменой  $y = \sigma - \nu/3$  приводится к виду  $y^3 + 3py + 2q = 0$ , можно сопоставить выражение

$$D \equiv p^3 + q^2 = \left( V_s^2 \frac{k^2}{3} - \frac{\nu^2}{9} \right)^3 + \left( \nu V_s^2 \frac{k^2}{6} - \nu B \frac{k^2}{2} - \frac{\nu^3}{27} \right)^2. \quad (8)$$

Обозначим через  $(k^2)_{1,2}$  квадраты корней биквадратного уравнения  $D = 0$ . При  $(k^2)_2 \geq k^2 \geq (k^2)_1$ ,  $D \leq 0$ , все корни характеристического уравнения действительны, и возможна только динамическая неустойчивость (аперiodическое нарастание возмущения). Если  $k^2 < (k^2)_1$  или  $k^2 > (k^2)_2$ , то  $D > 0$ , характеристическое уравнение имеет, кроме одного действительного, два сопряженных комплексных корня, определяющих колебательную моду, которая может оказаться неустойчивой.



Для предельного случая  $|\nu| \ll |V_S k|$  корни уравнения (5) легко найти в линейном приближении, вычислив малые (порядка  $\nu$ ) поправки к корням «невозмущенного» уравнения  $\sigma^3 + V_S^2 k^2 \sigma = 0$ . Подставляя  $\sigma_i^{(1)} = \sigma_i^{(0)} + \sigma_i'$  в (5) и сравнивая порядки величин различных членов, получаем формулы, верные при  $|B| \lesssim V_S^2$ :

$$\sigma_1^{(1)} = \nu \frac{B}{V_S^2}, \quad \sigma_{2,3}^{(1)} = \pm i V_S k + \frac{\nu}{2} \frac{V_S^2 - B}{V_S^2}. \quad (9)$$

Формулы (9) определяют инкременты развития неустойчивости и показывают, какая мода становится неустойчивой при нарушении того или иного из условий (7). Видно, в частности, что при  $\nu(V_S^2 - B) > 0$  происходит раскачка звуковых колебаний.

Обратимся теперь к случаю, когда рассматриваемый газ обладает высокой проводимостью и находится в однородном внешнем магнитном поле. Предположим, что характерные времена процессов значительно меньше времени омической диффузии магнитного поля, и запишем уравнения магнитной гидродинамики, пренебрегая теплопроводностью, а также кинематической и магнитной вязкостью:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}]; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{H}]; \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \text{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} [\mathbf{v} \mathbf{H}]] \right\} = Q(p, \rho); \quad (13)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{H}$  — магнитное поле, а остальные обозначения имеют прежний смысл.

Выполним линеаризацию системы (10)–(14), считая невозмущенным значением  $\mathbf{H}$  вектор внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . В уравнении (13) уничтожатся члены, содержащие  $\mathbf{H}_0$ . При решении системы удобно пользоваться системой координат, одна из осей которой совпадает по направлению с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Исключив все переменные, кроме  $\mathbf{v}$  и возмущения магнитного поля  $\mathbf{h}$ , получим две независимые системы уравнений. Одна из них имеет характеристическое уравнение

$$\sigma^2 + V_A^2 k^2 \cos^2 \varphi = 0 \quad (15)$$

( $V_A^2 \equiv H_0^2/(4\pi\rho)$ ,  $\cos \varphi \equiv \mathbf{H}_0 \mathbf{k}/(H_0 k)$ ) и описывает альвеновские волны, другая — характеристическое уравнение

$$\sigma^5 - \nu \sigma^4 + (V_A^2 + V_S^2) k^2 \sigma^3 - \nu(V_A^2 + B) k^2 \sigma^2 + V_A^2 V_S^2 k^4 \sigma \cos^2 \varphi - \nu V_A^2 B k^4 \cos^2 \varphi = 0 \quad (16)$$

(здесь использованы обозначения (6)).

Для исследования корней уравнения (16) в случае  $\cos \varphi \neq 0$  воспользуемся критерием Ляпуна—Шипара [8], который эквивалентен критерию Гурвица, но более удобен при высоких степенях характеристического уравнения. Необходимым

и достаточным условием асимптотической устойчивости общего решения исходной линеаризованной системы является выполнение неравенств

$$\nu < 0, \quad V_S^2 > B > 0, \quad (17)$$

$$V_S^2 > 0, \quad V_A^2 + V_S^2 > 0, \quad V_A^2 + B > 0. \quad (18)$$

Первые два из условий (18) тривиальны, а третье содержится в условии  $B > 0$ . Отбрасывая (18), находим, что магнитное поле, перпендикулярное волновому вектору, не влияет на критерий устойчивости относительно малых возмущений.

Если  $\cos \varphi = 0$ , то (16) является кубическим уравнением

$$\sigma^3 - \nu \sigma^2 + (V_A^2 + V_S^2)k^2 \sigma - \nu(V_A^2 + B)k^2 = 0, \quad (19)$$

и критерий Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости:

$$\nu < 0, \quad V_S^2 > B > -V_A^2. \quad (20)$$

По сравнению со случаем  $H_0 = 0$  (см. (7)) (20) является более слабым ограничением, так как допускает отрицательные значения  $B$  без нарушения устойчивости. Формально это выражается в обращении в нуль при  $\cos \varphi = 0$  инкремента одной из неустойчивых мод. Таким образом, магнитное поле при  $H_0 \perp k$  оказывает стабилизирующее действие на проводящий газ.

Для случая сильного поля  $|\nu| \ll |V_A k|$ ,  $V_S^2 \ll V_A^2$ ,  $|B| \ll V_A^2$  найдем корни  $\sigma_i$  уравнения (16). Для этого представим левую часть (16) в виде  $D^{(0)}(\sigma) + D'(\sigma)$ , где в  $D^{(0)}(\sigma)$  собраны все члены, не содержащие  $\nu$ . Малую поправку к нулевому корню уравнения  $D^{(0)}(\sigma) = 0$  найдем, приравняв нулю сумму двух наиболее существенных членов левой части (16), а поправки к остальным корням  $\sigma_i^{(0)}$  вычислим по формуле

$$\sigma_i' = - \frac{D'(\sigma_i^{(0)})}{\left( \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=\sigma_i^{(0)}}},$$

считая, что  $|\sigma_i'| \ll |\sigma_i^{(0)}|$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} &= \nu \frac{B}{V_S^2}, \\ \sigma_2^{(1)} &= \pm i V_A k \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{V_S^2}{V_A^2} \sin^2 \varphi \right) + \frac{\nu}{2} \frac{V_S^2 - B}{V_A^2} \sin^2 \varphi, \\ \sigma_3^{(1)} &= \pm i V_S k \cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{V_S^2}{V_A^2} \sin^2 \varphi \right) + \frac{\nu}{2} \frac{V_S^2 - B}{V_S^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Применимость первой из этих формул ограничена условиями

$$\nu^2 \ll V_S^2 k^2 \cos^2 \varphi, \quad \nu^2 \ll |B| k^2 \cos^2 \varphi, \quad |B| \lesssim V_S^2,$$

а третьей — условием

$$\left| \nu \left( 1 - \frac{B}{V_S^2} \right) \right| \ll |V_S k \cos \varphi|.$$

Если  $\cos \varphi = 0$ , а  $|\nu| \ll |V_A k|$ , то корни уравнения (19), вычисленные аналогично (9), имеют вид

$$\sigma_1^{(1)} = \nu \frac{V_A^2 + B}{V_A^2 + V_S^2}, \quad \sigma_{2,3}^{(1)} = \pm i V_A k \sqrt{1 + \frac{V_S^2}{V_A^2}} + \frac{\nu}{2} \frac{V_S^2 - B}{V_A^2 + V_S^2}. \quad (22)$$

Первая формула верна при дополнительном условии  $|B| \lesssim V_S^2$ , вторая — при  $|B - V_S^2| \lesssim V_A^2$ . Если  $\cos \varphi = 1$  ( $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{k}$ ), то (16) переходит в (5), и становятся справедливыми все результаты исследования случая  $\mathbf{H}_0 = 0$ .

### Литература

1. *Parker E. N.* Astrophys. J. **117**, 431 (1953).
2. *Купенхойер К. О.* Солнце. М.: ИЛ, 1955.
3. *Томас Р., Атей Р.* Физика солнечной хромосферы. Гл. 5. М.: ИЛ, 1966.
4. *Field G. B.* The distribution and motion of interstellar matter in galaxies. N. Y., 1982. 183.
5. *Spiegel E. A.* Astrophys. J. **126**, 202 (1957).
6. *Osier L.*, ZS. Astrophys. **44**, 26 (1957).
7. *Кадоццев Б. Б.* Вопросы теории плазмы. 2, М.: Энергоатомиздат, 1963. 173.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1966.
9. *Field G. B.* Astrophys. J. **142**, 531 (1965).

## Приложение

### **Борис Тверской, физик и лирик**

Наше поколение пришло на физфак МГУ в 50-е годы XX века. Это было замечательное время. В гигантском напряжении народ восстановил разрушенное войной хозяйство. Советская физика и техника добились потрясающих успехов. Ядерщики испытали атомную бомбу и опередили американцев в создании водородной бомбы, тем самым устранив угрозу ядерного шантажа и вообще ядерной войны. Благодаря достижениям советских ракетостроителей, человечество вырвалось в Космос, опережающими темпами развивались исследования в области термоядерного синтеза и т. д. На физфак МГУ и в инженерно-физические ВУЗы шли лучшие выпускники средних школ, интеллектуальная элита советской молодежи. Тогда действительно были «что-то физики в почете, что-то лирики в загоне». А в гимне физиков, исполнявшемся на мотив «Дубинушки», с огромным энтузиазмом пелась фраза: «Только физики соль, остальное все — ноль». В те годы студенты-физики не уступали в «лиризме» студентам самых «лирических» факультетов. На физфаке учились замечательные поэты, музыканты, художники, певцы. Стенгазеты блистали остроумием, прекрасными стихами и художественным оформлением. По университетскому радио шли передачи юмористической радиогазеты факультета. Наконец, на это время пришелся расцвет «физического оперного искусства». Одна за другой были поставлены оперы «Дубинушка», «Серый камень» и «Архимед». Мы неизменно занимали первые места на смотрах художественной самодеятельности, а также в знаменитых легкоатлетических эстафетах МГУ.

Вся напряженная общественная жизнь сосредоточилась в общежитии Главного здания МГУ, где физики жили в зоне «Б». О Бобе Тверском среди студентов ходили легенды. В Университет он поступил 16-ти лет и уже на первом курсе начал сдавать теорминимум Ландау. В общежитие к нему заходил Ю. Б. Румер с Лилей Брик, что также создавало вокруг него ореол загадочности.

О Юрии Борисовиче Румере скажу несколько подробнее. Его Борис считал своим вторым учителем. Первым был академик О. Ю. Шмидт, знаменитый полярник, с которым Борис переписывался еще в пионерском возрасте (см. мемориальную статью в УФН). Ю. Б. Румер — крупный физик-теоретик, сподвижник Л. Д. Ландау (в «карточной колоде» Ландау он числился тузом), автор исследований по пятиоптике. Был репрессирован, как и Ландау, однако П. Л. Капице не удалось вызволить его из тюрьмы. Это был красивый и очень яркий человек: физик-теоретик, он имел и блестящее гуманитарное образование, владел шестью иностранными языками, в том числе венгерским и арабским. Его брат, Осип Румер, был известным литературным переводчиком. В то время, когда Борис учился в старших классах средней школы, Ю. Б. Румер оказался в Новосибирске в очередной ссылке (после отсидки в лагерях и ссылки в Енисейск). Посещая публичную библиотеку Новосибирска, он обратил внимание на школьника, который читает труды Максвелла и работы по квантовой механике. В отделении НКВД, где Румер ежемесячно «отмечался»,

он испросил разрешения познакомиться со школьником Борей Тверским. Так для Бориса началось познание теоретической физики, и другого выбора жизненного пути уже быть не могло. В 1952 году он поступил на физический факультет МГУ.

Конечно, сдавши теормех самому Ландау, Борису не хотелось ходить на семинары по теормеху, которые вел зам. декана факультета по учебной работе. За непосещение занятий, участие в выпуске сатирической газеты «Вентилятор» и «нестандартное» поведение в общежитии его представили к отчислению с факультета (я бы могла назвать нескольких ныне маститых профессоров и директоров институтов, считавшихся, как и Боб Тверской, у себя на курсах «гигантами мысли», которых пытались выселить из общежития «за нарушение порядка»). В те времена были строгие проверки в общежитиях, содмил (содействие милиции) из студентов-активистов отлавливал тех, кто не ходил на занятия или «чрезмерно веселился» вечером в общежитии. Однако благодаря заступничеству академиков (особенно М. А. Леонтовича, которого Борис считал своим третьим учителем) и комсомольской организации курса и факультета, отчисление не состоялось. Интересно, что позднее, когда Борис в 30 лет с блеском защитил докторскую диссертацию в Институте атомной энергии им. Курчатова (в то время ЛИПАН), тот же зам. декана, который выгонял с факультета, в своем докладе на партсобрании назвал его гордостью факультета. Вспоминается еще такой «подвиг» Тверского. Он подговорил нескольких приятелей из общежития ходить утром на факультет не через проходную зоны «Б» или Главного здания, а напрямую, перелезая через высокую чугунную решетку в арке Главного здания. Это движение стало столь массовым, что партком принял решение создать рейдовую бригаду из молодых коммунистов, чтобы пресечь это «обезьянство». К счастью, Бориса «поймала» бригада во главе с Леонидом Корниенко. Это было их первое знакомство. Леня не только отпустил Бориса с миром и не донес на него, но и вскоре достал ему билет на Первый студенческий бал в Кремле. Они стали друзьями и сохранили эту дружбу до конца своих дней.

Вообще идеи по «эпатированию обывателя» из Боба Тверского били фонтаном. Еще на первом курсе, когда иногородние студенты до открытия Главного здания жили в бараках для строительных рабочих по 20–30 человек в комнате, он организовал общество «испражненных». Тому из членов общества, кто сумел отличиться днем в какой-нибудь «хохме», предоставлялось право спать ночью в импровизированном гробу (настоящий достать не удалось). Когда не хватило денег до стипендии, предложил пойти в мединститут и сдать свои будущие трупы для медицинских экспериментов. Денег не дали, сказали, что таких стандартных скелетов у них предостаточно, нужны с заметными отклонениями. Разделив все мужское общество на «мордву» и «ногайцев», возглавил общество ногайцев под девизом: «Ноги — это зеркало души». По его инициативе в общежитии прошел конкурс по ненормативной лексике. Вообще у них на курсе были популярны разные конкурсы: самая красивая девушка курса, лучшая мужская фигура и т. п. Когда в группе ядерных теоретиков Отделения строения вещества решался вопрос, кому остаться в Москве в аспирантуре, студенты провели «рейтинговое» голосование. Каждый студент группы должен был указать порядковый номер всех (за исключением себя самого) в зависимости от степени таланта. Мне рассказывал В. Якименко, что Борис оказался на первом месте с рейтингом 90%.

Пристрастие к розыгрышам, «хохмам», способность открывать разного рода шуточные законы в человеческом обществе Борис Тверской сохранил на протяжении всей своей жизни. Свидетельствую, что именно он открыл закон сменяемости

«лысых» и «волосатых» правителей в России XX века. И только через 3 года появились сообщения в печати, что такую закономерность заметили японцы.

В конце 50-х годов большим успехом пользовалась постановка пьесы Погодина «Маленькая студентка» в театре Маяковского. Молодые актеры театра приезжали в общежитие, чтобы послушать песни из наших студенческих опер. Некоторые из них, например, «Вилку в розетку тык-тык-тык», были использованы в постановке. Дочь Погодина тогда училась на физфаке. По-видимому, с ее слов драматург создал образ физика-теоретика. В центре сцены сидел взлохмаченный, небрежно одетый тип в очках (прекрасно играл артист Левинсон) и читал стих Б. Тверского:

С неба свесилась веревка,  
Кто повесил там ее?  
А в окно влезает ловко  
Волосатое зверье.

Стихи Боба Тверского были очень популярны и ходили в списках. В выпускавшихся в то время сборниках молодых поэтов МГУ они, конечно, не могли быть опубликованы. Слишком специфична была тематика: кладбищенские страсти или модернистские изыски. Приведу лишь несколько примеров.

Туманные черты несбывшейся идеи  
Растаяли во мгле минувших сновидений.  
Но темное пятно прозрачной пустоты  
Не исказило вечной красоты.



Гнойник Луны на небе вспух...  
Нависли каменные своды...  
Вот падает, чтоб гнить, ОНА...  
Не суждено пустить ей всходы,  
В ней, видно, не было зерна.



Тихо пахнет прелым трупом,  
Шепот, тени — без конца...  
А к столу большим шурупом  
Привинтили мертвеца...



Я ценой познания, Дети,  
Тьму невежества разбил.  
Я познал ценой столетий  
Тайну склепов и могил.  
Кости бурые истлели,  
Черви гложут гибкий стан.  
И застыл на мертвом теле  
Златокудрый истукан.



И пошел, громяхая костями скелета...  
Бормоча: «Хорошо, что на кладбище лето,  
Да и прочее все ХОРОШО!»

Кладбищенская тематика была столь заразительна, что появились многочислен-  
ные «Подражания Бобу Тверскому» из серии «Тайны склепов и могил».

Наибольший интерес вызывали удивительные палиндромы Б. Тверского. Знато-  
ки, такие как А. А. Реформатский, сравнивали их с лучшими в русской литературе  
«перевертеньями» Велимира Хлебникова (кстати, любимейшего поэта Б. Тверского).  
Многие свои «палиндромные» стихи и пьесы Борис иллюстрировал картинками,  
которые писал, как правило, в стиле сюрреализма и кубизма. Некоторые из них  
сохранились, например, «Праздник урожая на планете Марс» с марсианами и чудо-  
вищами в стиле Сальватора Дали, «Автопортрет» с развороченным красным мозгом,  
в обрамлении сидения от унитаза. Такие «художества» тоже пользовались неизмен-  
ным успехом.

Ниже приводятся некоторые палиндромы Б. Тверского.

#### Старая деревня

Воняло пузо вора. Паровоз у поля нов.  
Вон режет сила на листе жернов.  
Конус осла, кал около. Молоко лакал сосунок.  
Гонит соки кабак, и кости ног  
Боли взяли. Псих. Испил язв и лоб.  
Поплел обрат. Стар болел поп.  
Но хил и лих он.  
Но хитер, о море, Тихон.

#### Гуляй-поле

Махно — он хам.  
Монах с ханом.  
Мат там.  
Анархия — их рана.

#### На смерть маршала

Недр орден.  
Конев. Венок.  
Маршала шрам.  
На гроб орган.

#### Пьеса «Свадьба»

Действующие лица:

Ю р а  
И р а

Ю р а:  
Ира! Дога лба благодари!

И р а:  
 Юра! Дога лба благодарю!  
 Юре венчание. Иначе — не верю!  
 Ю р а:  
 Зал? Видимо — ЗАГС? С газом иди в лаз.  
 И р а:  
 И воз. А попа зови.  
 Но медведь — дев демон.

#### Бессвязные мысли Железной маски

Гулял. Бастилии лит, сабля — луг...  
 Гул Парижа, жира плуг...  
 Но нет, не мед мадам де Ментенон.

#### Вернисаж

Веласкес — секса лев.  
 И Матисс с ситами.  
 О, ссаки Пикассо!

А вот короткие палиндромы, в одну строчку:

Палиндром — и ни морд, ни лап.  
 Алла — темп металла.  
 Вора вот колбаса — блок товаров.  
 Я, рак, иду, катя пятак у дикаря.  
 Сапог его пас.  
 Не венгр гневен,  
 а румыны мура.  
 Моча рвала врачом.  
 Вор Гитлер ел тигров.  
 О! И коту — Токио,  
 А киске — Мексика.  
 Родим, о Пикуль, лук и помидор!  
 Неси, кудесник, бабкин седуксен.  
 Уверен, не реву.  
 Меч тело колет чем?  
 Тензор колет осями мясо телок. Роз нет.  
 И ем злаки и кал змеи.  
 Чибурданидзе ездил на Друбич.  
 Ну, Вернов — он ревун.  
 То и диавол слова — идиот.  
 Умен. Камена, муза разума, нема к нему.  
 Мотать лузе результатом.  
 Мат — новатор истории и рот — сирота вон там.



Палиндромы Б. Тверской сочинял всю жизнь. Более того, по быстроте их сочинения оценивал свои интеллектуальные возможности в данный момент. Так, после тяжелой операции в 1995 году в Институте хирургии им. Вишневского, уже на 3-й день пребывания в отделении реанимации (когда родственникам разрешается первое посещение больного) он тихо пропел мне: «Я хочу, чтобы ты улыбалась» (Нилаканта, «Норма» Беллини) и заявил, что все в порядке, «мозг работает, как мышца», есть палиндром:

Ток. Урон. Я нем в теории.

И роет в меня нору кот.

А впереди были еще 2 месяца борьбы за жизнь с начавшимися после операции грозными осложнениями. Ведь Борис был в предынфарктном состоянии, когда врачи ампутировали ногу. Шансов выжить практически не было. В тяжелейшем состоянии Борис остался верен себе: шутил, рассказывал врачам и сестрам разные истории. Когда перед повторной процедурой (при проведении первой он оказался в состоянии клинической смерти, и процесс был прерван) врач спросил его о настроении, Борис пошутил: «Спокоен, как пульс покойника» (Маяковский). Талант и высочайший профессионализм врачей в сочетании с поразительным мужеством и огромной волей Бориса к жизни позволили вырвать у смерти еще 2,5 года для активного научного творчества.

Палиндромный стих и некоторые палиндромы, сочиненные в течение последних дней жизни:

А токмо труп. Мало лун.

Халат и череп. Перечитал,

Ахнул о лампу ртом кота.

Ты, мой овал, славой омыт!

Толпой, о Росс, с ссорой оплот!

Всех, кто когда-либо общался с Б. Тверским, поражали его огромные, просто энциклопедические, знания литературы, истории, музыки. Во многом этим он был обязан, конечно, семье. Отец, Аркадий Николаевич, принадлежал к очень древнему русскому дворянскому роду. Мать, Аделаида Константиновна Малишевская, происходила из польской шляхетской семьи. Отец, по образованию эконом-географ, заведовал отделом в Новосибирском облплане, а на досуге писал стихи, повести и рассказы. Некоторые были опубликованы в журнале «Сибирские огни». Практически до конца жизни работал над историей завоевания Сибири Ермаком. Мать по образованию была певицей, работала библиотекарем. Вообще в семье было много музыкально одаренных людей. Бабушка (по отцу) была прекрасной пианисткой. Ее сестра, оперная певица с мировым именем, эмигрировала сначала в Италию, а потом в США еще до революции, была первой исполнительницей партии Лизы в постановке «Пиковой дамы» Чайковского в Метрополитен-опера. Как любил шутить Борис, у него генетическая любовь к певицам. Без музыки он просто не мыслил своего существования. Знал и любил многие произведения, начиная со старинной музыки и кончая джазом и «Битлз». Были, конечно, и предпочтения: Бах, Моцарт, Глинка, Шуберт, Мусоргский, Вагнер, Прокофьев, Шостакович. Считал, что во второй половине XX века практически никому из композиторов не удалось уйти от всепоглощающего влияния гения Шостаковича. Выделял Софью Губайдуллину.

Наверное, многим, кто его знал, трудно представить, что Борис, человек со стальной волей и нервами, часто не мог сдерживать слез, слушая музыку.

Как и для всякого русского человека, глубоко ощущающего свои корни, кумиром и абсолютном для него был Пушкин. Очень хорошо знал поэзию серебряного века. Вот был «ужо повеселился» и сочинил какой-нибудь ехидный палиндром по поводу голосования по персоне века, проведенного радиостанцией «Эхо Москвы» в сети Интернет. Ведь его любимый Александр Блок занял последнее место в тройке лучших российских поэтов 20 века, а такие гиганты, как Есенин и Маяковский, вообще не вошли в предложенный список «номинантов». О времена, о нравы! Из наших поэтов-шестидесятников нравилась Бэлла Ахмадулина, восхищался некоторыми образными выражениями Андрея Вознесенского («мотоциклисты в белых шлемах, как дьяволы в ночных горшках» или «мой кот, как радиоприемник, зеленым глазом ловит мир»). Очень любил Владимира Высоцкого и как поэта, и как актера.

Из прозаиков боготворил Достоевского. Кроме «высокой» литературы, обожал детективное «чтиво». Считал, что в последнее время женщины стали писать детективы лучше, чем мужчины. Скупал все книги плодovitой А. Марининой.

Любовь к истории была семейной традицией, передалась и нашим сыновьям. Особенно обширны были познания Б. Тверского в истории России, Римской империи, Древней Греции, Англии и Франции. Мемуаристика, притом самая разная — политическая, военная, театральная, музыкальная — была просто страстью. Глубоко зная трагическую и блистательную историю России, он тяжело переживал развал нашей великой страны. Мрачно шутил, что сожалеет, что у нас нет древнегреческого закона об ostracismе, который позволял народу просто изгонять из страны зарвавшихся политиков.

В жизни Б. Тверского был очень непритязательным человеком. Не любил выезжать из Москвы, никогда не хотел иметь ни дачи, ни машины. На все мои настоятельные просьбы об отпуске обычно следовал «веселый» ответ: «В могиле отдохнем!». К собственности у него вообще было отрицательное отношение. Любил цитировать Маяковского («Я хотел бы кончить жизнь в штанах, в которых начал») и Прудона («Собственность — это кража»). Просил не сдавать его ваучер, а повесить в туалете, в назидание потомкам.

Я всегда очень переживала, что огромное количество работ он не дописывал, бросал, терял к ним интерес, как только достигал результата. На все мои просьбы и укоры шутиливо отвечал, что согласен с Брюсовым: «Высшее счастье — узнав, утаить от Вселенной». Вообще был крайне безразличен к общественному признанию, не стремился пропагандировать свои работы, используя поездки за границу. Все его многочисленные заказные доклады на международных конференциях зачитывали в разное время С. Н. Вернов, К. И. Грингауз, Я. Аксфорд. Одну из самых своих крупных, приоритетных работ «Электрические поля в магнитосфере Земли и происхождение захваченной радиации», которую доложил лично на международном Симпозиуме по солнечно-земной физике в Ленинграде в 1970 году и раздал препринты, опубликовал лишь в малодоступных трудах этого симпозиума на английском языке (труды вышли в 1972 году). Варианта на русском языке нет. Несколько лет тому назад ему было предложено написать книгу по магнитосфере и издать за границей на английском языке. Не желая тратить на это время, отказался и рекомендовал книгу своего ученика. Издал только одну монографию «Динамика радиационных поясов Земли». Это — открытая часть его докторской

диссертации, написана в 1965 году, когда автору не было еще и 30 лет, издана в 1968 году. В НАСА (Национальное Аэрокосмическое Агентство США) в 1971 году был сделан технический перевод книги на английский язык (NASA Technical Translation, F-635, June 1971). Мнение Бориса об этой книге я узнала при таких обстоятельствах. Американский ИСЗ CRRES в марте 1991 года зарегистрировал замечательный эффект: формирование пояса электронов и протонов с энергиями в десятки МэВ за 1 мин. во время мощного внезапного геомагнитного импульса. Американцы в течение 2,5 лет не могли объяснить это явление. Тверской, как только узнал об этом эффекте, решил проблему за 2 часа, так как еще в 1964–1965 годах создал завершенную теорию захвата и дрейфа частиц в электрическом и магнитном поле внезапного импульса. Когда я ему сказала, что, вот мол, американцы отстали на 30 лет, он спокойно ответил: «Не на 30 лет, а навсегда, так как они освоили пока только 1/3 моей книги, будут догонять в XXI веке».

Борис Тверской считал, что прожил счастливую жизнь. Действительно, ему посчастливилось стоять у самых истоков новой науки — космофизики, создавать ее вместе с другими учеными, раскрывая тайны природных явлений. Размышляя о своем израненном сердце (он умер во сне от четвертого инфаркта 6 августа 1997 года, в день святых благоверных князей Бориса и Глеба, своих пращуров), он говорил, что никогда бы не согласился поменять это сердце, с которым жил, работал, любил, на чужое, здоровое. Будучи совершенно неверующим человеком, любил повторять: «За что бог одарил меня таким счастьем: любимым делом и любимой семьей?».

Высшая справедливость, я думаю, все-таки существует, и «оттуда» виднее, кого наградить неиссякаемой до последнего дыхания жадой научного поиска и священным даром любви.

*Л. В. Тверская*

## Summary

**Tverskoy, B. A.** *Foundations of Theoretical Space Physics*. Selected works. Compiled by M. F. Bakhareva, A. V. Getling, E. N. Sosnovets, and L. V. Tverskaya.

This book presents selected works of the outstanding space physicist Boris Arkad'evich Tverskoy (1936–1997). He was among the founders of space physics — the new scientific discipline that originated with the advent of the space era. B. A. Tverskoy was wonderful for his encyclopaedic versatility of thinking in physical theory and was highly proficient in techniques of research. For this reason, his studies (many of which became classics) encompassed various avenues of investigation in space physics — from acceleration and propagation of galactic and solar cosmic rays and generation of solar magnetic fields to processes in the Earth's magnetosphere and ionosphere.

The first part of the book is a republication of the monograph “The Dynamics of the Earth's Radiation Belts”, which appeared in 1968 and became a bibliographic rarity long ago. It sets forth the theory of the Earth's radiation belts, which was developed by B. A. Tverskoy and became generally accepted. Many of the phenomena in the radiation belts discovered during the past decades were either predicted or accounted for based on this theory.

The four chapters of the second part contain key papers by B. A. Tverskoy concerning the four basic lines of his research. Chapter I presents some works on the theory of the radiation belts, including a paper in which B. A. Tverskoy accounted for the remarkable phenomenon observed in 1991 on the *CRRES* satellite — the formation of a new radiation belt with tens-MeV electrons and protons within  $\sim 1$  min during a strong sudden impulse in the Earth's magnetic field. Chapter II includes papers on the theory of magnetosphere–ionosphere coupling associated with the time-dependent convection of the hot magnetospheric plasma — a phenomenon discovered by B. A. Tverskoy in 1969 — and on the theory of magnetic storms and substorms, auroras, as well as some other magnetospheric processes. Chapter III is dedicated to the fundamental theory of the statistical acceleration of charged particles interacting with hydromagnetic turbulence in a cold collisionless plasma. A paper on the propagation of galactic cosmic rays in the heliosphere is also included. Chapter IV presents some studies of the generation of magnetic fields in cosmic objects and of solar activity. Among them, the paper in which B. A. Tverskoy suggested a MHD mechanism of amplification and structuring of magnetic fields by toroidal eddies is of particular interest in view of recent investigations of solar activity.

As an addendum, memoirs by Lyudmila V. Tverskaya “Boris Tverskoy: a physicist and lyricist” are given. Photographs borrowed from the family's archive are used.

# Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



## Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

*Ефремов Ю. Н.* Вглубь Вселенной. Звезды, галактики и мироздание.

*Шварцшильд М.* Строение и эволюция звезд.

*Чернин А. Д.* Звезды и физика.

*Дорофеева В. А., Макалкин А. Б.* Летучие в ранней Солнечной системе.

*Шапкин А. И., Сидоров Ю. И.* Термодинамические модели в космохимии и планетологии.

*Кинг А. Р.* Введение в классическую звездную динамику.

*Бааде В.* Эволюция звезд и галактик.

*Кононович Э. В., Мороз В. И.* Общий курс астрономии.

*Куликовский П. Г.* Справочник любителя астрономии.

*Сажин М. В.* Современная космология в популярном изложении.

*Левитан Е. П.* Физика Вселенной: экскурс в проблему.

*Левитан Е. П.* Дидактика астрономии.

*Розенталь И. Л., Архангельская И. В.* Геометрия, динамика, Вселенная.

*Архангельская И. Д., Чернин А. Д., Розенталь И. Л.* Космология и физический вакуум.

*Хлопов М. Ю.* Космомикрофизика.

*Хлопов М. Ю.* Основы космомикрофизики.

*Сурдин В. Г.* Астрономические задачи с решениями.

*Николаев О. С.* Физика и астрономия: Курс практических работ для средней школы.

*Юревич В. А.* Астрономия доколумбовой Америки.

*Ипатов С. И.* Миграция небесных тел в Солнечной системе.

*Ромашов А. Н.* Планета Земля: тектонофизика и эволюция.

*Блинов В. Ф.* Растущая Земля.

*Иванов Б. Н.* Законы физики.

*Иванов Б. Н.* Мир физической гидродинамики.

*Капитонов И. М.* Введение в физику ядра и частиц.

*Гамов Г.* Мистер Томпкинс в Стране Чудес, или истории о  $c$ ,  $G$  и  $h$ .

*Гамов Г.* Мистер Томпкинс исследует атом.

*Сацункевич И. С.* Экспериментальные корни специальной теории относительности.

*Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А.* Гравитация.

*Эддингтон А.* Пространство, время и тяготение.

*Эддингтон А.* Относительность и кванты.

*Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. В 9 томах.

Задачи и упражнения с ответами и решениями к Фейнмановским лекциям. В 2 томах.

*Вайнберг С.* Мечты об окончательной теории.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:  
тел./факс (095) 135-42-16, 135-42-46  
или электронной почтой [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)  
Полный каталог изданий представлен  
в Интернет-магазине: <http://URSS.ru>

**Издательство УРСС**

Научная и учебная  
литература



Представляет Вам свои лучшие книги:



*Брайан Грин*

**ЭЛЕГАНТНАЯ ВСЕЛЕННАЯ**

**Суперструны, скрытые размерности  
и поиски окончательной теории**

Книга Брайана Грина «Элегантная Вселенная» — увлекательнейшее путешествие по современной физике, которая как никогда ранее близка к пониманию того, как устроена Вселенная. Квантовый мир и теория относительности Эйнштейна, гипотеза Калуцы—Клейна и дополнительные измерения, теория суперструн и браны, Большой взрыв и мульти-вселенные — вот далеко не полный перечень обсуждаемых вопросов.

Используя ясные аналогии, автор переводит сложные идеи современной физики и математики на образы, понятные всем и каждому.

Брайан Грин срывает занавес таинства с теории струн, чтобы представить миру 11-мерную Вселенную, в которой ткань пространства рвется и восстанавливается, а вся материя порождена вибрациями микроскопических струн.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов естественно-научных дисциплин, так и у широкого круга читателей.

*Роджер Пенроуз*

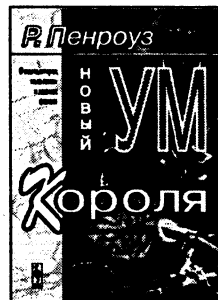
**НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ**

**О компьютерах, мышлении и законах физики**

Монография известного физика и математика Роджера Пенроуза посвящена изучению проблемы искусственного интеллекта на основе всестороннего анализа достижений современных наук. Возможно ли моделирование разума? Чтобы найти ответ на этот вопрос, Пенроуз обсуждает широчайший круг явлений: алгоритмизацию математического мышления, машины Тьюринга, теорию сложности, теорему Геделя, телепортацию материи, парадоксы квантовой физики, энтропию, рождение вселенной, черные дыры, строение мозга и многое другое.

Член Лондонского королевского общества, профессор математики Оксфордского университета, сэр Роджер Пенроуз — выдающийся ученый современности, активно работающий в различных областях математики, общей теории относительности и квантовой теории; автор теории твисторов.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов, так и у широкого круга читателей.



**Издательство  
УРСС**

**(095) 135-42-46,  
(095) 135-42-16,  
URSS@URSS.ru**

**Наши книги можно приобрести в магазинах:**

- «Евразмет» (м. Менделеевская, Тихвинский пер., 10/12-9. Тел. (895) 506-33-90)
- «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (895) 925-2457)
- «Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (895) 283-8242)
- «Москва» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. (895) 229-7355)
- «Молодая гвардия» (м. Полинка, ул. Б. Полинка, 28. Тел. (895) 238-5883, 238-1144)
- «Дом деловой книги» (м. Пролетарская, ул. Марксистская, 9. Тел. (895) 278-5421)
- «Старый Свет» (м. Пушкинская, Тверской б-р, 25. Тел. (895) 282-8688)
- «Гнозис» (м. Университет, 1 гуп. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (895) 938-4713)
- «У Невгавара» (РТУ) (м. Новослободская, ул. Чалюва, 15. Тел. (895) 973-4381)
- «СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 371-3854)



